Dans tout ce polycopié, on considèrera le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Une courbe peut être définie de 2 manières.

	par équation cartésienne	par représentation paramétrique
	$\Gamma = \{M(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ avec $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$\Gamma = \{M = f(t) \mid t \in I\}$ avec $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
M_0 point régulier	$\overrightarrow{\nabla}_{M_0} F \neq \vec{0}$ ce vecteur est orthogonal à la tangente	$\overrightarrow{f'(t_0)} \neq \vec{0}$ ce vecteur dirige la tangente

A RETENIR: LA TANGENTE EST DIRIGÉE PAR LE PREMIER VECTEUR DÉRIVÉ NON NUL.

21: tangente à une courbe paramétrée

Soit (I,f) une courbe paramétrée, et $t_0 \in I$

1. Si f est suffisamment régulière, on calcule successivement les dérivées de f et on les évalue en t_0.
   La première dérivée non nulle en t_0 dirige la tangente à Γ en $M(t_0) = f(t_0)$
   (elle en assure donc aussi l'existence)
   - si p est l'ordre du premier vecteur dérivé non nul de f en t_0, **la droite tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite qui passe par ce point et de vecteur directeur $\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$**
   - éq paramétrique: $\lambda \mapsto \overrightarrow{f(t_0)} + \lambda.\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$
   - éq.cartésienne: $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$
   - *rem: au début, on écrit que "f est de classe $C^{\cdots}$ car ses fonctions coordonnées le sont."*
2. Si f n'est pas dérivable en t_0 (très rare) ou si l'on n'aime pas dériver(lol), on peut calculer $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$

21: tangente à une courbe paramétrée

Soit (I,f) une courbe paramétrée, et $t_0 \in I$

1. Si f est suffisamment régulière, on calcule successivement les dérivées de f et on les évalue en t_0.
   La première dérivée non nulle en t_0 dirige la tangente à Γ en $M(t_0) = f(t_0)$
   (elle en assure donc aussi l'existence)
   - si p est l'ordre du premier vecteur dérivé non nul de f en t_0, **la droite tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite qui passe par ce point et de vecteur directeur $\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$**
   - éq paramétrique: $\lambda \mapsto f(t_0) + \lambda.\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$
   - éq.cartésienne: $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$
   - *rem: au début, on écrit que "f est de classe $C^{\cdots}$ car ses fonctions coordonnées le sont."*
2. Si f n'est pas dérivable en t_0 (très rare) ou si l'on n'aime pas dériver(lol), on peut calculer $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$

Résolu 522: standard

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre réel.

On considère la courbe $\Gamma = (\mathbb{R}, f)$ avec $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\alpha.t - \sin t, \cos t) \end{array}$

Etudier la tangente au point $M(0)$

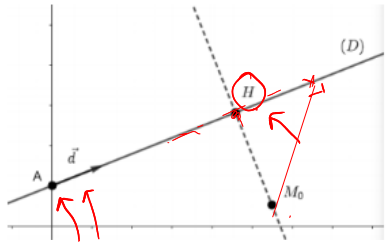
- *La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions coordonnées le sont.*
  et l'on a $f'(t) = \begin{pmatrix} \alpha - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ et donc $f'(0) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- *1er cas : $\alpha \neq 1$*
  - ✓ *On a ainsi $f'(0) \neq \vec{0}$, càd $M(0)$ est un point régulier.*
    La droite tangente au point $M(0)$ est donc la droite qui passe par le point $M(0) = (0,1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: il s'agit donc d'une tangente horizontale d'éq. cart. $y = 1$
- *2nd cas : $\alpha = 1$*
  - ✓ *On a $f'(0) = \vec{0}$ et $M(0)$ est un point singulier*
  - ✓ *On a $f''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ et $f''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ La droite tangente au point $M(0)$ est donc la droite qui passe par le point $M(0) = (0,1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: il s'agit donc d'une tangente verticale d'éq. cart. $x = 0$*

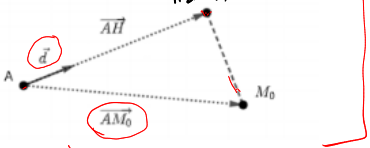
1.2 Projection sur une droite

9: détermination du projeté orthogonal grâce à une formule

Soit D la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{d}$
Soit M_0 un point du plan.

Le projeté orthogonal du point M_0 sur la droite D est le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{< \overrightarrow{AM_0}, \vec{d} >}{||\vec{d}||^2}.\vec{d}$





démo:

- Comme H est le projeté de M_0 sur D, on a
  - i) $H \in D$, et ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AH} = \lambda.\vec{d}$
  - ii) $\overrightarrow{HM_0}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux, càd $< \overrightarrow{HM_0}, \vec{d} >= 0$
- Par bilinéarité du produit scalaire et la relation de Chasles

$$< \overrightarrow{AM_0}, \vec{d} >=< \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM_0}, \vec{d} >= \underbrace{< \overrightarrow{AH}, \vec{d} >}_{=<\lambda\vec{d},\vec{d}>} + \underbrace{< \overrightarrow{HM_0}, \vec{d} >}_{=0} = \lambda < \vec{d}, \vec{d} >= \lambda ||\vec{d}||^2$$

- On a bien prouvé que $\overrightarrow{AH} = \lambda.\vec{d}$ avec $\lambda = \frac{< \overrightarrow{AM_0}, \vec{d} >}{||\vec{d}||^2}$

Résolu 507: standard

Soit D la droite passant par le point $A(2,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d} = (2,-1)$.
Le projeté orthogonal du point $M(0,3)$ sur cette droite est donné par

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{d}}{||\vec{d}||^2}\vec{d} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{2^2 + (-1)^2}.(2,-1) = \frac{-6}{5}.(2,-1)$$

et donc

$$H = A + \frac{-6}{5}.(2,-1) = (2,1) + \frac{-6}{5}.(2,-1) = (\frac{-2}{5}, \frac{11}{5})$$

10: détermination du projeté orthogonal sans formule

Soit D la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{d}$
Soit M un point du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite D est le point H qui est à l'intersection de la droite D et de la perpendiculaire à D passant par M.
On écrit l'équation de la normale(=la perpendiculaire) à D passant par M, puis on détermine l'intersection des deux droites en écrivant un système. (faire un dessin)

GEO 67

On considère la courbe paramétrée Γ : $\begin{cases} x(t) &= 2t^2 \\ y(t) &= 2t \end{cases}$

1. Donner une équation cartésienne de Γ et la tracer
2. Donner une équation cartésienne de la tangente T à Γ en son point $M(t)$
3. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de $F(1/2,0)$ sur les tangentes à Γ
4. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de $O(0,0)$ sur les tangentes à Γ

$x = \frac{1}{2}y^2$

① Soit $M_0(x_0, y_0)$

On a les équivalences

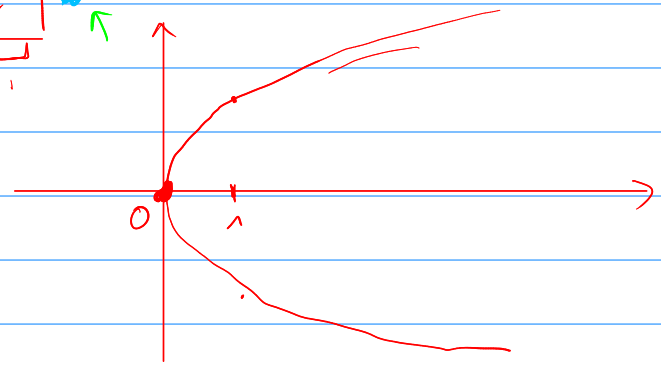
$M_0 \in \Gamma \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_0 = 2t^2 \\ y_0 = 2t \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_0 = 2\cdot\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \\ t = \frac{y_0}{2} \end{cases}$

$\iff x_0 = 2\cdot\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 = \frac{y_0^2}{2}$ //

$y = \frac{1}{2}x^2$

eq. cart : $x = \frac{1}{2}y^2$

⊃ C



② $M(t) = (2t^2 ; 2t)$ $\quad \overrightarrow{M'(t)} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

→ Tout pt de Γ est régulier.

→ T est la droite qui passe par le pt $M(t)$ et dirigée par $\overrightarrow{M'(t)}$

$x - 2t\cdot y + 2t^2 = 0$

$t = \frac{y_0}{2}$

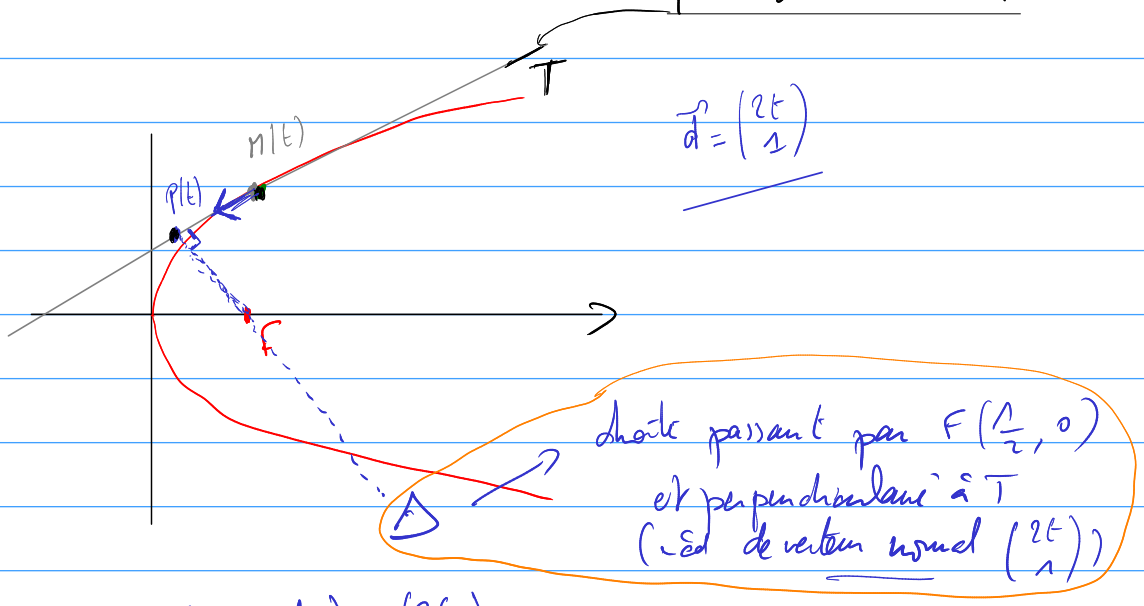
$M_0(x_0, y_0) = M\left(\frac{y_0}{2}\right)$

$$\begin{vmatrix} x & -2t^2 & 2t \\ y & -2t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x = 2y^2 + z^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 2t^2 - 2t + 4t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{x - 2ty + 2t^2 = 0}$

③



$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

droite passant par $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et perpendiculaire à T (i.e de vecteur normal $\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow 2t\,x + y - t = 0$$

P(t) est l'intersection de Δ et de T

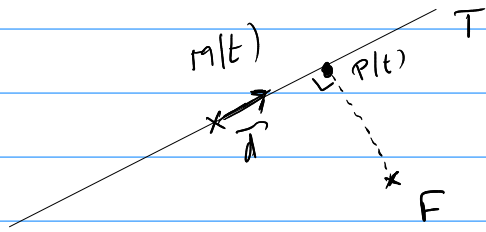
$$\begin{cases} 2tx + y - t = 0 \\ x - 2ty + 2t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$$

$\boxed{P(t) = (0, t)}$

notons Γ_1 le lieu de P(t) ou reconnait l'axe (Oy) !

$\Gamma_1 = \{ P(t) \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ (0, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

UTILISATION DE LA FORMULE DU PROJETÉ ORTHOGONAL



$$\overrightarrow{M(t)P(t)} = \frac{\langle \overrightarrow{M(t)F}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

$$\boxed{P(t) = M(t) + \frac{\langle \overrightarrow{M(t)F}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}}$$

$\overrightarrow{M(t)F} = \begin{pmatrix} 1/2 - 2t^2 \\ 0 - 2t \end{pmatrix} \qquad \langle \overrightarrow{M(t)F}, \vec{d} \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2t^2 \\ -2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = -t - 4t^3 = -t(1 + 4t^2)$

$\|\vec{d}\|^2 = 4t^2 + 1$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + \frac{-t(1+4t^2)}{4t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

(4) $Q(t) = \left(\frac{-2t^2}{4t^2+1} ; \frac{4t^3}{4t^2+1} \right)$

Partie B

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z vérifiant

$$|z| = \left|z + \overline{z}.e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right|.$$

4. Soit D la droite d'équation

$$\sqrt{3}x + y = 3.$$

Pour tout point M, on note M' son projeté orthogonal sur D.

(a) Déterminer l'expression des coordonnées (x',y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M.

(b) En déduire que si z est l'affixe complexe de M et z' celle de M', alors

$$z' = \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}.e^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right).$$

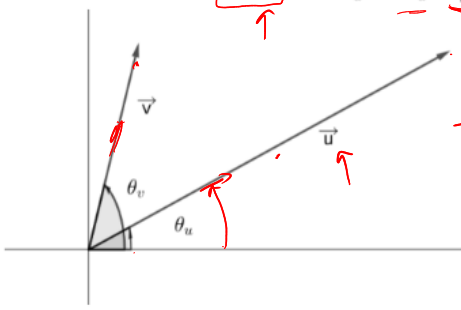
5. Exprimer $z - z'$ en fonction de z et $\overline{z}$.
6. En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique dont on précisera la nature, un foyer, une directrice et l'excentricité.

GEO 10
On considère M_1, M_2 et M_3 des points d'affixe z_1, z_2 et z_3 tels que $(i-1).z_1 + z_2 - iz_3 = 0$.
Démontrer que $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle rectangle en M_1

18: complexes et géométrie

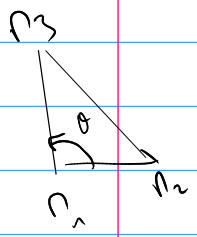
En plus de l'utilisation des complexes pour les transformations géométriques vue dans la méthode 16, il convient de se rappeler que:

- $||\vec{u}|| = |z_u|$
- Le cercle de centre Ω est de rayon R a pour équation $|z - z_\Omega| = R$
- L'angle(orienté) entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\theta_v - \theta_u = \arg\frac{z_v}{z_u}$ car $\frac{z_v}{z_u} = \frac{|z_v|}{|z_u|}.e^{i(\theta_v - \theta_u)}$



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \arg\frac{z_v}{z_u} \equiv 0\,[\pi] \iff \frac{z_u}{z_v} \in \mathbb{R}$ lorsque $z_v \neq 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff \arg\frac{z_v}{z_u} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{z_u}{z_v} = i\mathbb{R}$ lorsque $z_v \neq 0$
- On a aussi $\arg\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$

GEO 10
On considère M_1, M_2 et M_3 des points d'affixe z_1, z_2 et z_3 tels que $(i-1).z_1 + z_2 - iz_3 = 0$.
Démontrer que $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle rectangle en M_1



$|z_2 - z_1| = |i|,\ |z_3 - z_1| = |z_3 - z_1|$ $\qquad \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \|\overrightarrow{P_1P_3}\|$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{1}{i}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \|$$

$\arg(1) - \arg(i)$ (0 − π/2)