GEO 77

1. La mise sous forme canonique donne

$$x^2+2x+3y^2-4y+1=0 \iff (x+1)^2+3(y-2/3)^2=4/3 \iff \frac{(x+1)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y-2/3)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

   Sous cette forme, on reconnait l'équation d'une ellipse:

   - de centre $\Omega=(-1,\frac{2}{3})$
   - de demi-grand axe $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et de demi-petit axe $b=\frac{2}{3}$
   - je précise aussi directement les sommets

$$A(-1+\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}) \qquad A'(-1-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}) \qquad B(-1,\frac{4}{3}) \qquad B'(-1,0)$$

2. Notons $F:(x,y)\mapsto x^2+2x+3y^2-4y+1$
   - On a $\overrightarrow{grad}_{(x,y)}F=\begin{pmatrix}2x+2\\6y-4\end{pmatrix}$
   - On remarque que $\overrightarrow{grad}_{(x,y)}F=\vec{0}$ ssi $(x,y)=(-1,2/3)=\Omega$)
     On en déduit que tout point $M_0(x_0,y_0)$ de l'ellipse est régulier.
   - La tangente au point $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation

$$\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2x_0+2\\6y_0-4\end{pmatrix}=0$$

     ce qui donne

$$(x_0+1).x+(3y_0-2).y-x_0+2y_0-x_0^2-3y_0^2=0$$

     sachant que $M_0\in\mathcal{C}$, on a $x_0^2+3y_0^2=-2x_0+4y_0-1$,
     et donc en remplaçant dans l'équation cela donne

$$(x_0+1).x+(3y_0-2).y+x_0-2y_0+1=0$$

3. Notons $\mathcal{T}_{M_0}$ la tangente au point M_0 et $A=(1,0)$
   - On a

$$A\in\mathcal{T}_{M_0} \text{ ssi } (x_0+1).1+0+x_0-2y_0+1=0 \text{ ssi } x_0-y_0+1=0$$

   - Les points M_0 en lesquels la tangente passe par le point A ont donc leurs coordonnées qui vérifient le système

$$\begin{cases}x_0-y_0+1 &=0\\ 2x_0^2+2x_0+3y_0^2-4y_0+1 &=0\end{cases} \iff \begin{cases}y_0=x_0+1\\ 2x_0^2+2x_0+3(x_0+1)^2-4(x_0+1)+1=0\end{cases}$$

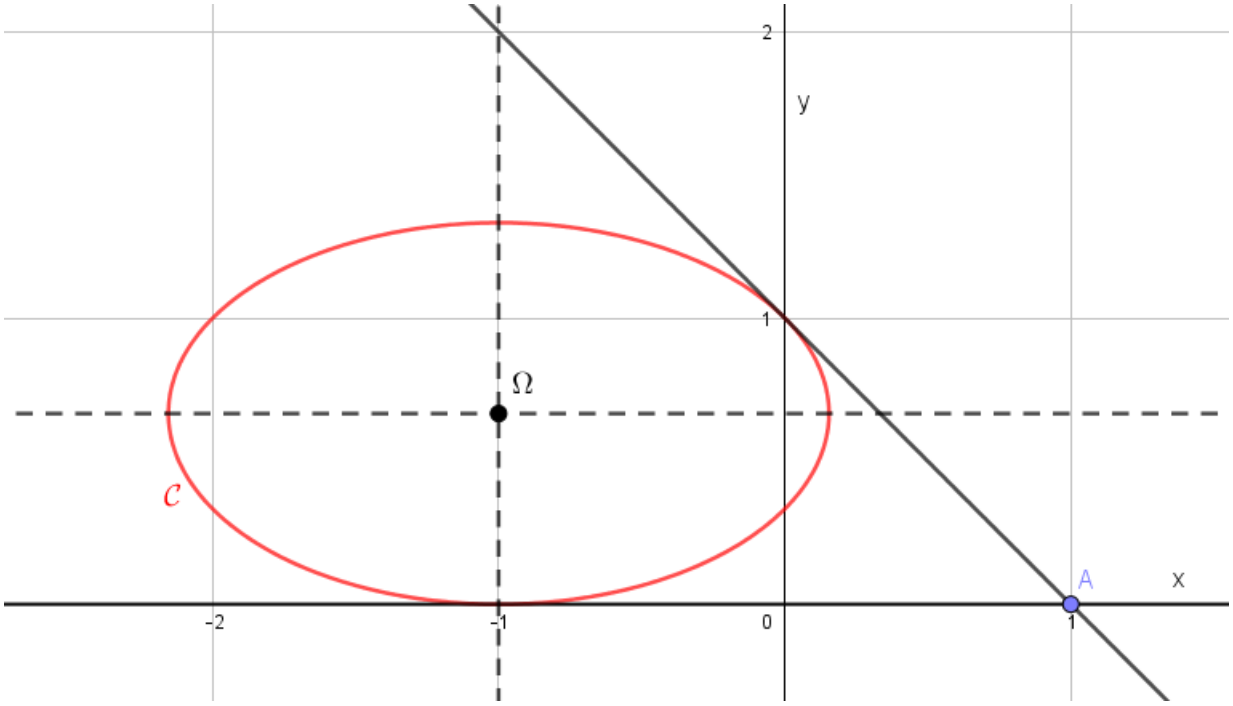
$$\iff \begin{cases}y_0=x_0+1\\ x_0^2+x_0=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y_0=x_0+1\\ x_0(x_0+1)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y_0=x_0+1\\ x_0=0 \text{ ou } x_0=-1\end{cases}$$

On trouve donc $M_0 = (0,1)$ et $M_0 = (-1,0)$

- Conclusion: il y a deux tangentes à l'ellipse qui passent par A
  (a) celle au point $M_0 = (0,1)$ d'équation $x + y - 1 = 0$
  (b) celle au point $M_0 = (-1,0)$ d'équation $y = 0$



GEO 81

- La mise sous forme canonique donne

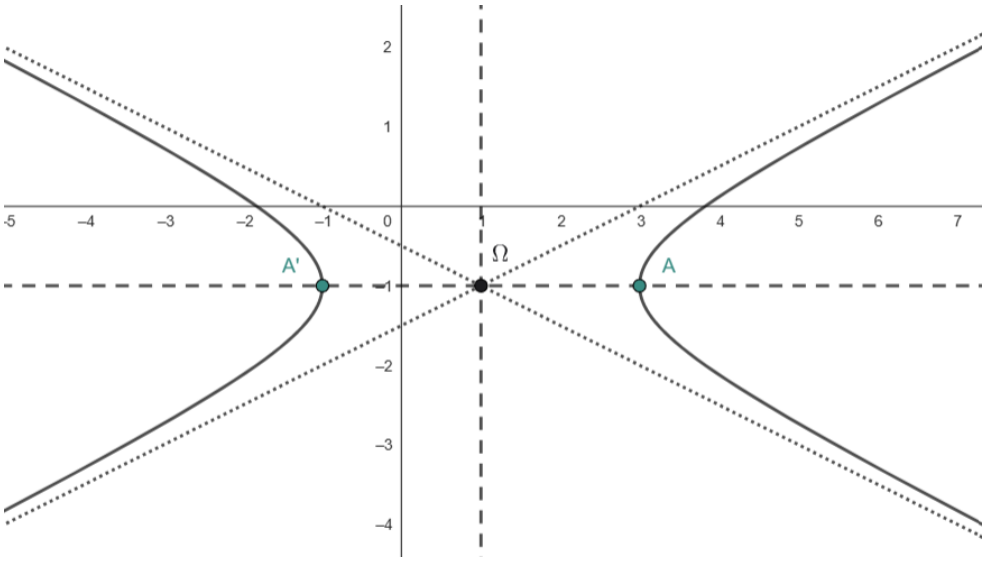
$$(x-1)^2 - 4.(y+1)^2 - 4 = 0$$

soit encore

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1$$

On reconnait l'équation d'une hyperbole de centre $\Omega(1,-1)$

- Pour trouver les sommets on résout $\begin{cases} x-1 &= \pm 2 \\ y+1 &= 0 \end{cases}$.
  On trouve $A(3,-1)$ et $A'(-1,-1)$
- Les asymptotes ont pour équation $y + 1 = \pm\frac{1}{2}(x-1)$
  Ce sont donc les droites qui passent par Ω et de coefficient directeur $\pm\frac{1}{2}$



- *remarque: dans ce genre d'exercice, lorsque l'on est à l'aise il est inutile de procéder au changement de repère et d'introduire X et Y. (c'est ce que j'ai fait ici)*
- On place tous les éléments sur le dessin et on s'appuie sur le dessin de référence du cours.
- On a $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ et $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} (> 1$ car c'est une hyperbole)
- Pour déterminer les couples foyer/directrice, il peut être utile de revenir dans un repère plus adapté car les formules sont données dans un tel repère.
  Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.
  On a $\begin{cases} X &= x-1 \\ Y &= y+1 \end{cases}$, et l'équation de $\mathcal{C}$ dans ce repère est donc

$$\frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{1^2} = 1$$

  Dans ce cas, on sait que

  i) le premier couple foyer F-directrice D est donné par $F(c,0)$ et $X = \dfrac{a^2}{c}$.
  On a donc dans le nouveau repère $F(\sqrt{5},0)$ et $D : X = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.
  Ce qui donne dans le repère initial

$$F(1+\sqrt{5},-1) \qquad \text{et} \qquad D : x = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

  ii) le second couple foyer F'-directrice D' est donné par $F(-c,0)$ et $X = \dfrac{-a^2}{c}$.
  On a donc dans le nouveau repère $F(-\sqrt{5},0)$ et $D : X = \dfrac{-4}{\sqrt{5}}$.
  Ce qui donne dans le repère initial

$$F(1-\sqrt{5},-1) \qquad \text{et} \qquad D : x = 1 - \frac{4}{\sqrt{5}}$$