démonstration du théorème 2

- Soit $k \neq 0$ et Γ la courbe d'éq. $xy = k$ dans le repère $\mathcal{R} = (O,\vec{i},\vec{j})$
- Considérons le nouveau repère $\mathcal{R}_1 = (O,\vec{I},\vec{J})$ obtenu par changement de base avec

$$\vec{I} = \cos(\pi/4).\vec{i} + \sin(\pi/4).\vec{j} \qquad \vec{I} = -\sin(\pi/4).\vec{i} + \cos(\pi/4).\vec{j}$$

  Notons (X,Y) les coordonnées dans ce nouveau repère.
- La formule de changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{avec } P = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Ainsi

$$\begin{cases} x &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

- L'équation de Γ est donc dans le repère $\mathcal{R}_1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y).\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = k \iff \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = k \qquad (E)$$

- On distingue maintenant deux cas (car $k \neq 0$)

  i) cas $k > 0$.

$$(E) \iff \frac{X^2}{2k} - \frac{Y^2}{2k} = 1 \iff \frac{X^2}{(\sqrt{2k})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2k})^2} = 1$$

  On reconnait bien l'équation d'une hyperbole!

  ii) cas $k < 0$.

$$(E) \iff \frac{X^2}{-2k} - \frac{Y^2}{-2k} = -1 \iff \frac{X^2}{(\sqrt{-2k})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{-2k})^2} = -1$$

  On reconnait bien l'équation d'une hyperbole!

- remarque:
  Dans les deux cas, les droites asymptotes ont pour équation

$$Y = \pm.\frac{\sqrt{\pm 2k}}{\sqrt{\pm 2k}}.X = \pm X$$

  Ce qui donne

$$X + Y = 0 \qquad ; \qquad X - Y = 0$$

  et donc dans le repère initial

$$y = 0 \qquad ; \qquad x = 0$$