

PT* 26/27 - DM 1
à rendre le vendredi 2 octobre

Méthode des sécantes parallèles

préambule:

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$ possède une unique solution sur $]1,2[$

Dans la suite de cet exercice, on note x_0 cette solution.

On souhaite déterminer une valeur approchée de x_0 .

Pour cela on utilise la méthode des sécantes parallèles.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 2x + 3$

1. La tangente en $A(1,1)$ à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse c_1 .
On note $C_1(c_1, f(c_1)) \in \mathcal{C}$.
La parallèle à la tangente précédente passant par C_1 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse c_2 .
Soit $C_2(c_2, f(c_2)) \in \mathcal{C}$.
La parallèle aux tangentes précédentes passant par C_2 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse c_3 .
Soit $C_3(c_3, f(c_3)) \in \mathcal{C}$.
...
En poursuivant ainsi la construction on définit une suite $(c_n)_{n \geq 1}$.
 - (a) Faire un dessin pour illustrer cette méthode
 - (b) Ecrire l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse c_n .
 - (c) Montrer que $c_1 = \frac{6}{5}$, puis prouver que $\forall n \geq 1, c_{n+1} = \frac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5}$
2.
 - (a) En étudiant la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{5}(x^3 - 5x^2 + 7x + 3)$, montrer que $I = [1,2]$ est un intervalle stable par g .
 - (b) Justifier avec soin que tous les termes de la suite (c_n) sont dans l'intervalle $[1,2]$
 - (c) Après avoir rappelé l'inégalité des accroissements finis,
justifier que pour tout $n \geq 1$ on a $|g(c_n) - g(x_0)| \leq \frac{4}{15} \cdot |c_n - x_0|$
 - (d) En déduire que $\forall n \geq 1, |c_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} |c_1 - x_0|$
3. Prouver que (c_n) converge vers x_0 , et donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-7} près en expliquant comment vous procédez
4. La série de terme général c_n est-elle convergente?
5. Existe-t-il un réel α tel que la série de terme général $c_n - \alpha$ soit convergente? Justifier

Méthode des sécantes parallèles

préambule

- On va bien sûr utiliser le **théorème de la bijection**:

Pour cela, on étudie la fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 2x + 3$ sur l'intervalle $I =]1, 2[$

- La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc C^∞ sur I

$$\forall x \in I, f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

On trouve comme racines

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{19}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{19}}{3}$$

- On remarque que

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{19}}{3} < \frac{5 - \sqrt{16}}{3} = \frac{1}{3}$$

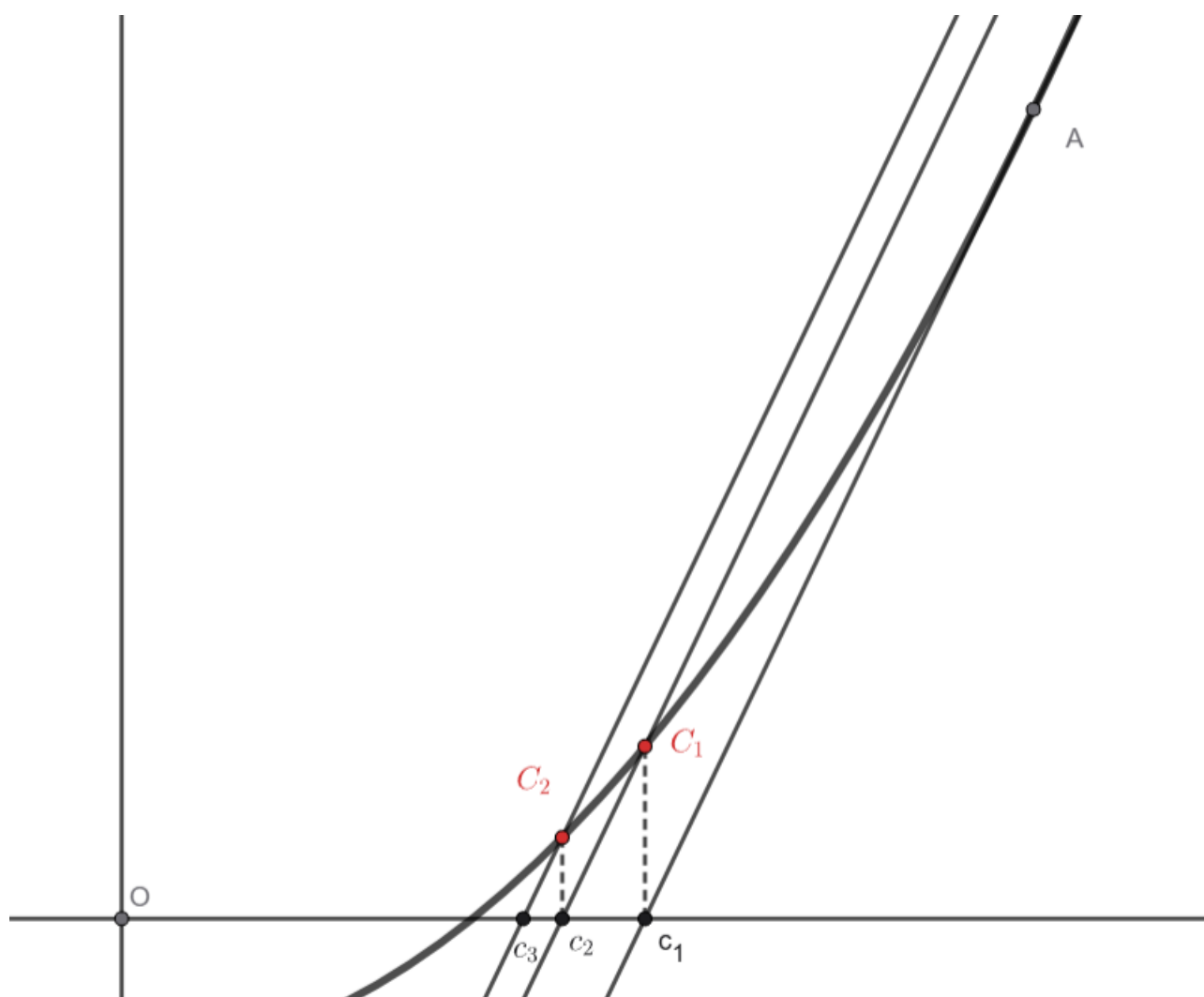
$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{19}}{3} > \frac{5 + \sqrt{16}}{3} = 3$$

x	$-\infty$	x_1	1	2	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

On a ainsi $f'(x) < 0$ sur $I =]1, 2[$

- f est **continue** et **strictement décroissante** sur I donc, d'après le **théorème de la bijection**, f réalise une bijection de $I =]1, 2[$ sur $]f(2), f(1)[=]-5, 1[$.

Comme $0 \in]-5, 1[$ on peut affirmer $\exists ! x_0 \in]1, 2[, f(x_0) = 0$



1. (a)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

La droite tangente à l'arc $\mathcal{C}_f$ au point $C_n(c_n, f(c_n))$ a pour équation

$$y = f'(c_n)(x - c_n) + f(c_n)$$

après calcul cela donne

$$y = (3c_n^2 - 10c_n + 2)x - 2c_n^3 + 5c_n^2 + 3$$

rem: cette question était piégieuse car elle n'était pas utilisée dans la suite!

(c) • La droite tangente à l'arc $\mathcal{C}_f$ au point $A(1,1)$ a pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

après calcul cela donne

$$y = -5x + 6$$

• L'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(6/5, 0)$, on a donc $\boxed{c_1 = 6/5}$

• Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

Déterminons l'équation de la parallèle à cette tangente au point $C_n(c_n, f(c_n))$.

Son coefficient directeur étant -5 , son vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et donc l'équation de la droite est

$$\left| \begin{array}{cc} x - c_n & 1 \\ y - f(c_n) & -5 \end{array} \right| = 0 \quad \text{soit} \quad y = -5(x - c_n) + f(c_n)$$

Après calculs on trouve

$$y = -5x + c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3$$

• L'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est donnée par le système

$$\begin{cases} y = -5x + c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ceci prouve que $\boxed{c_{n+1} = \frac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5}}$

2. (a) • *rem: ici, je vais étudier les variations de g' pour trouver son signe, et ainsi en profiter pour m'avancer pour la question 2(c). On pouvait aussi procéder différemment comme suit. Pour étudier le signe de $g'(x)$ on peut aussi utiliser le discriminant ou remarquer que 1 était racine évidente*

$$g'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x - 1)(3x - 7) = 3(x - 1)(x - 7/3)$$

et ainsi on sait que $\forall x \in]1, 7/3[, g'(x) < 0$ (signe d'un trinôme à l'extérieur des racines)

Comme $[1, 2] \subset [1, 7/3]$, on a donc en particulier $g' < 0$ sur $]1, 2]$ et $g'(1) = 0$

• La fonction g est une fonction polynomiale, c'est donc une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 - 10x + 7) \text{ et } g''(x) = \frac{6}{5}(x - \frac{5}{3})$$

• Sur l'intervalle $[1, 2]$, g'' est négative sur $[1, 5/3]$ et positive sur $[5/3, 2]$.

La fonction g' est donc décroissante sur $[1, 5/3]$ et croissante sur $[5/3, 2]$: la fonction g' possède donc un minimum en $5/3$ (le calcul donne $g'(5/3) = -4/15$ cela sera utile dans la suite).

x	1	5/3	2
$g''(x)$		− 0 +	
g'	0	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{5}$

Comme $g' < 0$ sur $[1,2]$, on peut en déduire que $g([1,2]) = [g(2), g(1)] = [1, 6/5] \subset [1,2]$.

Conclusion : $[1,2]$ est un intervalle stable par g

- (b) Comme $c_1 \in [1,2]$ et que $[1,2]$ est un intervalle stable par g , on peut affirmer que $\forall n \geq 1, c_n \in [1,2]$.
(résultat de cours)

rem: Cependant, comme l'énoncé demande "avec soin", il s'agissait de refaire la démonstration par récurrence réalisée dans le cours en l'adaptant avec la fonction g et l'intervalle $I = [1,2]$

- (c) • On commence par rappeler, comme demandé, l'inégalité des accroissements finis.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $\exists M > 0, \forall x \in I, |f'(x)| \leq M$ alors $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$

- D'après le tableau ci-dessus, on a

$$\forall x \in [1,2], -4/15 \leq g'(x) \leq 0$$

et donc

$$\forall x \in [1,2], |g'(x)| \leq 4/15$$

- Appliquons l'inégalité des accroissements finis:

on peut affirmer que

$$\forall (x,y) \in [1,2]^2, |g(x) - g(y)| \leq \frac{4}{15} |x - y|$$

Soit $n \geq 1$.

Pour $x = c_n \in [1,2]$ et $y = x_0 \in [1,2]$, cela donne

$$|g(c_n) - g(x_0)| \leq \frac{4}{15} \cdot |c_n - x_0|$$

- (d) On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: " $|c_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} |c_1 - x_0|$ " pour $n \geq 1$

- **initialisation**

– $\mathcal{P}_1$ est trivialement vraie car $\left(\frac{4}{15}\right)^0 = 1$

- **hérédité**

On suppose la propriété vraie pour un $n \geq 1$ fixé quelconque.

C'est à dire que l'on a

$$|c_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} |c_1 - x_0|$$

Or on a montré à la question que pour $n \geq 1$, on a

$$|g(c_n) - g(x_0)| \leq \left(\frac{4}{15}\right) \cdot |c_n - x_0|$$

or

$$g(c_n) = c_{n+1} \quad \text{et} \quad g(x_0) = \frac{x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 3 + 5x_0}{5} = \frac{0 + 5x_0}{5} = x_0$$

ainsi l'inégalité devient

$$|c_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right) \cdot |c_n - x_0|$$

En combinant avec l'hypothèse de récurrence, on obtient bien ce qu'il faut

$$|c_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right) \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} \cdot |c_1 - x_0| = \left(\frac{4}{15}\right)^n \cdot |c_1 - x_0|$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

- conclusion: par récurrence on a montré que $\forall n \geq 1, |c_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right)^n |c_1 - x_0|$

3. • Comme $|4/15| < 1$, on peut affirmer que $\lim(4/15)^n = 0$.

L'inégalité précédente donne alors $\boxed{\lim c_n = x_0}$

- On commence par remarquer que $|c_1 - x_0| \leq 1$ car $x_0 \in [1,2]$ et $c_1 \in [1,2]$, on a donc

$$\forall n \geq 1, |c_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1}$$

- L'inégalité précédente signifie que c_n est une valeur approchée de x_0 avec une précision inférieure ou égale à $\left(\frac{4}{15}\right)^{n-1}$.

Ainsi, si l'on veut être sûrs que c_n soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-7} près, il suffit de choisir n tel que $\left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} \leq 10^{-7}$

- On résout cette inégalité, en composant déjà par $\ln$ qui est croissant

$$(n-1) \cdot \ln \frac{4}{15} \leq -7 \ln 10$$

puis en divisant par $\ln(4/15) < 0$, cela donne

$$n \geq -\frac{7 \ln 10}{\ln(4/15)} + 1 \simeq 13,2$$

Ainsi, le premier terme de la suite c_n pour lequel on est sûrs d'obtenir une valeur approchée à 10^{-7} près de x_0 est c_{14}

4. Comme $\lim c_n = x_0 \neq 0$ la série de terme général est grossièrement divergente

5. On a vu que

$$\forall n \geq 0, 0 \leq |c_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} |c_1 - x_0| = v_n$$

Comme la série de terme général v_n est une série géométrique de raison $q = \frac{4}{15}$ avec $|q| < 1$, on sait que $\sum v_n$ converge et donc par comparaison $\sum |c_n - x_0|$ converge.

On vient de montrer que la série $\sum c_n - x_0$ est ACV.

Il existe bien un réel qui répond à la question, c'est $\alpha = x_0$!