PT* 26/27 - DM 3
à rendre le vendredi 13 novembre

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à deux.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P) = \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)dt$

1. Montrer que f est une application linéaire

2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ calculer $f(X^k)$, puis justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Prouver que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists!\, P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = Q$. A-t-on $\deg P = \deg Q$?

5. On note $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$.
   Montrer que $g \circ f = f \circ g$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0$ (une telle matrice A est dite nilpotente.)
Plus précisément, si A est une matrice nilpotente non nulle, on appelle *indice de nilpotence de* A le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3 et le justifier.
   D'une manière générale, donner(sans justification) une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n.

2. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes alors en général $A+B$ n'est pas nilpotente

3. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente d'indice p et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice nilpotentes d'indice q et que de plus elles commutent.
   (a) Montrer que AB est une matrice nilpotente
   (b) Montrer que $(A+B)^{p+q-1} = 0_n$

4. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.

5. Soit A une matrice nilpotente d'indice p
   On note $B = I_n - A$.
   (a) On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $BX = 0$.
   Montrer que $\forall k \geqslant 0, A^k X = X$

   (b) En déduire que B est une matrice inversible

   (c) Calculer $B.(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$.
   Conclure