GEO 82.2

- pas de terme en xy, donc pas de réduction de matrice mais juste de la mise sous forme canonique!

- On envisage déja plusieurs cas suivant qu'il y ait du x^2 et du y^2
  1. cas $m = 0$:
     On a alors
     $$-y^2 + 2 = 0 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$$
     Conclusion : Γ_0 est une conique dégénérée, c'est la réunion de deux droites parallèles

  2. cas $m = 1$:
     On a alors
     $$x^2 + 4x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$
     Conclusion : Γ_1 est une conique dégénérée, c'est la réunion de deux droites parallèles

  3. cas $m \notin \{0,1\}$:
     La mise sous forme canonique donne
     $$m\left((x+2)^2 - 4\right) + (m-1)y^2 = -2$$
     soit encore
     $$m.(x+2)^2 + (m-1).y^2 = 4m - 2$$
     Là encore, on se voit contraint d'envisager différent cas
     (a) cas $m = \dfrac{1}{2}$:
     L'équation devient
     $$(x+2)^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow x + 2 = \pm y \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$
     Conclusion : $\Gamma_{1/2}$ est une conique dégénérée, c'est la réunion de deux droites sécantes (perpendiculaires même)

     (b) sinon:
     On peut écrire l'équation sous la forme
     $$\frac{(x+2)^2}{\dfrac{4m-2}{m}} + \frac{y^2}{\dfrac{4m-2}{m-1}} = 1$$
     A ce stade, on regarde le signe des dénominateurs en faisant par exemple un tableau de signe, ce qui permet de conclure sur la nature!

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4m-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4m-2}{m}$		$+$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4m-2}{m-1}$		$+$		$+$	0	$-$		$+$	
		ellipse		*hyperbole*	0	*huperbole*		*ellipse*	

– si les 2 dénominateurs sont strictement positifs(cas $m < 0$ ou $m > 1$), ce sera une ellipse.
(ce ne sera jamais un cercle car les dénominateurs ne peuvent être égaux)

– si les 2 dénominateurs sont de signes opposés(cas $0 < m < 1/2$ ou $1/2 < m < 1$), ce sera une hyperbole.

– (si les 2 dénominateurs avaient été strictement négatifs(ce qui n'arrive jamais ici!), ce serait l'ensemble vide.)

GEO 71

- Notons
  - $\Gamma = \{M(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(3\cos t + \sin t, \sin t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$
  - $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-y)^2 + 9y^2 = 9\}$

  Il s'agit de montrer l'égalité entre ces deux ensembles

- Montrons que $\boxed{\Gamma \subset \Gamma_1}$
  Soit $M = (x_0,y_0) \in \Gamma$.
  On sait qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_0 &= 3\cos t + \sin t \\ y_0 &= \sin t \end{cases}$.
  On a donc

$$(x_0 - y_0)^2 + 9.y_0^2 = (3\cos t + \sin t - \sin t)^2 + 9.(\sin t)^2 = 9.(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9$$

  On trouve bien que $M \in \Gamma_1$

- Montrons que $\boxed{\Gamma_1 \subset \Gamma}$
  Soit $M = (x_0,y_0) \in \Gamma_1$.
  On sait donc que $(x_0 - y_0)^2 + 9.y_0^2 = 9$.
  Ce qui permet d'écrire

$$\left(\frac{x_0 - y_0}{3}\right)^2 + y_0^2 = 1$$

  On peut donc affirmer

$$\exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \dfrac{x_0 - y_0}{3} &= \cos t \\ y_0 &= \sin t \end{cases} \text{ ce qui donne } \quad \begin{cases} x_0 &= 3\cos t + \sin t \\ y_0 &= \sin t \end{cases}$$

  On trouve bien que $M \in \Gamma$

GEO 73

1. ($\vec{u}$,$\vec{v}$) étant une base orthonormée directe,

   Si $\vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ alors $\vec{v} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$

2. Notons P la matrice de passage de la base ($\vec{i}$,$\vec{j}$) à la base ($\vec{u}$,$\vec{v}$)..
   D'après la formule de changement de base, on a

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

   Simplifions ces coefficients!

   - Comme $\theta = \arccos(\frac{3}{5})$ on a $\cos\theta = \frac{3}{5}$
   - Ou bien, on sait que $\forall t \in [-1, +1]$, $\sin(\arccos t) = \sqrt{1-t^2}$
     et on écrit alors
     $$\sin\theta = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$
   - Ou bien, on redémontre cette formule
     - On sait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, et donc $\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$.
     - Comme $\theta = \arccos(\frac{3}{5})$ on sait que $\theta \in [0,\pi/2]$, et donc que $\sin\theta \geqslant 0$
     - D'où $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$

   Au final, on trouve

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{càd} \qquad \begin{cases} x &= \dfrac{3X-4Y}{5} \\ y &= \dfrac{4X+3Y}{5} \end{cases}$$

3. En remplaçant dans l'équation initial, on trouve l'équation dans le nouveau repère:

   $$-5Y + \sin X = 0 \Longleftrightarrow Y = \frac{1}{5}.\sin X$$

GEO 6

Soit $k \in \mathbb{R}$.

1. Notons $F : (x,y) \mapsto x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - k$
   - $\overrightarrow{\nabla} F = \begin{pmatrix} 2x + 2y - 4 \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$
   - Soit $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma_k$
     On a
     $$\overrightarrow{\nabla}_{M_0} F = \vec{0} \iff \begin{cases} x_0 + y_0 - 2 &= \\ x_0 + 2y_0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 &= 4 \\ y_0 &= -2 \end{cases}$$
     On regarde maintenant si ce point est un point de Γ_k en injectant ces coordonnées:
     $$x_0^2 + 2x_0y_0 + 2y_0^2 - 4x_0 = 4^2 + 2.4.(-2) + 2.(-2)^2 - 4.4 = -8$$
     Ainsi $M_0 \in \Gamma_K$ ssi $k = -8$

     Conclusion: $\begin{cases} \text{si } k = -8 \text{ il y a un point singulier, le point } M_0(4,-2) \\ \text{si } k \neq -8 \text{ il n'y a pas de point singulier} \end{cases}$

2. - Le point $A = (0,2)$ est un point de Γ_8 car $0^0 + 0 + 2.2^2 - 4.0 = 8$
   - $\overrightarrow{\nabla}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 8. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$
   - L'équation cartésienne de la tangente en A est donc
     $$\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{soit} \qquad y = 2 \qquad \textit{(c'est une tangente horizontale)}$$

3. - Les points de Γ_k en lesquels la tangente est horizontale sont les points réguliers $M_0 \in \Gamma_k$ pour lesquels $\overrightarrow{\nabla}_{M_0} F$ est "vertical" (càd colinéaire à $\vec{j}$).
     Il s'agit donc des points $M_0(x_0,y_0)$ tels que
     $$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0y_0 + 2y_0^2 - 4x_0 - k &= 0 \\ 2(x_0 + y_0 - 2) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0^2 + 2x_0(2 - x_0) + 2(2 - x_0)^2 - 4x_0 - k &= 0 \\ y_0 &= 2 - x_0 \end{cases}$$
     $$\iff \begin{cases} x_0^2 - 8x_0 + 8 - k = 0 \quad (*) \\ y_0 = 2 - x_0 \end{cases}$$
     Le discriminant vaut $\Delta = (-8)^2 - 4(8 - k) = 32 + 4k = 4(k + 8)$.
     On est amené à faire une discussion:

     i) 1er cas : $k < -8$.
     $\Delta < 0$ et donc **aucun point ne vérifie la condition demandée.**

     ii) 2eme cas : $k = -8$.
     L'équation $(*)$ possède $x_0 = 4$ comme racine double, et alors $y_0 = 2 - x_0 = -2$.
     Or le point $(4,-2)$ est un point singulier.
     Dans ce cas aussi, **aucun point ne vérifie la condition demandée.**

     iii) 3eme cas : $k > -8$.
     $(*)$ a deux racines distinctes $x_0 = 4 \pm \sqrt{k + 8}$.
     On trouve donc deux points sur Γ_k qui ont une tangente horizontale:
     $$M_0 = (4 - \sqrt{k+8}, -2 + \sqrt{k+8}) \qquad \text{et} \qquad M_0 = (4 + \sqrt{k+8}, -2 - \sqrt{k+8})$$