

1 Géométrie plane

GEO 1 (Banque PT 2026 B)

Dans les trois premières parties de cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Dans la dernière partie de l'exercice, indépendante des trois premières, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Partie A

- Soient a et b deux réels strictement positifs.

- Donner la nature et le paramétrage usuel de la conique d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Donner la nature et le paramétrage usuel de chaque branche de la conique d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Soit F un point, D une droite ne contenant pas F et ε un réel strictement positif.

- Donner la définition de la conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité ε .
- Quelle est la nature de cette conique?

- Soient M et M' deux points d'affixes complexes respectives z et z' et θ un nombre réel tels que

$$z' = e^{i\theta} z.$$

Quelle transformation permet de passer de M à M' ?

Partie B

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z vérifiant

$$|z| = \left| z + ze^{i\frac{\pi}{3}} - 3 - 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right|.$$

- Soit D la droite d'équation

$$\sqrt{3}x + y = 3.$$

Pour tout point M , on note M' son projeté orthogonal sur D .

- Déterminer l'expression des coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M .
- En déduire que si z est l'affixe complexe de M et z' celle de M' , alors

$$z' = \frac{1}{2} \left(z - ze^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right).$$

- Exprimer $z - z'$ en fonction de z et $\bar{z}$.
- En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique dont on précisera la nature, un foyer, une directrice et l'excentricité.

Partie C

Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à D dont l'abscisse est positive.

- Déterminer l'angle

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{u}).$$

- On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points N d'affixes complexes Z tels que le point M d'affixe complexe

$$z = e^{i\alpha} Z$$

appartienne à $\mathcal{C}$, où α est l'angle déterminé à la question 7.

- Démontrer que

$$N \in \mathcal{C}' \iff |Z| = |Z + \bar{Z} - 3|.$$

- En déduire qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}'$ est

$$3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0.$$

- Donner les éléments caractéristiques de la conique $\mathcal{C}'$, à savoir :

- les coordonnées (s'il y a lieu) du centre, des sommets ;
- une équation (s'il y a lieu) des asymptotes.

On rappelle que les sommets d'une conique sont les points d'intersection de la conique avec ses axes de symétrie.

- Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}'$ au point G de coordonnées $(0, 3)$.

- (a) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 8.(c). Unité : 1 cm (minimum).

On utilisera la feuille de papier millimétré fournie.

- Quelle transformation permet d'obtenir la courbe $\mathcal{C}$ à partir de la courbe $\mathcal{C}'$? Le tracé de $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.

GEO 2 (Banque PT 2025 B, extrait)

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$2xy\sqrt{3} - 2y^2 = 3$$

- Écrire la matrice Q associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$.
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q .
- Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$ ainsi qu'un repère orthonormé **direct** R' dans lequel cette équation est obtenue.
- Donner la nature de $\mathcal{C}$.
- Déterminer les principaux éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles).
Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère R' puis dans le repère $\mathcal{R}$.
- Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.
On mettra en évidence le repère R' ainsi que les éléments déterminés dans la question 5.
Unité : 2cm.

GEO 3 (Banque PT 2019 B, extrait)

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'équation cartésienne

$$(t^2 - 1)x - 2ty = 2t(t - 1).$$

1. **Question préliminaire.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. On considère alors la droite D d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ainsi que le point M_0 de coordonnées $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal H_0 de M_0 sur la droite D sont :

$$\left(x_0 - a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right).$$

(b) En déduire la distance $d(M_0, D)$ du point M_0 à la droite D .

2. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des droites D_{-1} , D_0 et D_1 .
(b) En déduire qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites D_t , $t \in \mathbb{R}$.
3. (a) Soit t un réel fixé. Donner un point, un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la droite D_t .
(b) Démontrer qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est :

$$\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. On considère maintenant la courbe Γ' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos(\theta) \\ y = 1 + \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

On note $M(\theta)$ le point de Γ' de paramètre θ , $(\vec{T}(\theta), \vec{N}(\theta))$ la base de Frénet et $\gamma(\theta)$ la courbure de Γ' au point $M(\theta)$. Enfin, s désigne l'abscisse curviligne de Γ' qui s'annule en 0.

- (a) Reconnaître la courbe Γ' . On sera le plus précis possible.
(b) Démontrer que $\Gamma \subset \Gamma'$. Sont-elles égales?
(c) Les deux courbes sont-elles parcourues dans le même sens?

5. *Des questions de cours... pour préparer la suite*

- (a) Donner les deux définitions (ou caractérisations) de la développée d'une courbe régulière.
(b) Donner la définition (pas la méthode de calcul) de l'enveloppe d'une famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$.
(c) Donner les deux formules de Frénet.

6. On considère un réel k et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on note $P_k(\theta)$ le point défini par

$$\overrightarrow{M(\theta)P_k(\theta)} = (k - s(\theta))\vec{T}(\theta)$$

et Λ_k l'ensemble des points $P_k(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

- (a) Calculer les vecteurs $\vec{T}(\theta)$ et $\vec{N}(\theta)$, ainsi que $s(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Quelle est l'origine du repère de Frénet?

(b) Déterminer une représentation paramétrique de Λ_k .

(c) Déterminer les points non réguliers de Λ_k . Où sont-ils situés?

(d) Déterminer la développée de Λ_k éventuellement privée de ses points non réguliers.

7. Dans la suite de cette partie, nous allons vérifier que toute courbe Λ dont la développée est incluse dans Γ' est une courbe Λ_k .

Soit $\theta \mapsto P(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ un paramétrage de Λ . On suppose que ce paramétrage est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et que la courbe Λ est birégulière.

On note $(\vec{T}_P(\theta), \vec{N}_P(\theta))$, $s_P(\theta)$ et $\gamma_P(\theta)$ la base de Frénet, une abscisse curviligne et la courbure de Λ au point $P(\theta)$. Enfin, on considère que $M(\theta)$ est le centre de courbure de Λ au point $P(\theta)$.

(a) Sur la copie, faire une figure illustrant la situation : placer les points $M(\theta)$, $P(\theta)$, les vecteurs $\vec{T}(\theta)$, $\vec{N}(\theta)$, $\vec{T}_P(\theta)$, $\vec{N}_P(\theta)$ ainsi qu'une allure possible pour les courbes Γ' et Λ au voisinage des points $M(\theta)$ et $P(\theta)$.

(b) Justifier qu'il existe une fonction λ , dont on admettra qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ telle que :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta)\vec{T}(\theta).$$

(c) En déduire que :

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta}\vec{T} + \lambda\frac{d\vec{T}}{d\theta}$$

puis que :

$$\frac{ds_P}{d\theta}\vec{T}_P = \frac{ds}{d\theta}\vec{T} + \frac{d\lambda}{d\theta}\vec{T} + \lambda\gamma\frac{ds}{d\theta}\vec{N}.$$

(d) Justifier que :

$$\frac{ds}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} = 0$$

et en déduire λ .

(e) Conclure.

Sauf précision, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans tous les exos

courbe définie par équation cartésienne Résolu: 166, 167

GEO 4

Montrer que la ligne de niveau de $f : (x, y) \mapsto 2x^2y + 2x^2 + y^2$ passant par $A(1, 1)$ admet une tangente en ce point. En donner une équation.

GEO 5

On considère la courbe Γ d'équation cartésienne $2x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0$

1. Montrer que Γ est une courbe régulière et donner l'équation cartésienne de la tangente à Γ en $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$.
2. Combien y-a-t-il de tangentes à Γ qui passent par O ? par $A(1, 1)$?

GEO 6

Soit $k \in \mathbb{R}$.

On considère la courbe Γ_k d'équation cartésienne $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x = k$

1. Déterminer les points singuliers de Γ_k
2. Ecrire l'équation cartésienne de la tangente au point $A = (0, 2)$ à Γ_8
3. Déterminer les points de Γ_k en lesquels la tangente est horizontale

GEO 7

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction
$$\begin{array}{ccc} f_\lambda : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x^3 - 3x^2 \end{array}.$$

On note $\mathcal{C}_\lambda$ la représentation graphique de f_λ .

1. Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_\lambda$
2. Déterminer les points du plan par lesquels ne passe qu'une courbe $\mathcal{C}_\lambda$.
3. Montrer que les fonctions f_λ vérifient toutes une même équation différentielle linéaire du premier ordre.
4. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse x_0 .
On note T_{λ, x_0} cette droite
5. Que dire des droites T_{λ, x_0} lorsque $x_0 = 0$?
6. On se place dans le cas où $x_0 \neq 0$
 - (a) Justifier que les droites T_{λ, x_0} sont toutes concourantes en un même point P_{x_0} dont on donnera les coordonnées
 - (b) Quelle courbe est décrite par P_{x_0} lorsque x_0 décrit $\mathbb{R}^*$?
7. Etude du cas particulier $x_0 = 1$
 - (a) Montrer que les tangentes $T_{\lambda, 1}$ et $T_{\lambda+1, 1}$ sont perpendiculaires ssi $9\lambda_1 \cdot \lambda - 18(\lambda_1 + \lambda) + 37 = 0$
 - (b) En déduire que les droites $T_{\lambda, 1}$, sauf une, sont deux à deux perpendiculaires.

GEO 8

On note $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2$ et Γ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$

1. Déterminer les points réguliers de Γ
2. Représenter Γ

GEO 9

On considère:

- le point $A(1, 0)$
- la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 + x = 1$
- l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$
- Pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = m(1 - x)$

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}_m$ coupe la parabole en un point $M_n \neq A$
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}_m$ coupe l'ellipse en un point $N_n \neq A$
3. Déterminer une équation de la tangente en M_m à la parabole $\mathcal{P}$ et une équation de la tangente en N_m à l'ellipse $\mathcal{E}$
4. Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux tangentes lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$

utilisation des nombres complexes *Résolu: 164*

GEO 10

On considère M_1, M_2 et M_3 des points d'affixe z_1, z_2 et z_3 tels que $(i - 1) \cdot z_1 + z_2 - iz_3 = 0$.

Démontrer que $M_1 M_2 M_3$ est un triangle isocèle rectangle en M_1

GEO 11

Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre $A(1, 2)$ et d'angle θ

GEO 12 (droite d'Euler)

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives a, b, c .

On suppose que ABC est un triangle NON aplati et que le centre de son cercle circonscrit est l'origine O du repère.

1. Comment se traduit sur a, b, c la condition "le centre de son cercle circonscrit est l'origine O du repère"?
2. Concurrence des hauteurs.
On note H le point d'affixe $a + b + c$
 - (a) Montrer que les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires
 - (b) En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H
3. Concurrence des médianes.
On note G le barycentre des points A, B, C .
On note I, J, K les milieux respectifs des segments $[AB], [AC]$ et $[BC]$
 - (a) Donner l'affixe des points G, I, J, K
 - (b) Montrer que les points C, G, I sont alignés. Que vient-ton de montrer?
 - (c) En déduire que les médianes du triangles ABC sont concourantes en G
4. Concurrence des médiatrices.
Justifier que les médiatrices sont concourantes au point O
5. Montrer que O, G, H sont alignés.
(cette droite est appelée la "droite d'Euler")

GEO 13

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c .

On note $j = \exp(2i\pi/3)$

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ (on pourra considérer une rotation de centre A et d'angle $\pi/3$)
2. En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

GEO 14

Soit a un complexe de module un.

1. Montrer que $(z = -\bar{a} \text{ ou } z^3 = a) \iff (z \cdot \bar{z} = 1 \text{ et } z^2 - \bar{z}^2 = a \cdot \bar{z} - \bar{a} \cdot z)$
2. En déduire que les racines cubiques de a se déduisent graphiquement par l'intersection d'un cercle (dont on précisera le centre et le rayon) et d'une hyperbole (dont on précisera le centre et les asymptotes).
Application avec $a = e^{i\pi/4}$

droites, cercles du plan *Résolu: 150-161*

GEO 15 (démonstration du cours)

Soit (D) la droite d'équation cartésienne $ux + vy + w = 0$

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.

Montrer que $d(M_0, (D)) = \frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

GEO 16 (démo de cours)

Soit (D) la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan

Montrer que $d(M_0, (D)) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$

GEO 17 (démo de cours)

Soit (D) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan

Déterminer $d(M_0, (D))$ en fonction de A, M_0 et $\vec{d}$

GEO 18

Soient:

- les points $A(1,2), B(3,1)$ et $C(-1,1)$
- la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 2$

Donner les équations paramétriques et cartésiennes des droites suivantes

1. droite (AB)
2. droite parallèle à (AB) passant par C
3. droite perpendiculaire à (AB) passant par C
4. droite passant par A et de coefficient directeur -2
5. droite normale à $\mathcal{C}_f$ au point B
6. droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B

GEO 19

Soit C la courbe d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$

1. Montrer que C est un cercle. En donner le centre, le rayon et un paramétrage.
2. Déterminer les équations cartésiennes des tangents à C parallèles à D d'équation $2x + y - 7 = 0$
3. Déterminer les équations cartésiennes des tangents à C passant par $A(-1,5)$

GEO 20

On considère les droites $D_1 \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$ et $D_2 \begin{cases} x = 5 + 6t \\ t = -2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Justifier que $D_1 = D_2$

GEO 21

Soit D la droite d'équation $3x - 2y - 2 = 0$

Soit D_1 la droite passant par les points $A(1,4)$ et $B(-2,3)$

Soit D_2 la droite passant par $C(6,2)$ et de coefficient directeur α

1. Donner une équation cartésienne de D_1
2. Donner un vecteur directeur de D_2 puis une équation cartésienne de D_2
3. Donner la valeur de α pour laquelle D_2 et D sont parallèles.
4. Donner la valeur de α pour laquelle D_2 et D sont perpendiculaires.
5. Donner une cns sur α pour que ces trois droites soient concourantes

GEO 22

On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle, et D la droite d'équation $y = 2x + 3$.

Soit $M_0(x_0, y_0) \in C$.

1. Déterminer la droite normale à C en M_0
2. Déterminer le point d'intersection entre la droite précédente et la droite D

GEO 23

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et les points $A(\lambda, 0)$ et $B(0, 2 - \lambda)$.

On note C le point tel que $OACB$ soit un rectangle. On note D_λ la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C .

Montrer que la droite D_λ passe par un point fixe à déterminer lorsque λ varie.

GEO 24

Soient

- k un réel
- (D) la droite d'équation cartésienne $2x + k.y + 1 = 0$
- (Δ) la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1. Les droites (D) et (Δ) sont-elles parallèles?
2. Les droites (D) et (Δ) sont-elles perpendiculaires?
3. Lorsque (D) et (Δ) sont sécantes, quel angle forme ces droites?

GEO 25

Déterminer l'intersection des droites $D_1 \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$ et $D_2 \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

GEO 26

Soit λ un réel. On considère la droite $(D_\lambda) : (\lambda^2 - 1)x + \lambda y - 2\lambda^2 + 2 + \lambda = 0$.

1. Montrer que toutes ces droites passent par un même point, dont on déterminera les coordonnées
2. Montrer qu'il existe deux droites (D_{λ_1}) et (D_{λ_2}) passant par O. Quel angle forme ces deux droites?

GEO 27

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère

- $\mathcal{C}_\lambda$ le cercle de centre $(\lambda, 0)$ tangent en O à l'axe (Oy)
- Γ_λ le cercle de centre (λ, λ) tangent à l'axe (Ox)

Déterminer le lieu des points d'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ et Γ_λ lorsque λ varie

GEO 28

Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les trois points suivants

$A(1,1)$, $B(3, -1)$ et $C(-1, -2)$.

GEO 29

On considère le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma^2 = 0$, et la droite (Δ) d'équation $ux + vy + w = 0$.

Montrer que :

$$(\Delta) \text{ est tangente au cercle } \iff (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(u^2 + v^2) = (u\alpha + v\beta + w)^2$$

GEO 30

Soit $(D_1) : ux + vy + w_1 = 0$ et $(D_2) : ux + vy + w_2 = 0$ deux droites parallèles.

Déterminer la distance entre ces deux droites

GEO 31

Soit C le cercle de centre $\Omega(2,3)$ et de rayon 2.

Déterminer, par équation cartésienne, les droites tangentes à C passant par $A(6, -2)$

GEO 32

Soit $(ABCD)$ un carré. On construit $P \in (AB)$ et $Q \in (BC)$ tels que $BP = BQ$.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (PC) . Montrer que (QH) et (HD) sont perpendiculaires.

(indic. On pourra se placer dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et noter $\lambda = BP \dots$)

GEO 33

Soit a un réel.

On considère les points $A(1,0), B(1,1), C(0,1), P(0,a), Q(-a,a), R(-a,0)$.

On note M le point d'intersection des droites (AP) et (BQ)

1. Faire une figure
2. Donner les équations cartésiennes des droites (AP) et (BQ) , puis les coordonnées du point M
3. Montrer que M, C et R sont alignés.

GEO 34

On considère les points $B(0,1), C(1,1), D(1,0)$ et $\Omega = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Une droite Δ passant par O et de coefficient directeur $\alpha \neq 0$ coupe (BC) et (CD) en E et F respectivement. On note I le milieu de $[BE]$, et M l'intersection de (DE) et (FI)

1. Faire une figure
2. Donner centre et rayon du cercle inscrit dans le carré $ODCB$, puis du cercle circonscrit à ce même carré.
3. Montrer que la droite (FI) est tangente au cercle inscrit précédent.
4. Montrer que M est sur le cercle circonscrit précédent

GEO 35

Soient A, B, C trois points non alignés et Δ une droite. On désigne par A', B', C' les projetés orthogonaux de ces points sur Δ . Montrer que les perpendiculaires à $(BC), (AC)$ et (AB) issues de A', B' et C' respectivement sont concourantes.

(indic. On se placera dans un repère orthonormé d'origine A' et d'axe des abscisses $\Delta \dots$)

GEO 36

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1,0), B(0,1)$ et $C(0,2)$.

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la droite $(D) : y = mx$ et $(D') : y = -mx$.

Ainsi que, lorsqu'ils existent, $M \in (D) \cap (AB)$ et $M' \in (D') \cap (AC)$

Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe (càd indep. de m)

GEO 37

Soient (C_1) et (C_2) deux cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 = 100$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$
Montrer que ces deux cercles sont tangents et donner une équation de la tangente commune au point commun.

GEO 38

Former l'équation du cercle qui passe par les points $A(0, -2)$ et $B(4,0)$ et a son centre appartenant à la droite (D) d'équation $x + 2y = 0$

Réduction de l'intervalle d'étude**GEO 39**

On considère l'arc paramétré $f : t \mapsto (t + \sin(t), \cos(t))$

Comparer pour tout t réel $f(t + 2\pi)$ et $f(t)$.

Qu'en déduit-on sur la réduction de l'intervalle d'étude?

GEO 40

Réduction de l'intervalle de l'étude des arcs paramétrés suivants

$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^4 t, \sin^4 t) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(3t), \sin(4t)) \end{array}$
--	--	--

GEO 41

On considère la courbe paramétrée $(\mathbb{R}, f)$ avec

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2t^2 - 2t + 1, (3t^2 - 3t + 1)^2) \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout t réel on a $x(t) = x(2a - t)$.
2. Calculer $y(2a - t)$, et en déduire l'intervalle d'étude de f ainsi qu'une transformation géométrique laissant globalement invariante la courbe.

GEO 42

On considère la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (t \ln t, \frac{\ln t}{t})$ avec $t \in I =]0, +\infty[$.

1. Déterminer $M(1/t)$
2. En déduire une symétrie qui laisse invariante la courbe, et la réduction de l'intervalle d'étude.

Etude à la limite de l'ensemble de définition**GEO 43**

1. Montrer que $\frac{1}{\sin h} =_0 \frac{1}{h} + \frac{h}{6} + \frac{7h^3}{360} + o(h^3)$

2. Etudier l'asymptote en $t = \pi/2$ et la position relative pour la courbe $\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{\cos t} \\ y(t) &= \frac{1}{\sin(2t)} \end{cases}$

GEO 44

On considère l'arc paramétré (I, f) et

$$\begin{array}{ccc} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t+1}{t^2}, \frac{t^2+1}{(t+1)^2} \right) \end{array}$$

On souhaite étudier la courbe lorsque $t \rightarrow +\infty$

1. Montrer que la courbe admet un point limite.
2. Etudier la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

GEO 45

étude du point limite de la courbe paramétrée

$$\begin{array}{ccc} f :]-\infty, 0[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{e^t}{t}, t.e^t \right) \end{array}$$

GEO 46

Etude des éventuelles asymptotes (+position si courage) dans les cas suivants

1. en $+\infty$ avec $f : t \mapsto \left(\frac{t^3 + t + 2 \cos(1/t)}{t^2}, \sin \frac{1}{t} \right)$
2. en 0^+ avec $f : t \mapsto \left(t \cdot \sin \frac{1}{t}, \ln t \right)$
3. en $\pi/2$ avec $f : t \mapsto \left(\frac{1}{\cos(3t)}, \frac{1}{\sin(2t)} \right)$

GEO 47

Etude aux bornes de l'ensemble de définition de la courbe paramétrée $t \mapsto (\frac{t}{t^2-1}, \frac{t^2}{t-1})$.

On pourra aussi étudier la position de la courbe par rapport aux droites asymptotes éventuelles.

Etude de points particuliers, de tangente,...
GEO 48 (un détour par les équations du type $y = f(x)$)

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$.

Dans chacun des cas suivants, donner une allure de la courbe au voisinage du point considéré

1. $y = -1 + o_1(1)$
2. $y = -1 + 3.(x-1) + o_1(x-1)$
3. $y = -1 + 3.(x-1) + (x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$
4. $y = -1 + 3.(x-1) + 2.(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$

GEO 49

Dessiner la courbe au voisinage du point $M(0)$ dans les cas suivants

1. $M(t) = (1 + t^2 + t^3, t^2 \cdot \sin(t))$
2. $M(t) = (1 + t + 2t^2 + o(t^3), -1 + t + 2t^2 + t^3 + o(t^3))$ (DL au voisinage de 0)

GEO 50

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On considère l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= 4 + a + (4 + 2a)t + (a + 3)t^2 + t^3 \\ y(t) &= 6 + 7t + t^2 - t^3 \end{cases}$.

Dessiner la courbe au voisinage du point $M(-1)$

GEO 51

α et β étant deux réels fixés, étudier au voisinage de $t = 0$ l'arc paramétré

$$t \mapsto (\alpha \cos t - t^3, \beta \sin t - \frac{t}{6} + t^2)$$

GEO 52

On considère la courbe paramétrée $(\mathbb{R}, f)$ avec

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^2, |t^4 - t^2|) \end{array}$$

On souhaite étudier la courbe au voisinage du point $M(t=1)$

1. Montrer l'existence d'une demi-tangente à droite au point $M(1)$.
Donner son équation, et étudier, localement, la position de la courbe par rapport à cette demi-tangente.
2. Même question à gauche.
3. Faire un dessin qui représente la courbe au voisinage du point $M(1)$

GEO 53

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2.

On considère les points $A(-1,0)$, $A'(1,0)$ et $M \in \mathcal{C}$.

1. Déterminer les coordonnées du point H , orthocentre du triangle AMA'
2. Étudier la courbe décrite par H lorsque M décrit $\mathcal{C}$

GEO 54

Montrer que la courbe Γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= (t+1).e^t \\ y(t) &= t^2.e^t \end{cases}$ admet un unique point singulier (et tracer

l'allure de Γ au voisinage de ce point.)

GEO 55

Etudier la courbe $t \mapsto (\cos(\pi.t), (t-1)^2)$ au voisinage du point $t = 1$

GEO 56

On considère la famille de courbes $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ avec $\begin{cases} x = & \cos^3 t + \lambda \sin t \\ y = & \sin^3 t + \lambda \cos t \end{cases}$

1. Déterminer les λ pour lesquels Γ_λ est régulier
2. Donner une représentation paramétrique de l'ensemble des points singuliers des courbes Γ_λ

GEO 57 (Etude d'une famille de courbes)

Pour tous réels a et b , on considère la courbe $(\mathcal{C}_{a,b}) : \begin{cases} x = & t^2 - at \\ y = & t^3 - bt \end{cases}$

1. Donner une CNS sur a et b pour que $(\mathcal{C}_{a,b})$ ait un point stationnaire, noté R_a .
 - (a) Quelle est la nature de ce point ?
 - (b) Déterminer le lieu $\mathcal{R}$ du point R_a lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
2. Donner une CNS sur a et b pour que $(\mathcal{C}_{a,b})$ ait un point double, noté $\Omega_{a,b}$
 - (a) Donner les coordonnées de ce point. (on trouvera $(b - a^2, a(b - a^2))$)
 - (b) Donner une CNS pour que les tangentes en $\Omega_{a,b}$ soient perpendiculaires, et donner dans ce cas les coordonnées du point double, noté Ω_a (on trouvera $\Omega_a(2a^2 + 1, a(2a^2 + 1))$)

Etude complète
GEO 58

Etudier l'arc paramétré $\gamma = ([-1,2], f)$ avec $f : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (t^3, (t-1)^2)$$

GEO 59

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et la droite D d'équation $y = -x$.

Pour un point N de D de coordonnées $(t; -t)$, on considère la droite (BN) , la droite (AN) et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN) .

Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ .

1. En fonction de t , donner une équation cartésienne de la droite (BN) .
2. En fonction de t , donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t , donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (AN) .
4. Pour quelles valeurs de t les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2 .
5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point M en résolvant un système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.
On appelle désormais G la courbe décrite par M quand N parcourt la droite D .
6. On note $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions telles que :

$$u(t) = \frac{t+1}{-t+1} = \frac{2}{-t+1} - 1 \text{ et } v(t) = \frac{-t+1}{t+1} = \frac{2}{t+1} - 1$$

- (a) Préciser les domaines de définition de u et v .
- (b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle où elles sont définies.

- (c) Donner un tableau de variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.
(On ne demande pas de représentation de u et v .)
7. (a) Le point A appartient-il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée?
(b) Le point B appartient-il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée?
8. (a) Calculer $u(t)v(t)$. Que remarque-t-on?
(b) On appelle H la courbe d'équation cartésienne $y = \frac{1}{x}$.
Peut-on déduire de ce qui précède que G est la courbe H dont on a retiré un ou plusieurs points? Quel(s) point(s) retirer à H pour obtenir G ?

GEO 60

Un cercle est paramétré par les équations $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ avec t in réel.

- On note $T(t)$ la tangente au cercle au point $M(t) = (x(t), y(t))$
 - Déterminer un vecteur directeur de $T(t)$
 - Déterminer une équation cartésienne de $T(t)$
- (a) Soit $B(t)$ le point d'intersection de $T(t)$ avec (Ox) et $A(t)$ avec (Oy)
Déterminer les coordonnées de $A(t)$ et $B(t)$
(b) Déterminer la coordonnées de $I(t)$ milieu de $[A(t), B(t)]$
(c) Déterminer une équation cartésienne de la courbe décrite par $I(t)$
- Etudier la courbe $\Gamma : x(t) = \frac{1}{2\cos(t)}$ et $y(t) = \frac{1}{2\sin(t)}$
Tracer Γ après avoir réduit le domaine d'étude à $]0, \pi/4]$

GEO 61

Etude complète de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$.

On étudiera notamment les asymptotes et la position relative de la courbe par rapport à celles-ci.

GEO 62

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t - th(t) \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}$

- Etudier et représenter Γ
- Soit $A(t)$ le point d'intersection de la tangente à Γ en $M(t)$ et de l'axe (Ox) . Montrer que l'on a toujours $AM = 1$

GEO 63

Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0, \vec{i}, \vec{j})$. (Γ) est l'arc paramétré défini par l'application : $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$

$$t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2}(t^2 - 2t), \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right)$$

- Quelles sont les valeurs de t pour lesquels le point $M(t)$ est singulier?
- Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la tangente au point $M(t)$
- Décrire la position de (Γ) par rapport à la tangente aux points suivants :
 - au point O correspondant à la valeur $t = 0$ du paramètre.
 - au point A correspondant à la valeur $t = 1$ du paramètre.
- Représenter la courbe (Γ)

- On considère deux points de (Γ) , M de paramètre t et M_1 de paramètre t_1
 - Montrer que, pour que les tangentes à (Γ) en M et M_1 soient perpendiculaires, il faut et il suffit que $1 + t.t_1 = 0$
 - Soit P le point d'intersection de ces deux tangentes, lorsqu'elles sont perpendiculaires. Démontrer que les coordonnées $(x_P(t), y_P(t))$ du point P , en fonction de $t \in \mathbb{R}^*$ sont :

$$\begin{cases} x_P(t) = \frac{t^4 - 3t^3 - t^2 + 3t + 1}{6t^2} \\ y_P(t) = \frac{-t^2 + 3t + 1}{6t} \end{cases}$$

- (a) Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à (Γ) est une parabole (Γ_1) dont une équation est $6y^2 - 3y - x + \frac{1}{6} = 0$
(b) Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de cette parabole.

GEO 64

Soit Γ l'arc de paramétrisation $\gamma : t \mapsto (\sin^2 t, (1 + \cos t) \cdot \sin t)$ et $M(t) = \gamma(t)$

- Etudier et tracer Γ .
(On fera l'étude des points particuliers)
- On note $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(t + \pi)$, ainsi que $I = \text{Mil}[M_1, M_2]$
 - Montrer que $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux
 - Donner une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$ décrite par I
 - Montrer que $\mathcal{C}$ est incluse dans le cercle de centre $(1/2, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

GEO 65 (cardioïde)

Soit $a > 0$.

On note $\mathcal{C}$ el cercle de centre $\Omega(a, 0)$ et de rayon a .

On appelle *podaire* de $\mathcal{C}$ par rapport à O , le lieu Γ des projections orthogonales de O sur les tangentes à $\mathcal{C}$.

- Montrer que Γ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = a.(1 + \cos t) \cdot \cos t \\ y(t) = a.(1 + \cos t) \cdot \sin t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- Etudier Γ dans le cas où $a = 1$

GEO 66

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a > 0$ une constante réelle et u un paramètre décrivant $\mathbb{R}$. On considère un point variable M défini par ses coordonnées $(a \cos u, a \sin u)$ et par C le cercle décrit par le point M .

- (a) On désigne par P et Q les projections orthogonales de M sur les axes et par H le projeté orthogonal de l'origine sur la droite (PQ) . Déterminer, en fonction de u , les coordonnées du point H .
(b) La tangente en M au cercle C coupe, en général, les axes en U et V . Soit alors W le point se projetant orthogonalement en U et V sur les axes. Déterminer, en fonction de u , les coordonnées du point W . Que peut-on dire de la position relative des points O, H, W ?
- Soit R la courbe décrite par W (que l'on ne demande pas de construire). On mène par O la perpendiculaire à la tangente à R en W , cette droite coupant la droite (PQ) en I .
 - Déterminer, en fonction de u , les coordonnées du point I .
 - Montrer que les droites (PQ) et (IM) sont perpendiculaires.

GEO 67

On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) &= 2t^2 \\ y(t) &= 2t \end{cases}$

1. Donner une équation cartésienne de Γ et la tracer
2. Donner une équation cartésienne de la tangente T à Γ en son point $M(t)$
3. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de $F(1/2, 0)$ sur les tangentes à Γ
4. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de $O(0, 0)$ sur les tangentes à Γ

GEO 68

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathcal{P}$ et passant par le foyer $F(p/2, 0)$.

Soit $A(a, b)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ la normale en ce point. On note I le centre du cercle passant par F et tangent à $\mathcal{P}$ en A

1. Montrer que tout point $\mathcal{N}$ a des coordonnées de la forme $(a - \lambda p, b(1 + \lambda))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Déterminer les coordonnées de I
3. Etudier la courbe paramétrée, lieu des points I , dans le cas où $p = 1$

Représentation paramétrique et équation cartésienne
GEO 69

1. Montrer que la courbe $\Gamma : x \cdot \ln(x + y) - y = 0$ admet pour paramétrisation $\begin{cases} x(t) &= \frac{e^t}{t+1} \\ y(t) &= \frac{t \cdot e^t}{t+1} \end{cases}$ avec

$$t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

2. Montrer que $M(t = 1)$ est un point d'inflexion
3. Dresser le tableau de variations conjoint
4. Etudier les branches infinies de Γ
5. Tracer l'allure de Γ

GEO 70

On note $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = x^3 + y^3 - xy = 0\}$ et $\mathcal{C}' = \{M(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}) \mid t \in \mathbb{R} - \{-1\}\}$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$
2. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}'$
3. Montrer que $A = (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \in \mathcal{C}$ et déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ en A
4. Montrer que $A = (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \in \mathcal{C}'$ et déterminer la tangente à $\mathcal{C}'$ en A
5. Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$

GEO 71

On considère la courbe Γ de représentation paramétrique $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (3 \cos t + \sin t, \sin t)$.

Montrer que Γ a pour équation cartésienne $(x - y)^2 + 9y^2 = 9$

Changement de repère
GEO 72

Dans le repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère

- la courbe (C) de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= -1 + t - 2\sqrt{3}t^2 \\ y &= -\sqrt{3} + \sqrt{3}t + 2t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- les vecteurs $\vec{I} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{J} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

1. Donner une représentation paramétrique de (C) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$
2. On note Γ le support de (C) , et $\Gamma_1 = \{(X, Y) \mid Y = X^2 + 4X + 4\}$
 - (a) Montrer que $\Gamma = \Gamma_1$
 - (b) Tracer (C)

GEO 73

Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère Γ la courbe d'équation

$$4x - 3y + \sin\left(\frac{3x + 4y}{5}\right) = 0$$

On note $\theta = \arccos(\frac{3}{5})$.

On note $\vec{u} = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$.

On considère le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et on note (X, Y) les coordonnées dans ce repère

1. Que vaut $\vec{v}$?
2. Donner les relations liant x, y, X et Y
3. Donner l'équation de Γ dans le nouveau repère, et dessiner Γ dans le repère initial

Coniques sans terme en xy
GEO 74 (conique dégénérée)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_\lambda$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2y + 2 = 0$.

On considère également la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$.

1. Donner la nature de $\mathcal{C}_\lambda$
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ et de (D)

GEO 75

Soit $t \in \mathbb{R}$

Donner la nature et faire des dessins pour la courbe Γ_t d'équation

$$t^2 x^2 + y^2 + 4t^2 x - 2ty + 5t^2 + 4t + 3 = 0$$

GEO 76

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La tangente et la normale en un point M de (E) (non situé sur ses axes) coupent l'axe (Ox) en T et N .

1. Calculer l'équation de la droite tangente à (E) en un point $M_0(x_0, y_0)$
2. Calculer l'équation de la droite normale à (E) en un point $M_0(x_0, y_0)$
3. Calculer $\overline{OT} \cdot \overline{ON}$ (on trouvera $a^2 - b^2$)

GEO 77

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + 2x + 3y^2 - 4y + 1 = 0$

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est une ellipse
2. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M_0(x_0, y_0)$
3. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par le point $(1, 0)$

GEO 78

Déterminer les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parallèles à la droite d'équation $2x + y = 2084$

GEO 79 (projeté sur une droite)

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$
2. Donner l'équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{E}$ au point $M(t)$
3. Déterminer le lieu de P , le projeté de O sur la tangente au point $M(t)$

GEO 80

On note Γ le support de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= t + \frac{1}{t} \\ y(t) &= t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^* = I.$

Justifier que Γ est inclus dans une parabole dont on donnera l'équation cartésienne. Etudier la réciproque.

GEO 81

Nature et dessin de la courbe d'équation $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 7 = 0$

On précisera l'excentricité, le foyer et la droite directrice

GEO 82

1. Déterminer la nature de la courbe Γ_m d'équation $9x^2 + my^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.
2. Même question avec $\Gamma_m : mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0$

GEO 83

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$ on note C_α la conique d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$.

1. Donner la nature de C_α en fonction de α
2. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan NON situé sur les axes.
Montrer que passent par M_0 deux coniques C_{α_1} et C_{α_2} de natures différentes.
(indication: on pourra déterminer $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2$ puis $(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)$)
3. Montrer que les tangentes en M_0 à C_{α_1} et C_{α_2} sont perpendiculaires.

GEO 84

Dessiner la courbe d'équation cartésienne $x.|x| + 4.y.|y| = 4$

GEO 85

On considère $F(\sqrt{2}, 0)$ et D la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

On note $\mathcal{C}$ la conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité $e > 0$

1. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(On ne développera pas l'expression trouvée)
2. Former l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ où $\begin{cases} \vec{I} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \\ \vec{J} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i} + \vec{j}) \end{cases}$
3. Lorsque $e \neq 1$, on note Ω le centre de la conique $\mathcal{C}$.
Donner le lieu de Ω lorsque e décrit $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

GEO 86

On note $\vec{I} = \frac{1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{j}$ et $\vec{J} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} \cdot \vec{j}$

Dans le repère repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, on considère la conique d'équation $2X^2 + \lambda.Y^2 - 4X + Y = 0$

1. Déterminer sa nature suivant les valeurs de λ
2. Représenter la courbe pour $\lambda = 0, \lambda = -8$ et $\lambda = 8$

GEO 87

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, et ses sommets $A(2, 0)$ et $B(0, 3)$

1. Déterminer $\mathcal{C}$ le lieu des centres de gravité des triangles ABM lorsque M décrit $\mathcal{E}$
2. Représenter $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ sur une même figure

GEO 88

Soient A et B deux points du plans, et I le milieu du segment $[AB]$.

On souhaite déterminer le lieu des points M tels que $IM^2 = AM \times BM$

1. Proposer un repère orthonormé a priori bien adapté à ce problème
2. Montrer que le lieu de M est une hyperbole

Longueur, repère de Frenet, développée

GEO 89

On considère l'arc paramétré $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (t, \ln t)$

1. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $t_0 = 2$.
(On sera amené à poser $u = \sqrt{t^2 + 1}$)
2. Déterminer la longueur de la courbe entre $M(\sqrt{3})$ et $M(\sqrt{8})$

GEO 90

Soit la courbe Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) &= \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) &= \sin(t) \cdot \cos(t) \end{cases}$ avec $t \in]0, \pi[$

1. Montrer que Γ admet 2 points de rebroussements.
2. Calculer la longueur de Γ entre ces 2 points de rebroussement

GEO 91

Déterminer la longueur de la courbe paramétrée suivante $f : t \mapsto (3 \cos(t) + \cos(3t), 3 \sin(t) + \sin(3t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$

GEO 92

Soit l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{cases}$ avec $t \in [0, 2\pi]$

1. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $t_0 = 0$
2. Quelle est la longueur de la courbe?

GEO 93

On considère l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto \left(\frac{t^2}{2}, t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \right)$

1. La courbe est-elle régulière?
2. Déterminer le repère de Frenet là où il peut être défini.
3. Expliquer pourquoi la courbe possède une tangente en $M(t = 0)$ et donner cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $t = 0$

GEO 94

On considère l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (t, e^t)$

1. Déterminer la développée de $\gamma = (\mathbb{R}, f)$
2. En quel point de γ la courbure est-elle extrême?
3. Donner une équation cartésienne de γ

GEO 95

1. Montrer qu'en tout point birégulier la courbure est non nulle.
2. Montrer qu'en tout point d'une droite la courbure est nulle.
3. Montrer que si la courbure est constante et non nulle alors la courbe est un arc de cercle

GEO 96

Déterminer la développée de $t \mapsto (t - \tan t, 1 - \ln(\cos t))$ avec $t \in]-\pi/2, +\pi/2[$

GEO 97

On considère l'arc Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 \cos t + \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$

1. Rappeler les formules de trigonométrie donnant $\sin p + \sin q$ et $\cos p - \cos q$
2. On se place sur l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$
 - (a) Déterminer le repère de Frenet, le paramètre angulaire, ainsi que le rayon de courbure
 - (b) Déterminer le centre de courbure
3. On se place sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, 0[$.
Déterminer le centre de courbure
4. On considère l'arc Γ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6 \cos t - 2 \cos 3t \\ y = 6 \sin t + 2 \sin 3t \end{cases}$
 - (a) Déterminer l'expression de Γ' , image de Γ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.
On note $P(t)$ le point générique de Γ' et $N(t)$ celui de Γ_1
 - (b) Comparer $P(t)$ et $N(t + \pi/4)$
 - (c) En déduire une transformation géométrique permettant de passer de Γ à Γ_1

GEO 98

Déterminer la développée de l'arc paramétré: $x(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)}, y(t) = th(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

GEO 99

Soit M un point de Γ , s une abscisse curviligne sur Γ et $(M, \vec{T}, \vec{N})$ le repère de Frenet associé.

1. Montrer que $M(s+h) = M(s) + h\vec{T} + \frac{h^2}{2}\gamma\vec{N} + o(h^2)$
2. On note (X, Y) les coordonnées du point $M(s+h)$ dans le repère $(M(s), \vec{T}, \vec{N})$.
Donner un équivalent de X , de Y puis de $\frac{2Y}{X^2}$ lorsque $h \rightarrow 0$. En déduire que $\gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2Y}{X^2}$
3. application: dans le cas d'une courbe définie par la relation $y = h(x)$ telle $h(0) = 0$ avec une tangente horizontale, montrer que $\gamma = h''(0)$.

GEO 100

Soit $p > 0$ fixé.

On considère l'arc paramétré $(x(t), y(t)) = (\frac{t^2}{2p}, t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Représenter cette arc (pour $p = 1$)
2. Déterminer sa développée
3. Représenter sur un même dessin sa développée

GEO 101

Soit $\lambda > 0$ avec $\lambda \neq 1$.

On considère la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \lambda^t \cdot \cos t \\ y(t) = \lambda^t \cdot \sin t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0
2. Déterminer le repère de Frenet
3. Calculer la courbure
4. Déterminer la développée. Interprétation?

GEO 102 (La cycloïde, très classique)

Soit l'arc paramétré $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on du point $M(t)$ au point $M(t + 2\pi)$?
2. Etudier l'arc paramétré sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ puis représenter la courbe sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$
3. Déterminer sa développée sur $I =]0, 2\pi[$
4. Montrer que $\forall t \in I, C(t + \pi) = M(t) + (\pi, -2)$
En déduire une transformation géométrique simple pour passer de Γ à sa développée.
5. Dessiner Γ et sa développée sur un même dessin.

GEO 103

On considère l'hyperbole (H) d'équation $xy = 1$ et on note M un point de l'hyperbole.

La normale à (H) au point M recoupe l'hyperbole en un second point que l'on note N .

Montrer, en notant C le centre de courbure au point M , que $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MC}$

indications:

1. Donner une représentation paramétrique de (H)
2. Déterminer les coordonnées du point N
3. Continuer comme des grands!

GEO 104 (cercle osculateur pour aider à tracer une courbe)

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) . Soit (C) la courbe d'équation cartésienne: $y = \text{ch } x - 1$; orientée dans le sens des x croissants.

1. Calculer la longueur de l'arc OA ; A étant le point de (C) d'abscisse $x = 1$ et O l'origine du repère.
2. Calculer en un point M de (C) le vecteur tangent unitaire orienté $\vec{T}$, le vecteur normal unitaire orienté $\vec{N}$ et le rayon de courbure R . Préciser les résultats obtenus en O .
3. On se propose de préciser les positions relatives en O de la courbe (C) d'équation: $y = \text{ch } x - 1$, de la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et du cercle osculateur en O à (C) . Pour cela, on réalisera les développements limités au voisinage de zéro de l'ordonnée y d'un point P du cercle osculateur dont on écrira l'équation (choisir la valeur de y la plus proche de zéro) et de la fonction $\text{ch } x - 1$. Faire un schéma.

(on rappelle que le cercle osculateur est le cercle de centre le centre de courbure et de rayon le rayon de courbure)

GEO 105

Soit C le centre de courbure en M d'une parabole de foyer F . Soit P le projeté de C sur (FM) .

1. Montrer que F est le milieu de $[MP]$
2. En déduire le lieu de P

(on pourra paramétrer $M(t^2/(2p), t)$) et dans ce cas $F(p/2, 0)$

GEO 106

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ décrite par le point $M(t)$ de

$$\text{coordonnées } \begin{cases} x(t) = 3 \cos t + 3 \cos(2t) + \cos(3t) \\ y(t) = 3 \sin t + 3 \sin(2t) + \sin(3t) \end{cases} \text{ avec } t \in [-\pi, +\pi]$$

1. (a) Réduire l'intervalle d'étude.
(b) On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer que $z'(t) = 12 \cdot \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \exp(i(2t + \frac{\pi}{2}))$
(c) Etudier et représenter graphiquement $\mathcal{C}$. (en particulier, étude du point $M(\pi)$)
2. (a) Déterminer une abscisse curviligne de $\mathcal{C}$. En déduire la longueur de $\mathcal{C}$
(b) Déterminer $\vec{T}, \vec{N}$ et R en fonction de t , ainsi que le centre de courbure $I(t)$
(c) Montrer que $I(t)$ a pour coordonnées $\begin{cases} X(t) = \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos(3t) \\ Y(t) = \frac{3}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} \sin(3t) \end{cases}$ pour $t \in]-\pi, +\pi[$
(d) Etude et construction de Γ la développée de $\mathcal{C}$.
(on remarquera que l'on peut restreindre l'étude à $[0, \pi/2]$)
3. Déterminer la développée Γ' de Γ (on pourra se restreindre à $]0, \pi/2[$), et indiquer une transformation géométrique simple qui permet de passer de Γ à Γ' .

GEO 107

Soit $\Gamma = (I, f)$ un arc paramétré. Comme d'habitude, on note s une abscisse curviligne et $(M, \vec{T}, \vec{N})$ le repère de Frenet en tout point M de Γ .

A chaque point M de Γ on associe le point P tel que $P = M + s \cdot \vec{N}$

1. Déterminer, par ses composantes dans le repère de Frenet associé au point M , un vecteur tangent à la courbe décrite par P lorsque M varie.
2. A quelle condition cette tangente est-elle la droite (MP) ?
3. On suppose que $1 - \gamma s = 0$. Déterminer α en fonction de s , puis x et y en fonction de s .
Reconnaitre Γ !

GEO 108

On considère la courbe paramétrée $(I, f) = \Gamma$ avec $f : t \mapsto (3 \cos(t) + \cos(3t), 3 \sin(t) + \sin(3t))$ avec $t \in \mathbb{R}$

1. Déterminer la développée de Γ en utilisant les complexes
2. Montrer que cette développée est l'image de Γ par la composée d'une rotation d'angle $\pi/2$ et d'une homothétie que l'on précisera

GEO 109

Soit Γ la courbe paramétrée $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{t + \sin(t)}{3 + \cos(t)} - 4 \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)} \right)$

1. Etudier et construire Γ
2. Expliciter une abscisse curviligne de Γ et calculer sa longueur entre $M(0)$ et $M(4\pi)$
3. Pour $t \in]0, 4\pi[$, déterminer le repère de Frenet et le rayon de courbure au point $M(t)$
4. Déterminer et construire la développée de Γ

GEO 110

Soit la courbe Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t^2} + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

1. Justifier que la normale à Γ en M_t est paramétrée par $\begin{cases} x_t(u) = t^2 + \frac{2}{t} + u \\ y_t(u) = \frac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases}, u \in \mathbb{R}$
2. En déduire une représentation paramétrique de la développée de Γ
3. Utiliser ce résultats pour donner le centre et le rayon de courbure au point M_{-1}

Enveloppe de droites, développée**GEO 111**

Pour $\mu \in \mathbb{R}^*$, on considère la courbe paramétrée de support Γ_μ définie par $\begin{cases} x(t) = \frac{\mu}{t} + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = \frac{1}{t} + \frac{\mu}{t-1} \end{cases}$ avec

$t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

1. Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$, Γ_μ admet une droite asymptote D_μ lorsque $t \rightarrow 0$, et donner une équation cartésienne de cette droite
2. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(D_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}^*}$

GEO 112

Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dans les 3 cas suivants

$$1) (1 - t^2)x + 2ty - (1 + t^2) = 0 \quad 2) (t - 2)x + (3t - 2t^2)y + t^3 = 0 \quad 3) t^3(x - 1) + 3tx - 2y = 0$$

GEO 113

Soit λ un réel. On considère la droite $(D_\lambda) : \lambda x + (\lambda^2 - 1)y + 3\lambda^2 + 1 - \lambda = 0$.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passe au moins une droite (D_λ) .
Plus précisément, on déterminera l'ensemble des points par lesquels passe exactement une droite du type (D_λ) , et l'ensemble des points par lesquels passent deux droites distinctes du type (D_λ) .
2. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux droites du type (D_λ) perpendiculaires.

GEO 114

On considère la famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'équation cartésienne $(1 - t^2).x + 2t.y - 4t - 2 = 0$.

Montrer que toutes ces droites sont tangentes à un même cercle à déterminer

GEO 115

Déterminer la développée de l'ellipse paramétrée par $f : t \mapsto (2 \cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$

GEO 116

Déterminer la développée de la courbe paramétrée $f : t \mapsto (2 \operatorname{ch}(t), 3 \operatorname{sh}(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$

GEO 117

Déterminer la développée de la courbe paramétrée $f : t \mapsto (t - \operatorname{sh}(t)).\operatorname{ch}(t), 2 \operatorname{ch}(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$

GEO 118

On considère H l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

Une tangente T à H coupe l'axe des ordonnées en un point P .

Déterminer l'enveloppe des perpendiculaires à T en P .

GEO 119

Soit $p > 0$ fixé. On considère la parabole P d'équation $y^2 = 2px$.

Soit A un point de P . La normale Δ à P au point A coupe l'axe des abscisses en I

Déterminer l'enveloppe des droites perpendiculaires à Δ en I

GEO 120

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $a > 0$.

On appelle "Caustique au soleil par réflexion de $\mathcal{C}$ " l'enveloppe Γ des rayons réfléchis par $\mathcal{C}$ et issu d'une source lumineuse qui se trouve à une distance si lointaine que l'on peut considérer les rayons comme parallèles, à l'axe des abscisses. (Source situé vers $-\infty$).

1. Faire un dessin et y placer le point $A(a \cos t, a \sin t)$
2. Un rayon se réfléchit au point A et recoupe le cercle au point B .
En faisant un raisonnement sur les angles, montrer que $B(-a \cos(3t), -a \sin(3t))$
3. Déterminer une représentation paramétrique de Γ , l'enveloppe des droites (AB)
4. Etudier et tracer Γ

Divers**GEO 121**

Soit $P = A_1 A_2 \dots A_n$ un polygone à n sommets. On lui associe le polygone $P' = A'_1 A'_2 \dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i .

On définit alors une suite de polygones par récurrence :
$$\begin{cases} P_0 = & P \\ P_{k+1} = & (P_k)' \end{cases}$$

1. Montrer que l'isobarycentre de tous les P_k est le même, on le note G
2. Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini. (on pourra considérer les affixes de chaque point, écrire à l'aide d'une matrice les relations existantes entre ces affixes, et ...)

GEO 122

Soit a un réel.

On considère les points $A(1,0), B(1,1), C(0,1), P(0,a), Q(-a,a), R(-a,0)$.

On note M le point d'intersection des droites (AP) et (BQ)

1. Faire une figure
2. Donner les équations cartésiennes des droites (AP) et (BQ) , puis les coordonnées du point M
3. Montrer que M, C et R sont alignés.

GEO 123

Soient $M_i(x_i, y_i)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ trois points du plan affine.

Montrer que ces points sont alignés si et seulement si
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

GEO 124

Trouver les droites à la fois normales et tangentes à l'arc paramétré $\Gamma : \begin{cases} x(t) = & 3t^2 \\ y(t) = & 2t^3 \end{cases}$

GEO 125

Déterminer une équation cartésienne de la courbe paramétrée $([0, 2\pi], f)$ avec $f : t \mapsto (\cos t, \cos t + \sin t)$

GEO 126

On considère l'arc paramétré $\Gamma = (\mathbb{R}, f)$ donné par
$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t \\ y(t) = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

1. Etudier les éventuelles symétries de Γ
2. Etudier les éventuels points singuliers de Γ , et indiquer leur nature.
3. (a) On pose $\psi(t) = ||f(t)||$. Calculer $\psi(t)$, puis en déduire que les points doubles de Γ , s'ils existent, sont situés sur l'axe des abscisses.
(b) Réciproquement, montrer que les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses, sauf $f(0)$, sont des points doubles.
4. (a) Déterminer une équation de la normale à Γ au point M_t , pour $t \neq 0$.
(b) Démontrer que toute normale ainsi définie est tangente à un cercle fixe
5. (a) Etudier f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et représenter f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
(b) Indiquer une construction géométrique du point $f(t + 2\pi)$ à partir du point $f(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$
(c) En déduire l'allure de Γ

GEO 127 (courbure)

Soit une courbe Γ de classe C^2 , régulière, d'abscisse curviligne s , et $\vec{T}(s)$ le vecteur unitaire tangent. On pose :

$$\overrightarrow{OP(s)} = \overrightarrow{OM(s)} + \lambda(s)\vec{T}(s) \quad \overrightarrow{OQ(s)} = \overrightarrow{OM(s)} - \lambda(s)\vec{T}(s)$$

λ étant une fonction de classe C^1 , et M parcourant Γ .

On note Γ_1 [respectivement Γ_2] le lieu de P [de Q].

1. Faire un dessin
2. Déterminer A , l'intersection de la normale en P à Γ_1 et la normale en M à Γ
3. Déterminer B , l'intersection de la normale en Q à Γ_2 et la normale en M à Γ
4. Montrer le milieu de $[A, B]$ est le centre de courbure en M à Γ

GEO 128

On considère l'arc
$$\begin{cases} x = & 2 \cos t + \cos 2t \\ y = & 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

1. Rappeler les formules de trigonométrie donnant $\sin p + \sin q$ et $\cos p - \cos q$
2. On se place sur l'intervalle $I =]0, \frac{2\pi}{3}[$
(a) Déterminer le repère de Frenet et le paramètre angulaire.
Montrer que la rayon de courbure vaut $-8 \sin \frac{3t}{2}$

(b) Déterminer le centre de courbure (*on devra trouver*
$$\begin{cases} x = & 6 \cos t - 3 \cos 2t \\ y = & 6 \sin t + 3 \sin 2t \end{cases}$$
)

3. On se place sur l'intervalle $I =]-\frac{2\pi}{3}, 0[$.
Déterminer le centre de courbure
4. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Calculer $C(t + \pi)$, puis indiquer par quelle transformation géométrique, on passe du point $M(t)$ au point $C(t + \pi)$
5. En déduire une transformation géométrique simple pour passer de l'arc à sa développée.

GEO 129 (lemniscate de Bernoulli)

On note (H) l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

1. Paramétrer (H) . On note $M(t)$ son point de paramètre t .
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_t) à (H) au point $M(t)$.
3. On note $N(t)$ le projeté orthogonal du point O sur la tangente (T_t) . Déterminer une représentation paramétrique de (G) , ensemble des points $N(t)$.
 $(On\ devra\ trouver\ X(t) = \frac{2t}{1+t^4}\ et\ Y(t) = \frac{2t^3}{1+t^4})$
4. Étudier (G) . On pourra comparer $N(-t)$ et $N(1/t)$ avec $N(t)$ et réduire le domaine d'étude de (G) .
5. Déterminer les tangentes au point double et tracer (G) .

GEO 130

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathcal{P}$ et passant par le point $F(p/2, 0)$. Soit $A(a, b)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ la normale en ce point. On note I le centre du cercle passant par F et tangent à $\mathcal{P}$ en A .

1. Montrer que tout point de $\mathcal{N}$ a des coordonnées de la forme $(a - \lambda p, b(1 + \lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées de I .
 $(On\ devra\ trouver\ I(\frac{3b^2 + p^2}{4p}, \frac{3p^2b - b^3}{4p^2})$
3. Étudier la courbe paramétrée, lieu des points I , dans le cas où $p = 1$.

Réduction avec terme en xy
GEO 131

Réduire les coniques suivantes (λ paramètre réel)

1. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4\sqrt{2}.x - 4\sqrt{2}.y + \lambda = 0$
2. $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$
3. $x^2 + xy + y^2 + 4x - y - \lambda = 0$
4. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$
5. $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 5y = 0$
6. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 2\sqrt{2} = 0$
7. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y = 0$
8. $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 1 = 0$
9. $x^2 + y^2 + 2mxy = 1$

GEO 132

Soient les points $A(3, 0)$ et $B(0, 2)$.

On considère pour $m \in \mathbb{R}$ la conique C_m d'équation

$$4x^2 + 9y^2 + 2(m - 6)xy - 24x - 36y + 36 = 0$$

1. Montrer que C_6 est une ellipse et C_{12} une droite. Les tracer
2. Montrer que les coniques C_m passent par les points A et B , et que ce sont leurs seuls points communs
3. A quelle cns portant sur m la conique C_m est-elle du type ellipse? Dans ce cas C_m peut-elle être dégénérée? Un cercle?
4. A quelle cns portant sur m la conique C_m est-elle du type hyperbole? du type parabole?

GEO 133

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle OAB est égale à $1/3$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse
2. Montrer que l'ellipse $\mathcal{C}$ est tangente aux droites (OA) et (OB)
3. Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$