GEO 1 (Banque PT 2026 B)

Dans les trois premières parties de cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Dans la dernière partie de l'exercice, indépendante des trois premières, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Partie A

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   (a) Donner la nature et le paramétrage usuel de la conique d'équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

   (b) Donner la nature et le paramétrage usuel de chaque branche de la conique d'équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2. Soit F un point, D une droite ne contenant pas F et ε un réel strictement positif.

   (a) Donner la définition de la conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité ε.

   (b) Quelle est la nature de cette conique?

3. Soient M et M' deux points d'affixes complexes respectives z et z' et θ un nombre réel tels que

   $$z'=e^{i\theta}z.$$

   Quelle transformation permet de passer de M à M'?

Partie A Cette première partie proposait 3 questions de cours.
Seuls 6% des candidats ont obtenu la totalité des points de cette partie.

1. 20% des candidats ont eu la totalité des points de cette question de cours.
   Il semble que la plupart ne connaissent ni le mot « paramétrage », ni l'expression « branche d'une hyperbole ».
   Dans le paramétrage, il ne faut pas oublier le domaine où évolue le paramètre.
2. 22% des candidats ont eu la totalité des points de cette question de cours.
3. 23% des candidats fournissent une réponse complète à cette question de cours.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   (a) Donner la nature et le paramétrage usuel de la conique d'équation cartésienne

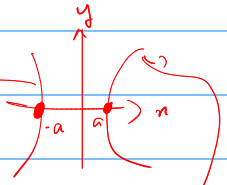
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

   (b) Donner la nature et le paramétrage usuel de chaque branche de la conique d'équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1(a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t\in[0;2\pi]$ ou $[-\pi;\pi]$

si $a\neq b$ ellipse
si $a=b$ cercle



(b) - HYPERBOLE

- Branche où $x\geq 0$ ($x\geq a$ en fait)

$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

- Branche où $x\leq 0$ ($x\leq -a$ en fait)

$\begin{cases} x = -a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

2. Soit F un point, D une droite ne contenant pas F et ε un réel strictement positif.

   (a) Donner la définition de la conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité ε.
   (b) Quelle est la nature de cette conique?

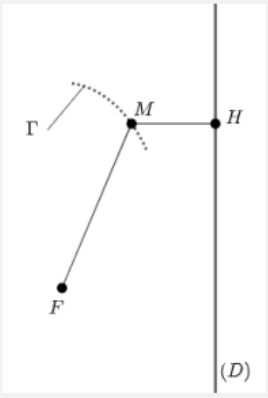
définition 1: définition géométrique des coniques

Soient:

- D une droite
- F un point n'appartenant pas à D
- e un réel strictement positif.

On appelle conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$

$$\boxed{\Gamma = \{M \in \mathbb{R}^2, | \, d(M,F) = e.d(M,(D))\}}$$



Lorsque

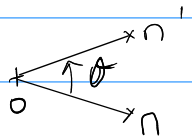
i) $e < 1$ *la conique est appelée* ELLIPSE
ii) $e = 1$ *la conique est appelée* PARABOLE
iii) $e > 1$ *la conique est appelée* HYPERBOLE

3. Soient M et M' deux points d'affixes complexes respectives z et z' et θ un nombre réel tels que

$$z' = e^{i\theta} z.$$

Quelle transformation permet de passer de M à M'?

(3) rotation de centre O et d'angle θ



$z = r \cdot e^{i\alpha}$

$z' = r \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = r \cdot e^{i(\theta+\alpha)}$

$|z| = |z'|$ $\quad \arg(z') = \arg(z) + \theta$

$\frac{z'}{z} = e^{i\theta}$

Partie B

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z vérifiant

$$|z| = \left|z + \overline{z}.e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right|.$$

4. Soit D la droite d'équation

$$\sqrt{3}x + y = 3.$$

Pour tout point M, on note M' son projeté orthogonal sur D.

(a) Déterminer l'expression des coordonnées (x',y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M.

(b) En déduire que si z est l'affixe complexe de M et z' celle de M', alors

$$z' = \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}.e^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right).$$

5. Exprimer $z - z'$ en fonction de z et $\overline{z}$.

6. En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique dont on précisera la nature, un foyer, une directrice et l'excentricité.

Partie B

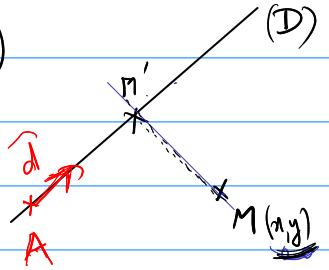
4. (a) Les caractérisations d'une projection orthogonale sont mal connues. Il était possible de passer par la formule de la projection vectorielle à condition d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{AM}$ avec $A \in \mathcal{D}$ et non le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

(b) Très peu traitée même par les candidats ayant réussi la question précédente.

5. Si tous les candidats qui traitent la question remplacent z' par le résultat de la question précédente (sans le dire), presque aucun des candidats (20%) ayant remplacé z par $z + \overline{z}\, e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ n'a expliqué pourquoi.
On compte également des erreurs dans le développement de $-z'$.

6. Vu le résultat de la question 2., cette question ne pouvait pas être réussie. Ceux qui ont réussi à faire le lien avec la question 2. n'ont pas toujours trouvé le foyer.
Les candidats qui donnent une nature de conique au hasard (ce qui, juste ou pas, ne rapporte aucun point) devraient au minimum vérifier qu'ils proposent la même nature à la question 8.c.

4(a) $(\mathcal{D}) \rightarrow A(0;3) \in (\mathcal{D})$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ vecteur directeur de $(\mathcal{D})$



Formule du projeté orthogonal.

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

avec $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3}$ et $\|\vec{d}\|^2 = 4$.

Ainsi $M' = A + \dfrac{-x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3}}{4} \cdot \vec{d}$ ✓

$M' = A + \overrightarrow{AM'}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3}}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$ ✓

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{-\sqrt{3}x + 3y + 3}{4} \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} z' = x' + iy' = \text{Aff}(M') \\ z = x + iy = \text{Aff}(M) \end{cases}$

4(b) $z - \bar{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}} = (x+iy) - (x-iy)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= x - \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\left(y + \frac{y}{2} - x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$ ✓

$= \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3y}{2} - x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$ ✓

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(z - \bar{z}e^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \underbrace{\frac{x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3}}{4}}_{x'} + i\underbrace{\left(\frac{3y - x\sqrt{3} + 3}{4}\right)}_{y'} = x' + iy' = z'$

(5) en reprenant :

$z - z' = z - \frac{1}{2}\left(z - \bar{z}e^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

(6) $M \in \mathcal{C} \iff |z| = \left|z + \bar{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$

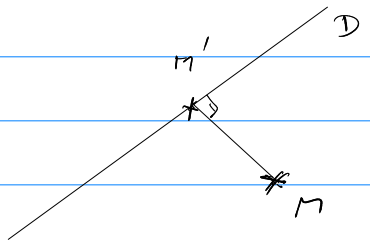
$\iff |z| = 2|z - z'|$

$\iff |z - 0| = 2|z - z'|$

$\iff OM = 2 \cdot MM'$

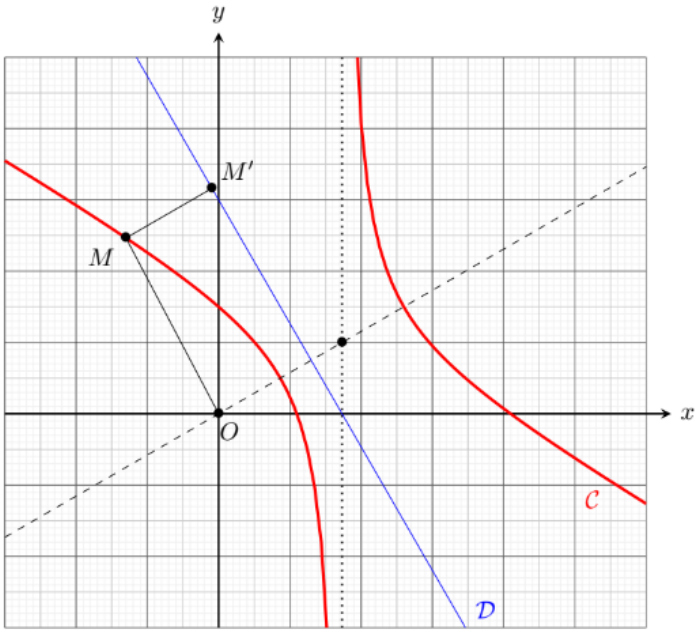
$\iff d(O,M) = 2 \cdot d(M,\mathcal{D})$

$\iff \frac{d(O,M)}{d(M,\mathcal{D})} = 2$



$e = 2 > 1$ HYPERBOLE

foyer = O | directrice = droite $\mathcal{D}$



Partie C

Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à D dont l'abscisse est positive.

7. Déterminer l'angle
$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{u}).$$

8. On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points N d'affixes complexes Z tels que le point M d'affixe complexe
$$z = e^{i\alpha} Z$$
appartienne à $\mathcal{C}$, où α est l'angle déterminé à la question 7.

   (a) Démontrer que
$$N \in \mathcal{C}' \iff |Z| = |Z + \overline{Z} - 3|.$$

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}'$ est
$$3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0.$$

   (c) Donner les éléments caractéristiques de la conique $\mathcal{C}'$, à savoir :
   - les coordonnées (s'il y a lieu) du centre, des sommets ;
   - une équation (s'il y a lieu) des asymptotes.

   On rappelle que les sommets d'une conique sont les points d'intersection de la conique avec ses axes de symétrie.

   (d) Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}'$ au point G de coordonnées (0,3).

9. (a) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 8.(c). Unité : 1 cm (minimum).
   On utilisera la feuille de papier millimétré fournie.

   (b) Quelle transformation permet d'obtenir la courbe $\mathcal{C}$ à partir de la courbe $\mathcal{C}'$? Le tracé de $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.

7. Il fallait commencer par (re)donner un vecteur $\vec{u}$. On note dans certains cas, des confusions claires entre vecteur normal et vecteur directeur ; dans d'autres cas, on ne sait pas s'il s'agit de la même confusion ou d'un énoncé mal lu.
Connaitre le cosinus d'un angle ne suffit pas à trouver cet angle. Les valeurs usuelles de la fonction arccosinus doivent être connues : les candidats ne devraient pas répondre $\alpha = \arccos(\frac{1}{2})$ et encore moins $\alpha = \arccos(\sqrt{3})$.

8. (a) Deux éléments à noter dans cette question : les candidats oublient soit de raisonner par équivalence soit de justifier leurs équivalences et le conjugué de $e^{i\alpha}Z$ n'est pas toujours correct.
De plus, dans certaines copies, il est très difficile pour le correcteur, et même parfois pour le candidat, de faire la différence entre z et Z.

(7) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3}\,\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2$

$\|\vec{u}\| = 2$.

$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$

$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\vec{u}.\vec{e}_1 = \sqrt{3}$

$= \|\vec{u}\|.\|\vec{e}_1\| \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \pm\frac{\pi}{6}$

8(a) $z = \text{Aff}(N)$

$Z = \text{Aff}(M)$

$z = e^{i\alpha}.Z = e^{i\frac{\pi}{6}}.Z$

$\overline{Z.Z'} = \overline{Z}.\overline{Z'}$ $\quad e^{i\theta} = e^{-i\theta}$

$\overline{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}.\overline{Z}$

$= e^{-i\frac{\pi}{6}}.\overline{Z}$

On a les équivalences :

$N \in \mathcal{C}' \iff M \in \mathcal{C}$

$\iff |z| = |z + \overline{z}.e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}|$

$\iff |e^{i\frac{\pi}{6}}.Z| = |e^{i\frac{\pi}{6}}.Z + e^{-i\frac{\pi}{6}}.\overline{Z}.e^{i\frac{\pi}{3}} - 3.e^{i\frac{\pi}{6}}|$

$\iff |Z| = |e^{i\frac{\pi}{6}}.(Z + \overline{Z} - 3)|$

$|z.z'| = |z|.|z'|$

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ |e^{i\theta}| = 1$

$\Leftrightarrow |z| = |z+\bar{z}-3|$

(b) $M(z) = z = x+iy$

si les 2 membres de l'égalité sont ≥ 0 on a

$N \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow |z|^2 = |z+\bar{z}-3|^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = (2x-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2+9-12x$

$\Leftrightarrow 3x^2-12x-y^2+9=0$

avec $\begin{cases} |z|^2 = x^2+y^2 \\ z+\bar{z} = x+iy+x-iy = 2x \\ z+\bar{z}-3 = 2x-3 \end{cases}$

(c) $3(x^2-4x) - y^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow 3\left[(x-2)^2-4\right] - y^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-2)^2 - y^2 = 3$

$\Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1} \quad \Leftrightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{1^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1}$

- HYPERBOLE
- SOMMETS $A(1,0)$ et $A'(3,0)$
- asymptotes $\underline{y = \pm\sqrt{3}(x-2)}$

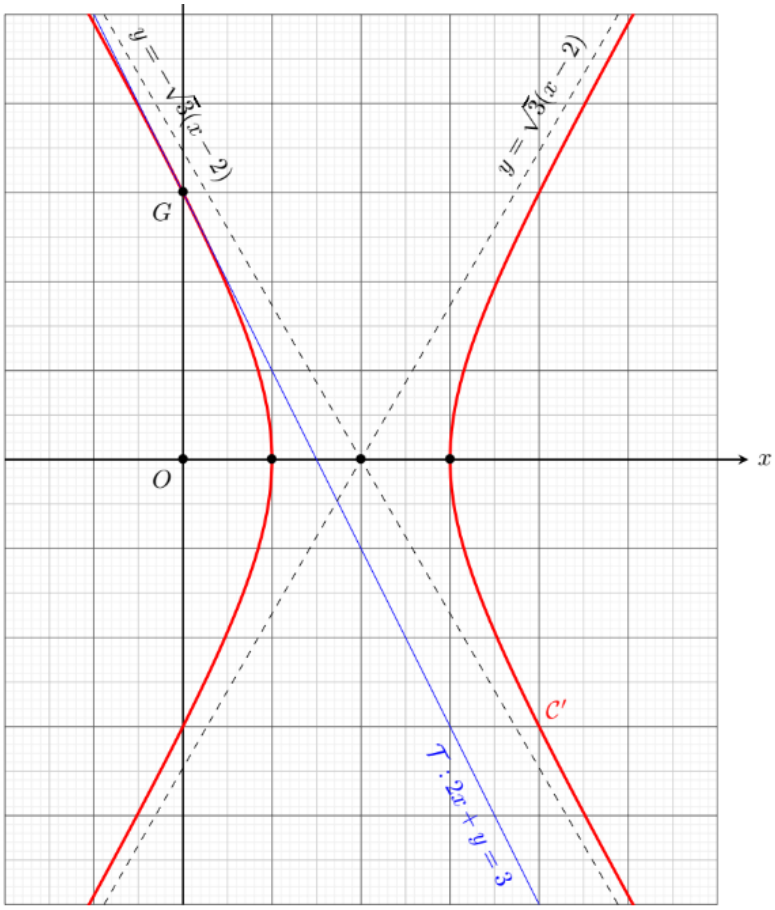
(d) • $G(0;3) \in \mathcal{C}'$ car $0^2 - 12.0 - 3^2 + 9 = 0$

• $F : (x;y) \longmapsto 3x^2-12x-y^2+9$

$\vec{\nabla}F = \begin{pmatrix} 6x-12 \\ -2y \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla}_G F = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} +2 \\ +1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \underline{+2x+y-3=0}$

(9) a)



b) $Aff(N) = z \quad N \in \mathcal{C}'$

$Aff(M) = z \quad M \in \mathcal{C}$

$z = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot Z$

$Z = e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot z$

$N = f(M)$ avec f rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

$M = g(N)$ avec g ——— $+\frac{\pi}{6}$.

$\mathcal{C}$ = lieu de M

$\mathcal{C}'$ = lieu de N

$\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{C}'$ par la rotation g.

GEO 83

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ on note C_α la conique d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$.

1. Donner la nature de C_α en fonction de α
2. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan NON situé sur les axes.
   Montrer que passent par M_0 deux coniques C_{α_1} et C_{α_2} de natures différentes.
   (indication: on pourra déterminer $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1.\alpha_2$ puis $(\alpha_1 - 1).(\alpha_2 - 1)$)
3. Montrer que les tangentes en M_0 à C_{α_1} et C_{α_2} sont perpendiculaires.

(1) si $\alpha > 1$: $\alpha > 0$, $\alpha - 1 > 0$ — ellipse — ce ne peut pas être un cercle $\alpha \neq \alpha - 1$

si $0 < \alpha < 1$: $\alpha > 0$, $\alpha - 1 < 0$ — hyperbole

② Soit $M_0(x_0, y_0)$ $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$

on s'intéresse à l'éq $\frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\alpha - 1} = 1$

$\Leftrightarrow x_0^2 \cdot (\alpha - 1) + y_0^2 \cdot \alpha = \alpha(\alpha - 1)$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - (1 + x_0^2 + y_0^2)\alpha + x_0^2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$\Delta = (1 + x_0^2 + y_0^2)^2 - 4x_0^2$

$= (1 + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0)(1 + x_0^2 + y_0^2 - 2x_0)$

$= \underbrace{[\underbrace{(1+x_0)^2}_{\geq 0} + \underbrace{y_0^2}_{>0}]}_{>0} \underbrace{[\underbrace{(1-x_0)^2}_{\geq 0} + \underbrace{y_0^2}_{>0}]}_{>0} > 0$

$\alpha_1 = \frac{1 + x_0^2 + y_0^2 + \sqrt{\Delta}}{2}$

$\alpha_2 = \dots$

Vérifions que les 2 racines α_1 et α_2 sont dans $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$

on a $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 + x_0^2 + y_0^2 > 0 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 = x_0^2 > 0 \end{cases}$ d'où $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$

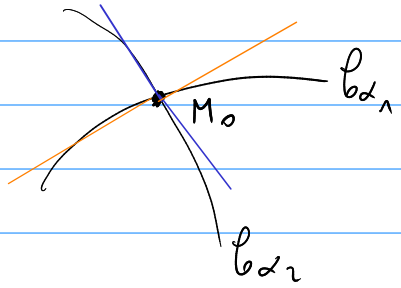
$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) = \alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) + 1 = x_0^2 - (1 + x_0^2 + y_0^2) + 1 = -y_0^2 < 0$ ($y_0 \neq 0$)

c'est $(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) < 0$

on a $\alpha_1 - 1$ et $\alpha_2 - 1$ de signe opposé

c'est il y en a un qui est > 1 et l'autre < 1

3)



$D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Notons $F : (x, y) \longmapsto \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha - 1} - 1$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$\vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\alpha} \\ \frac{2y}{\alpha - 1} \end{pmatrix}$

le vecteur normal à la tgte à $\mathcal{C}_{\alpha_2}$ au pt M_0 est $\vec{\nabla}_{M_0} F = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha_2} \\ \frac{2y_0}{\alpha_2 - 1} \end{pmatrix} = \vec{n_1}$

le vecteur normal à la tgte à $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ au pt M_0 est $\vec{\nabla}_{M_0} F = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha_1} \\ \frac{2y_0}{\alpha_2 - 1} \end{pmatrix} = \vec{n_2}$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \frac{4x_0^2}{\alpha_2\alpha_1} + \frac{4y_0^2}{(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 - 1)} = \frac{4x_0^2}{x_0^2} - \frac{4y_0^2}{y_0^2} = 0$!!