Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \cos^2(t) \\ y(t) &= \cos^3(t).\sin(t) \end{cases}$ **avec** $t \in \mathbb{R}$

- Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur cet ensemble.

- Les fonctions x et y sont π-périodiques: la fonction vectorielle $t \mapsto (x(t),y(t))$ l'est donc aussi. On étudiera et on tracera la courbe sur un intervalle de longueur π, et l'on obtiendra ainsi toute la courbe.

- La fonction x est paire et la fonction y est impaire: **on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi/2]$, puis pour obtenir toute la courbe on réalisera une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.**

- Le calcul des dérivées donne $\boxed{\forall t \in [0,\pi/2], x'(t) = -2\sin t.\cos t = -\sin(2t)}$

  et
  $$\forall t \in [0,\pi/2], y'(t) = \cos^4 t - 3\cos^2 t.\sin^2 t = 4\cos^4 t - 3\cos^2 t = 4\cos^2 t.(\cos^2 t - \frac{3}{4})$$
  Ainsi
  $$\boxed{\forall t \in [0,\pi/2], y'(t) = 4\cos^2 t.(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

  Il faut toujours factoriser au maximun les dérivées pour ensuite faire une étude simple de signe!

  Le TV est simple à écrire:

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		0
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0

  - Il n'y a pas de branches infinies
  - On note la présence d'un unique point stationnaire $M(t = \pi/2)$
  - On a $M(\pi/6) = \left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ et la tangente y est horizontale
  - On a $M(0) = (1,0)$ est la tangente y est verticale

- **Etude du point stationnaire**
  Le calcul des dérivées secondes donne

$$M''(\pi/2) = (x''(\pi/2), y''(\pi/2)) = (2,0) \neq (0,0)$$

Ainsi la tangente au point $M(\pi/2)$ est dirigée par le vecteur (2,0): c'est une tangente horizontale!

remarque: compte tenu du tableau de variation et de la symétrie pa rapport à (Ox) le point $M(\pi/2)$ est forcément un point de rebroussement de première espèce (pas besoin d'un étude par le calcul!)

