

Question 1

Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$f : t \longmapsto M(t) = (1 + t^3 - t^2, t^2).$$

1.a. Justifier que $M(1)$ est un point régulier de $\mathcal{C}$ et donner une représentation paramétrique de la tangente en $M(1)$.

On dérive f :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad f'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M(1)$ est un point régulier. De plus,

$$M(1) = (1, 1).$$

Une représentation paramétrique de la tangente en $M(1)$ est donc

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

1.b. Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(0)$.

On a

$$M(0) = (1, 0), \quad f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f''(t) = \begin{pmatrix} 6t - 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$f''(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tangente en $M(0)$ a pour vecteur directeur $(-1, 1)$. Une équation cartésienne est

$$\begin{vmatrix} x - 1 & -1 \\ y - 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x + y - 1 = 0.}$$

Question 2

Écrire l'équation cartésienne de la droite qui passe par le point $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (1, 3)$.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad 3(x - 1) - (y - 2) = 0,$$

d'où

$$\boxed{3x - y - 1 = 0.}$$

Question 3

Donner un vecteur directeur de la droite d'équation

$$2x + 4y + 4 = 0.$$

Un vecteur normal est $(2, 4)$. On peut donc choisir comme vecteur directeur

$$\boxed{\vec{d} = (-4, 2)} \quad \text{ou plus simplement} \quad \boxed{\vec{d} = (-2, 1).}$$

Question 4

Définition d'un point régulier.

Soit Γ une courbe d'équation cartésienne $F(x,y) = 0$. On dit que le point M_0 est un point régulier de Γ lorsque

$$\nabla F(M_0) \neq \vec{0},$$

c'est-à-dire lorsque le gradient de F en M_0 n'est pas nul.

Question 5

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{k} = 1, \quad k > 0.$$

5.a. Donner la nature de $\mathcal{C}$.

$$\begin{cases} \mathcal{C} \text{ est une ellipse si } k \neq 4, \\ \mathcal{C} \text{ est un cercle si } k = 4. \end{cases}$$

5.b. Donner une paramétrisation de $\mathcal{C}$.

Une paramétrisation est

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cos t, \\ y = -2 + \sqrt{k} \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{ou} \quad [-\pi, \pi].$$

5.c. Donner les sommets de cette courbe.

Les quatre sommets sont

$$(3, -2), \quad (-1, -2), \quad (1, -2 + \sqrt{k}), \quad (1, -2 - \sqrt{k}).$$