

PT* 26/27 - DM 2
à rendre le vendredi 16 octobre

Exercice 1

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-1,0)$ et $A'(1,0)$.

On note également $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2.

1. (a) Rappeler la représentation paramétrique usuel de $\mathcal{C}$.
On notera dans la suite $M(t)$ le point courant de ce cercle.
(b) A' quelle condition portant sur t le triangle $AM(t)A'$ est-il un triangle aplati?
(c) Dans le cas où ce n'est pas un triangle aplati, déterminer les coordonnées de $H(t)$ l'orthocentre de ce triangle.
2. On note Γ le support de l'arc paramétré $\gamma : t \in]-\pi, +\pi[\mapsto \left(2 \cdot \cos t, \frac{1 - 4 \cdot \cos^2 t}{2 \cdot \sin t} \right)$
 - (a) Justifier que le lieu de $H(t)$ correspond au support de l'arc Γ
 - (b) Justifier que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de γ à $]0, \frac{\pi}{2}[$.
On indiquera avec précision les symétries trouvées.
 - (c) Dresser le tableau de variations conjoint .
On étudiera avec rigueur le signe de la dérivée y'
 - (d) Indiquer la droite asymptote mise en évidence ainsi que la position de la courbe par rapport à celle-ci.
 - (e) Déterminer, toujours pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ l'intersection de Γ avec l'axe (Ox)
 - (f) Faire la représentation graphique complète de Γ . (échelle 1 unité=2cm)
3. Déterminer le lieu du centre de gravité du triangle $AM(t)A'$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathcal{P}$ et passant par le foyer $F(p/2, 0)$.

Soit $A(a, b)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ la normale en ce point. On note I le centre du cercle passant par F et tangent à $\mathcal{P}$ en A

1. Montrer que tout point $Q \in \mathcal{N}$ a des coordonnées de la forme $(a - \lambda \cdot p, b(1 + \lambda))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Déterminer la valeur de λ telle que $AQ = FQ$, et en déduire les coordonnées du point I .
3. On souhaite représenter la courbe paramétrée $\mathcal{C}$, lieu des points I , **dans le cas où** $p = 1$.
Pour cela, on considère la courbe paramétrée $\Gamma = (\mathbb{R}, f)$ avec $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (3t^2 + 1, 3t - t^3)$
 - (a) Déterminer le point double de Γ , et préciser sous quel angle se coupent les tangentes en ce point.
 - (b) Etudier la courbe Γ
 - (c) Indiquer la transformation géométrique qui permet de passer de la courbe Γ à la courbe $\mathcal{C}$
 - (d) Sur un même dessin, (échelle 1 unité=2cm), représenter $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$, et placer ainsi un cercle tangent à $\mathcal{P}$ qui passe par F

Exercice 1

1. (a) $\begin{cases} x(t) &= 2 \cdot \cos t \\ y(t) &= 2 \cdot \sin t \end{cases}$ avec $t \in [-\pi, +\pi]$

rem: j'ai choisi cet intervalle plutôt que $\mathbb{R}$ ou $[0, 2\pi]$ par cohérence avec la suite de l'énoncé;-)

On note $M(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ avec $t \in [-\pi, +\pi]$

- (b) Le triangle $AM(t)A'$ est aplati lorsque les points sont alignés, càd ici lorsque l'ordonnée de $M(t)$ est nulle, càd $t \in \{-\pi, 0, \pi\}$

- (c) • L'orthocentre est le point qui est intersection des hauteurs.
• hauteur issue de $M(t)$.

C'est la droite qui passe par le point $M(t)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AA'} = (2, 0)$.
Son équation est

$$\begin{pmatrix} x - 2 \cos t \\ y - 2 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ce qui donne } x - 2 \cos t = 0$$

- hauteur issue de A' .

C'est la droite qui passe par le point A' et de vecteur normal $\overrightarrow{AM(t)} = (2 \cos t + 1, 2 \sin t)$.
Son équation est

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos t + 1 \\ 2 \sin t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{càd} \quad (2 \cos(t) + 1) \cdot x + 2 \sin(t) \cdot y - 2 \cos(t) - 1 = 0$$

- Le point $H(t)$ est le point intersection de ces hauteurs.
On résout le système suivant, sachant que $\sin t \neq 0$

$$\begin{cases} x - 2 \cos t &= 0 \\ (2 \cos(t) + 1) \cdot x + 2 \sin(t) \cdot y - 2 \cos(t) - 1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2 \cos t \\ y &= \frac{(2 \cos t + 1)(1 - 2 \cos t)}{2 \cdot \sin t} \end{cases}$$

Conclusion: $H(t) = \left(2 \cdot \cos t, \frac{1 - 4 \cdot \cos^2 t}{2 \cdot \sin t} \right)$

rem: on sent que nos calculs sont corrects vue la question suivante

2. (a) On a $\forall t \in]-\pi, +\pi[^*, \gamma(t) = H(t)$.

rem: cette question était surtout utile pour ceux qui n'auraient pas simplifier l'expression trouvée en 1(c)

- (b) • La fonction x est paire et la fonction y est impaire,
ce qui signifie que $M(-t)$ est symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) .
On peut restreindre l'intervalle à $]0, \pi[$

- On a $\forall t \in]0, \pi[, \begin{cases} x(\pi - t) &= -x(t) \\ y(\pi - t) &= y(t) \end{cases}$

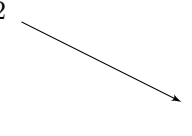
ce qui signifie que $M(\pi - t)$ est symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy) .
On peut restreindre l'intervalle à $]0, \frac{\pi}{2}]$

- (c) • Les fonctions x et y sont C^∞ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, comme quotient de fonctions C^∞ , le dénominateur ne s'annulant pas.
• $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], x'(t) = -2 \cdot \sin t < 0$

- $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cos t \sin^2 t - \cos t (1 - 4 \cos^2 t)}{\sin^2 t} \\
 &= \frac{\cos t}{2} \cdot \frac{8 \sin^2 t + 4 \cos^2 t - 1}{\sin^2 t} \\
 &= \frac{\cos t}{2} \cdot \frac{4 \sin^2 t + 4(\sin^2 t + \cos^2 t) - 1}{\sin^2 t} \\
 &= \frac{\cos t}{2} \cdot \frac{4 \sin^2 t + 1}{\sin^2 t} \geq 0 \quad \text{car } 4 \sin^2 t + 1 \geq 1 \text{ et } \cos t \geq 0 \\
 &\text{avec égalité ssi } t = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

- Le tableau est donc particulièrement simple

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		—
x		2  0
y		$-\infty$  $\frac{1}{2}$
$y'(t)$		+ 0

- Il n'y a pas de point stationnaire, et au point $M(\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{1}{2})$ la tangente est horizontale car dirigée par $\overrightarrow{M'(\frac{\pi}{2})} = (-2, 0)$

(d) Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = 2^-$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -\infty$,

il y a une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

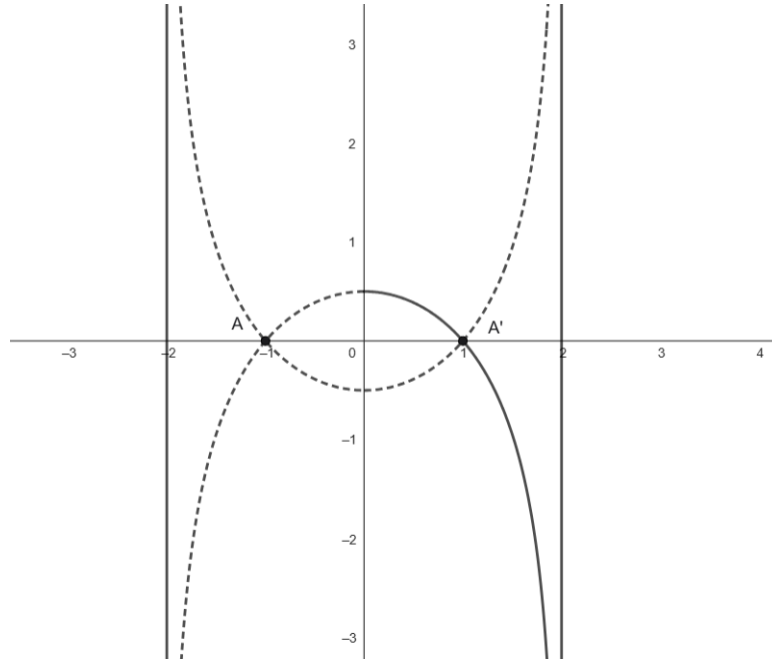
La courbe est située à gauche de cette asymptote car $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], x(t) \leq 2$

(e) Il s'agit de résoudre $y(t) = 0$ avec $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Ce qui donne $\cos^2(t) = \frac{1}{4}$ soit $\cos t = \pm \frac{1}{2}$.

Sur l'intervalle considéré, la seule solution est $t = \frac{\pi}{3}$.

L'intersection de Γ et de (Ox) et donc le point $\gamma(\frac{\pi}{3}) = (1, 0) = A'$



(f)

3. Notons $G(t)$ le centre de gravité du triangle $AM(t)A'$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_G(t) &= \frac{x_A + x_M(t) + x_{A'}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \cos t \\ \bullet \quad y_G(t) &= \frac{y_A + y_M(t) + y_{A'}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sin t \end{aligned}$$

Le lieu de $G(t)$ est donc le cercle de centre O et de rayon $\frac{2}{3}$.

Exercice 2

1.
 - Notons $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - 2px$.
On a $\vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} -2p \\ 2y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ car $p > 0$.
On en déduit que tout point de $\mathcal{P}$ est régulier et que la normale au point $A(a, b)$ est dirigée par le vecteur $\vec{\nabla}_A F = \begin{pmatrix} -2p \\ 2b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -p \\ b \end{pmatrix}$.
 - une représentation paramétrique de $\mathcal{N}$ est donc $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto A + \lambda \cdot (-p, b) = (a - \lambda \cdot p, b + \lambda \cdot b)$.
Ceci prouve bien que tout point $Q \in \mathcal{N}$ a des coordonnées de la forme $(a - \lambda \cdot p, b(1 + \lambda))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2.
 - Les longueurs AQ et FQ étant positives, on a les équivalences

$$\begin{aligned} AQ = FQ &\iff AQ^2 = FQ^2 \iff (a - \lambda \cdot p - a)^2 + (b(1 + \lambda) - b)^2 = (a - \lambda \cdot p - p/2)^2 + (b(1 + \lambda) - 0)^2 \\ &\iff \lambda^2 \cdot p^2 + b^2 \cdot \lambda^2 = (a - \lambda \cdot p - p/2)^2 + (b(1 + \lambda) - 0)^2 \end{aligned}$$

En développant, et en sachant que $b^2 = 2pa$ car $A \in \mathcal{P}$, on trouve

$$AQ = FQ \iff \lambda = -\frac{b^2 + p^2}{4p^2}$$

- Le point I est donc le point Q avec $\lambda = -\frac{b^2 + p^2}{4p^2}$, ce qui donne

$$I = \left(\frac{3b^2 + p^2}{4p^2}, \frac{3p^2b - b^3}{4p^2} \right)$$

3. (a)
 - On résout $f(t_1) = f(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$.

$$f(t_1) = f(t_2) \iff \begin{cases} 3t_1^2 + 1 &= 3t_2^2 + 1 \\ 3t_1 - t_1^3 &= 3t_2 - t_2^3 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1^2 &= t_2^2 \\ 3t_1 - t_1^3 &= 3t_2 - t_2^3 \end{cases}$$

Comme $t_1 \neq t_2$, on a $t_2 = -t_1$ avec $t_1 \neq 0$, ce qui donne

$$f(t_1) = f(t_2) \iff 3t_1 - t_1^3 = -3t_1 - (-t_1)^3 \iff 6t_1 - 2t_1^3 = 0 \iff 2.t_1.(3 - t_1^2) = 0$$

Ainsi $(t_1, t_2) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ou $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Le point double a pour coordonnées $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = (10, 0)$

- Comme $\forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{f'(t)} = (6t, 3 - 3t^2)$,
on a $\overrightarrow{f'(\sqrt{3})} = (6\sqrt{3}, -6) = 6.(\sqrt{3}, -1)$ et $\overrightarrow{f'(-\sqrt{3})} = (-6\sqrt{3}, -6) = 6.(-\sqrt{3}, -1)$.
Notons α l'angle entre les deux tangentes au point double

$$\cos \alpha = \frac{\langle \overrightarrow{f'(-\sqrt{3})}, \overrightarrow{f'(\sqrt{3})} \rangle}{\|\overrightarrow{f'(-\sqrt{3})}\| \cdot \|\overrightarrow{f'(\sqrt{3})}\|} = \frac{-3 + 1}{2.2} = \frac{-1}{2}$$

Ainsi, l'angle entre les droites tangentes au point double vaut $\frac{2\pi}{3}$

- (b)
- réduction de l'intervalle d'étude.
 - x et y ne sont pas périodiques
 - x est paire et y impaire,
ce qui signifie que $M(-t)$ est symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) .
On peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, +\infty[$
 - x et y sont de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, avec $\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1-t)(1+t) \end{cases}$
Le signe des dérivées est simple à trouver, et il n'y a pas de point stationnaire ;-)

t	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	0	+	
x	1	4	$+\infty$
y	0	2	$-\infty$
$y'(t)$	+	0	-

- Etude de la branche infinie quand $t \rightarrow +\infty$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t - t^3}{3t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3/t - t}{3 + 1/t^2} = -\infty$
 Il n'y a pas de droite asymptote mais juste une branche parabolique de direction (Oy)

- (c) D'après Q2, $\mathcal{C}$ a pour représentation paramétrique $h : b \in \mathbb{R} \mapsto I(b) = \left(\frac{3b^2 + 1}{4}, \frac{3b - b^3}{4} \right)$

Notons $N(t)$ le point de coordonnées $f(t)$.

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OI(t)} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{ON(t)}$.

Ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est l'image de Γ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$.

(d)

