

INTERROGATION N° 1

1. Formules de trigonométrie

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

2. Développements limités

- $DL_2(0)$ de $(1 + x)^\alpha$:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

- $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1 + x}$:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

- $DL_4(0)$ de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

3. Primitives des fonctions usuelles

intervalle	$f(x)$	primitive de $f(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\arctan x + C$
$] - 1, + 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x + C$

4. Définition de la fonction arctan

La fonction arctan est la fonction **réciroque** de la **restriction** de la fonction tan à l'intervalle

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

5. Somme géométrique

- Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1, \\ n + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

6. **Citer l'énoncé complet du théorème relatif aux sommes de Riemann**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

7. **Calcul du $DL_3(3)$ de $\ln(x)$**

On pose

$$x = 3 + h, \quad h \longrightarrow 0.$$

Alors

$$\ln x = \ln(3 + h) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right).$$

Or

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Avec $u = \frac{h}{3}$, on obtient

$$\ln(3 + h) = \ln 3 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + \frac{h^3}{81} + o(h^3).$$

Donc

$$\ln x = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81} + o((x-3)^3) \quad (x \rightarrow 3).$$

8. Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$f_1 : t \mapsto \cos(3t) \quad f_2 : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 4} \quad f_3 : t \mapsto \frac{t}{t^2 + 4}$$

$$F_1(t) = \frac{1}{3} \sin(3t) + C$$

$$F_2(t) = \int^t \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \int^t \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \int^{t/2} \frac{du}{(u)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C.$$

(on a posé le changement de variable C^1 $u = x/2$ et donc $du = dx/2$)

$$F_2(t) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$F_3(t) = \int^t \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int^t \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 4) + C.$$

$$F_3(t) = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 4) + C.$$

9. Justifier que la fonction $g : x \mapsto \int_{2x}^{3x} \cos(e^t) dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée

La fonction $f : t \mapsto \cos(e^t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc possède des primitives sur $\mathbb{R}$, Notons F l'une d'elles.

D'après le théorème du calcul intégral

$$g(x) = F(3x) - F(2x).$$

Ainsi g est la différence de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$, donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$

Par dérivation,

$$g'(x) = 3F'(3x) - 2F'(2x) = 3.f(3x) - 2f(2x) = 3\cos(e^{3x}) - 2\cos(e^{2x})$$

10. **FACULTATIF: Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral (et les hypothèses!)**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$