

3 Suites numériques

ANA 71 (Exercice d'oral Maths II)

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ les deux suites réelles définies par $a_n = \cos(2^n x)$ et $b_n = \cos(2^n y)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

On suppose que pour tout entier n , $a_n > b_n$

1. Donner a_{n+1} en fonction de a_n ainsi que b_{n+1} en fonction de b_n . Factoriser $a_{n+1} - b_{n+1}$, puis en déduire que pour tout entier n on a $a_n > |b_n|$
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante
3. Montrer que la suite (a_n) est convergente, et déterminer sa limite
4. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $x = 2k\pi$

AUTOUR DES PREMIÈRES DÉFINITIONS

ANA 72 (bornée à partir d'un certain rang. . .)

Soit une suite réelle (u_n) pour laquelle on sait que $\exists \varepsilon > 0, \forall n \geq 3, |u_n - 4| \leq \varepsilon$

- i) Peut-on dire que la suite (u_n) est convergente?
- ii) Peut-on dire que la suite (u_n) est bornée? Si oui, donner un majorant et un minorant.

ANA 73

Soit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \geq B$.

1. A-t-on $\lim u_n = +\infty$? Justifier
2. Si l'on suppose de plus que (u_n) est croissante, a-t-on $\lim u_n = +\infty$? Justifier

ANA 74

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite qui converge vers 4.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq 4.3$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a $8 - \varepsilon \leq u_n + u_{n+1} \leq 8 + \varepsilon$
3. Quelle inégalité similaire a-t-on avec $\frac{1}{1000} \cdot \sum_{k=n}^{n+999} u_k$?

ANA 75

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim u_n = l > 0$.

Montrer qu'il existe $k > 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que $\forall n \geq n_0, u_n \geq k$

SUITES EXTRAITES

ANA 76

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose que les suites extraites $((u_{3n}), (u_{3n+1})$ et (u_{3n+2}) convergent vers une même limite l

1. Rappeler la définition de la convergence de ces 3 suites à l'aide de ε .
(On introduira des rangs notés N_0, N_1 et N_2)
2. $\varepsilon > 0$ étant un réel fixé.
Justifier qu'il existe $N_4 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N_4, |u_k - l| \leq \varepsilon$
3. Que vient-on de justifier?

ANA 77 (Généralise un résultat de cours)

1. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Nous allons montrer qu'alors (u_n) converge aussi. On note $l_1 = \lim u_{2n+1}, l_2 = \lim u_{2n}$ et $l_3 = \lim u_{3n}$
 - (a) Rappeler les résultats de cours que vous connaissez relatifs aux suites extraites.

(b) En considérant la suite (u_{6n}) , montrer que $l_2 = l_3$

(c) Montrer que $l_1 = l_3$

(d) Conclure

2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{4n}) convergent?

ANA 78

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\forall n \geq 1, \forall p \geq 1, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$

Etudier la convergence de la suite (u_n)

ANA 79

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle telle que $\lim_{\infty} u_{2n} = l \in \mathbb{R}$.

1. La suite (u_n) est-elle forcément convergente? Justifier.
2. On suppose de plus que (u_n) est croissante.
Montrer que $\lim u_n = l$

SUITES DÉFINIES DE MANIÈRE EXPLICITE

ANA 80

Soient a et b deux réels. On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $u_n = \cos \sqrt{4\pi^2 n^2 + an + b}$

1. Le raisonnement suivant est-il correct? "Lorsque n tend vers l'infini, on a $\sqrt{4\pi^2 n^2 + an + b}$ qui tend vers l'infini. Or la fonction $\cos$ ne possède pas de limite en l'infini, donc la suite (u_n) ne possède pas de limite en l'infini!"
2. Justifier que $\sqrt{4\pi^2 n^2 + an + b} = 2\pi n + \frac{a}{4\pi} + o(1)$ lorsque n tend vers l'infini
3. Qu'en conclure quant à la convergence de la suite (u_n) ?

ANA 81

Déterminer $\lim \sin(\sqrt{4\pi^2 n^2 + a.n})$ où a est un paramètre réel positif.

ANA 82

On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \tan\left(\frac{n\pi}{5}\right)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \tan\left(\frac{x\pi}{5}\right)$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction f
3. La fonction f est-elle bornée? monotone?
4. Justifier que la suite (u_n) ne converge pas

SUITES DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

ANA 83

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$

1. (a) Calculer I_0 et I_1
(b) Calculer pour tout entier n , $I_n + I_{n+2}$
(c) En déduire l'expression de I_n en fonction de n
2. (a) Prouver que $\lim_{\infty} I_n = 0$

(b) En déduire que: $\ln 2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$ et $\frac{\pi}{4} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right)$

ANA 84

On pose $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$

1. Montrer que (u_n) est monotone, convergente et déterminer la valeur de la limite
2. Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n . En déduire que $(n+1).u_n \leq 2.(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2).u_n$
3. Déterminer un équivalent (simple) de u_n

ANA 85

On pose pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \int_0^1 \sqrt{1-t^n} dt$

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite monotone
2. Etablir que pour tout t de $[0,1]$, on a les inégalités $1 - t^n \leq \sqrt{1-t^n} \leq 1 - \frac{t^n}{2}$
3. En déduire que la suite $(n(u_n - 1))$ est bornée.

ANA 86

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2
2. (a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$
(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente
3. (a) Justifier que $\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} dt$
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
(c) Donner la limite de la suite (u_n)

ANA 87

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $v_n = u_n - \ln 2$

1. Calculer pour tout $x \in [0,1]$ la quantité $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$
2. En intégrant f_n , montrer que $v_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et en déduire $\lim S_n$. Que vient-on de prouver?

ANA 88

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t (1-t)^n dt$

1. Calculer U_1
2. Trouver, pour $n \geq 2$, une relation entre U_n et U_{n-1}
3. En déduire que : $U_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
4. Démontrer que $0 \leq U_n \leq \frac{e}{n!}$ pour prouver que : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$

ANA 89

Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt$

1. Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$
2. Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles

ANA 90

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $p \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0
2. Déterminer un développement asymptotique de I_n à la précision $o(\frac{1}{n})$, puis à la précision $o(\frac{1}{n^2})$

ANA 91

On pose pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 e^{x^n} dx$

1. Calculer u_1 . Montrer que la suite u_n est convergente.
2. Montrer que $\forall y \in [0,1], 1+y \leq e^y \leq 1+(e-1)y$. En déduire $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot (u_n - l) = 0$?

ANA 92

Pour $1 \leq k \leq n$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k}$ et $I_{n,k} = \int_0^1 f_{n,k}(t) dt$.

On note $m_{n,k}$ le maximum de $f_{n,k}$ sur $[0,1]$

1. Etudier les variations de $f_{n,k}$ sur $[0,1]$
2. Montrer que la courbe représentative de $f_{n,k}$ sur $[0,1]$ admet un axe de symétrie lorsque $n = 2k$
3. Déterminer un équivalent de $m_{n,k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$
4. Déterminer une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$, et en déduire la valeur de $I_{n,k}$

SUITES DÉFINIES PAR UNE SOMME**ANA 93**

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2$

ANA 94

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n [kx]$

ANA 95

On pose $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ pour tout $n \geq 1$

1. (a) Montrer que la suite (α_n) est minorée.
(b) Etudier le sens de variation de cette suite et en déduire qu'elle converge. On notera γ sa limite.
2. Donner la limite et un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ avec $q \in \mathbb{R}^{*+}$ fixé.
(indic. on pourra écrire que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$)

ANA 96

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ en posant $u(t) = t + 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} t}$

1. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}, -1 < \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} < 1$
2. Etudier le signe de $u(t)$.
3. En déduire que pour $x > -1, \ln(1+x) \leq \operatorname{sh} x$
4. En déduire que pour $x < 1, -\ln(1-x) \geq \operatorname{sh} x$
5. Justifier que pour tout $n \geq 2$ on a $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n+k} \right) \leq \ln 2$
6. En déduire la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de $\sum_{k=1}^n \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n+k} \right)$

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT**ANA 97**

1. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ possède, dans l'intervalle $]0,1[$, une et une seule solution, que l'on notera u_n .
2. Etudier la monotonie de la suite de terme général u_n , puis justifier que $\lim u_n = 0$
3. Donner un équivalent *simple* de u_n , quand n tend vers l'infini, ainsi que de $v_n = e^n u_n - 1$.

ANA 98

Soit $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{x \cdot \ln x}{1+x}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $a_n \geq 1$ tel que $f(a_n) = n$
2. Etudier les variations de (a_n) , et montrer que (a_n) n'est pas bornée
3. Donner un équivalent de a_n puis de $a_n - e^n$

ANA 99

Soit $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1$ pour $n \geq 1$

1. Montrer qu'il existe une unique racine, notée a_n , de P_n sur $]0, +\infty[$
2. En considérant par exemple $P_n(a_{n-1})$, montrer que la suite (a_n) est décroissante
3. Montrer que la suite (a_n) converge.
4. Justifier que pour tout $n \geq 1$ on a $a_n^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$ puis déterminer $\lim a_n$.

ANA 100

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$.

On définit la suite (x_n) en fixant $x_0 \in]0,1/2[$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1/2[$
2. En déduire la monotonie de la suite (x_n) , sa convergence et sa limite
3. Montrer qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{2}$

ANA 101

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k^2}$ et $g_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4}-k^2}$

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$
2. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4}-k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$
3. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$ en fonction de $x \in]0,1[$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$. En déduire la limite de u_n

SUITES RÉCURRENTES**ANA 102**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer les suites réelles (u_n) convergentes qui vérifient la relation

$$\forall n \geq 0, u_{n+2} + (1-a) \cdot u_{n+1} + a \cdot u_n = 0$$

ANA 103

Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$$

ANA 104 (on devra trouver des expressions simples!)

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2 \cos \theta \cdot u_{n+1} + u_n = 0$$

ANA 105

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$

1. Justifier que la suite (u_n) possède une limite. Préciser ensuite quelles sont les limites possibles.
2. Dans le cas où $u_0 \leq 0$ donner $\lim u_n$
3. Donner le tableau de variation de la fonction $x \mapsto -x^2 + x$
4. Donner alors $\lim u_n$ lorsque $u_0 > 0$

ANA 106

On souhaite déterminer les suites à valeurs complexes qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n + (-1)^n \quad (1)$$

1. Déterminer une suite (x_n) qui vérifie la condition (1).
(on pourra chercher x_n sous la forme $\lambda \cdot (-1)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$)
2. On définit la suite (v_n) par $\forall n \geq 0, v_n = u_n - x_n$.
Montrer l'équivalence entre les propositions
 - i) (u_n) vérifie la condition (1)
 - ii) (v_n) vérifie la condition (2) $\forall n \geq 2v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n = 0$
3. En déduire toutes les suites qui vérifient la condition (1)

ANA 107

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$

2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$ et que $\alpha \in [0, 1]$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4} \cdot |u_n - \alpha|$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n$, puis que la suite (u_n) converge vers α
5. Trouver un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

ANA 108

On considère l'équation $(E) : x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$

1. prouver que (E) a exactement une solution réelle α . Etablir de plus que $\alpha \in [-\frac{1}{3}, 0] = I$
Pour déterminer une valeur approchée de α on considère la suite définie par $u_0 = -\frac{1}{3}$
et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 1}{u_n^2 + 3}$
2. vérifier que si la suite converge ce ne peut être que vers α
3. on pose $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$
 - (a) prouver que $f(I)$ est inclus dans I . Qu'en déduit-on quant aux termes de la suite (u_n) ?
 - (b) démontrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{8}{27}$
 - (c) prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{27}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 - (d) en déduire que la suite (u_n) converge vers α . Puis déterminer un entier n à partir duquel on est sûr que u_n approche α à 10^{-9} près.
 - (e) existe-t-il un réel β pour lequel la série $\sum (u_n - \beta)$ converge? Justifier.

ANA 109

On s'intéresse à la suite définie par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On note $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$

On s'intéresse à la suite (u_n) de deux manières différentes.

Justifier tout d'abord que $\sqrt{1 + \Phi} = \Phi$

1. Premièrement
 - (a) Montrer que $\forall n \geq 1, 1 \leq u_n \leq \Phi$
 - (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
 - (c) Justifier que (u_n) est une suite convergente, et donner sa limite.
2. Secondement.
 - (a) Montrer que $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - f(\phi)| \leq \frac{1}{2} \cdot |u_n - \phi|$
 - (b) En déduire que $\forall n \geq 1, |u_n - \Phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
 - (c) En déduire une méthode pour déterminer une valeur approchée de Φ à 10^{-4} près

ANA 110

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $\forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{1 + u_{n-1}}$

On note $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $g = f \circ f$

1. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n \in [\frac{1}{2}, 1] = I$
2. Quel est le sens de variation de f sur I ?
3. Calculer u_0, u_1 et u_2
4. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposés
5. Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Conclure

ANA 111

On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \cos(u_n)$

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ possède une unique solution α , et que $\alpha \in [0, 1]$
2. Montrer que $\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |\cos a - \cos b| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |a - b|$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ et que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. En déduire la limite de u_n
4. Comment obtenir une valeur approchée de α à 10^{-k} près?

ANA 112 (une suite complexe)

Soit $a \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$.

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right)$

1. On pose $f : z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$
 - (a) Montrer que $z \in i\mathbb{R} \iff f(z) \in i\mathbb{R}$
 - (b) En déduire que la suite (z_n) est bien définie.
2. On suppose de plus $a \neq -1$. On pose alors pour tout $n, u_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$.
 Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3.
 - (a) Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim z_n$ lorsque $\operatorname{Re}(a) > 0$
 - (b) Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim z_n$ lorsque $\operatorname{Re}(a) < 0$
 - (c) Justifier que le cas $\operatorname{Re}(a) = 0$ n'est pas à envisager

ANA 113

On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3.4^n + 5$.

Montrer qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique en donnant la relation de récurrence suivie.

SUITES ADJACENTES

ANA 114

Dans chacun des 2 cas, montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

ANA 115 (preuve de l'irrationalité de e)

On considère les suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Montrer que cette limite n'est pas rationnel (on raisonnera par l'absurde)

4 Séries numériques

ANA 116 (Banque PT 2020 C, (extrait))

Partie 2

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h , continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2x) = h(x) \cos(\pi x)$$

1. Pour tout réel a , exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , et pour tout réel x :

$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

3. Montrer que, pour toute solution h , tout entier naturel non nul n , et pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , et pour tout réel x :

$$h(x) \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin(\pi x).$$

5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$.
7. Dédurre des résultats précédents l'expression, pour tout réel x , de $h(x)$ en fonction de x .

Partie 3

1. Étudier la convergence de la série de terme général : $\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$.
2. On considère la suite $(R_n)_{n \geq 2}$, de premier terme $R_2 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geq 3$:

$$R_n = R_{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

- (a) Calculer, pour tout entier $n \geq 4$, et de deux façons différentes :

$$\sum_{k=4}^n \{\ln R_k - \ln R_{k-1}\}.$$

- (b) La suite $(\ln R_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente ?
- (c) Justifier l'existence de :

$$R = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=3}^N \cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

On écrira, dans ce qui suit :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=3}^N \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme 1, i.e. : $\sum_{k=0}^n q^k$.
(b) En déduire, pour tout t de $]0,1[$, l'expression de : $\frac{1 - (1-t)^n}{t}$ en fonction d'une somme.
(c) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt$
Étudier la convergence de l'intégrale I_n .
(d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} dt$
(a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , l'intégrale u_n en fonction de n .
(b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n .
(c) En déduire l'existence de :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}.$$

ANA 117

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels ou de complexes.

1. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_n est
2. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_n est
3. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_{2n} est
4. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_{2n} est

$$(A) \sum_{k=0}^{2n} u_k \quad (B) \sum_{k=0}^n u_{2k} \quad (C) \sum_{k=0}^{2n} u_{2k} \quad (D) \sum_{k=0}^n u_k$$

DÉTERMINER LA NATURE D'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE

ANA 118

Pour chacune des séries déterminer la somme partielle d'indice n et préciser si la série converge

$$a) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \quad b) \sum_{n \geq 3} (-1)^n \quad c) \sum_{n \geq 0} n \quad d) \sum_{n \geq 1} \ln \frac{n}{n+1} \quad e) \sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$$

ANA 119

Parmi les séries ci-dessous, indiquer celles qui sont grossièrement divergentes

$$a) \sum_{n \geq 1} n^2 \quad b) \sum_{n \geq 1} n \cdot \sin \frac{1}{n} \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{n^{2050}}{2^n} \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n+4}$$

ANA 120

Indiquer la nature précise (CV, DV, ACV, GDV) des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \sum \sqrt{n} \quad \sum \cos n$$

$$\sum \frac{(-2)^n}{n!} \quad \sum n! \quad \sum \frac{2^n}{n^2} \quad \sum (1 - 10^{-n})^n \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ANA 121

Soit (u_n) une suite positive et (v_n) une suite négative telles que $\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n u_k = \pi + v_n$.

Justifier que la série de terme général u_n converge et que la suite de terme général v_n converge.

ANA 122 (développement personnel)

Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin t}{1+t} dt$ et $v_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

ANA 123

Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\frac{a}{1+a}\right)^n$ où a est un réel donné autre que -1 .

Et si a était un complexe?

ANA 124

Soit a un nombre complexe.

Etudier la convergence des séries de terme général $u_n = (a^n)^2$ et $v_n = a^{n^2}$

ANA 125 (fondamental)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

ANA 126

Soit (λ_n) une suite croissante de réels qui tend vers $+\infty$.

Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n \cdot e^{-\lambda_n}$

ANA 127

Nature des séries de terme général :

1. $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$
2. $n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$
3. $\frac{2^n \cdot n!}{n^n}$
4. $\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$
5. $\frac{(-1)^n n + 2}{n^3 + 2n^2 + 1}$
6. $2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{2}$
7. $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$
8. $(-1)^n \operatorname{sh} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$
9. $(-1)^n \operatorname{sh} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$
10. $\frac{1}{(\ln n)^n}$
11. $\frac{1.4.7 \dots (3n-5)(3n-2)}{3^n \cdot n!}$
12. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$
13. $3 \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n^3 + 1)$
14. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
15. $\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{n^n}$
16. $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
17. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$
18. $\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{n^n}{2n-1}}$
19. $\frac{\exp(in)}{n^2 + \cos n}$
20. $e^{-\sqrt{n}}$
21. $\frac{1}{n^{3+\sin n}}$
22. $\frac{1}{(\ln n)^{2024}}$
23. $\frac{(\ln n)^{2028}}{n^{1,000000001}}$
24. $\sum \frac{(\ln n)^{2038}}{n}$
25. e^{-n^2}
26. $e^{-\sqrt{n}}$
27. $\frac{n!}{n^n}$
28. $\sin(2\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n})$
29. $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{1+2+\dots+n}\right)$
30. $\frac{1}{n} \cdot \sin \left(\left(n + \frac{1}{n}\right) \pi \right)$
31. $\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$
32. $\frac{1! + \dots + n!}{(n+2)!}$
33. $\sin \left(\left(n + \frac{1}{n}\right) \pi \right)$

ANA 128

a, b et α étant deux paramètres réels, nature des séries de terme général :

1. $\sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$
2. $\cos \frac{1}{n} - a - \frac{b}{n}$
3. $\ln \left(\frac{1+n^a}{2+n^b} \right)$
4. $a^n \sin \frac{1}{n}$
5. $\frac{1+a^n}{n} b^n$
6. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
7. $\operatorname{ch}^a n - \operatorname{sh}^a n$
8. $\arctan n^\alpha$
9. $\frac{1}{n \ln(1+a^n)}$
10. $\frac{a^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$
11. $\tan \pi \sqrt{n^2 + an + b}$
12. $\arccos \sqrt{1 - \frac{1}{n^\alpha}}$
13. $\frac{a^n}{n \cdot \ln^a n}$
14. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$
15. $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$

ANA 129

Soit a un réel strictement positif. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^2 \cdot a^n}{(2n)!}$

ANA 130 (le contre-exemple classique qui prouve l'importance du signe stable dans la rde)

.

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$
2. La série de terme général v_n est-elle une série alternée?
3. Donner un équivalent de v_n
4. Calculer un développement limité de v_n avec trois termes
5. En déduire que la série de terme général v_n est divergente

ANA 131 (nature de la série $\sum \cos n\theta$)

Soit θ un réel. On note $u_n = \cos n\theta$

1. Dans quels cas simples, peut-on conclure quant à la nature de $\sum u_n$?
2. On considère maintenant que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
 - (a) Ecrire une égalité entre u_{n+1} et u_n
 - (b) On suppose que $\lim u_n = 0$. Montrer qu'alors la suite $(\sin n\theta)$ converge elle aussi vers 0. En déduire une contradiction.
 - (c) Conclure

On vient de montrer que la série $\sum \cos n\theta$ est toujours grossièrement divergente.

On aurait pu aussi passer en complexe pour déterminer l'expression explicite de la somme partielle d'indice n

ANA 132

On considère la série de terme général $u_n = \left(\frac{3n+1000}{5n-999}\right)^n$.

Montrer que pour n assez grand on a $0 \leq u_n \leq 0.7^n$ puis conclure.

ANA 133

Dans cet exercice nous allons montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.

1. On pose $u_n = \frac{(4n)!}{2^{n^2}}$. Montrer que $\sum u_n$ est une série convergente.
2. En déduire que pour n assez grand $2^{n^2} \geq (4n)!$, puis conclure.

ANA 134

Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $u_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$

ANA 135

Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) - \ln n$

ANA 136

Démontrer que la suite définie par $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \right) - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ est convergente.

(On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et vérifier qu'elle est décroissante sur $[3, +\infty[$.)

ANA 137 (une v.a. qui possède une variance possède une espérance)

Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite positive telle que $\sum_{n=0} p_n = 1$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle tq $\sum p_n x_n^2$ converge

Montrer que $\sum p_n x_n$ est une série convergente

ANA 138

1. Soit (u_n) une suite réelle qui vérifie la relation $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.
Déterminer les suites (u_n) tel que $\sum u_n$ CV
2. Même question pour la relation $3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$

ANA 139

très formateur sur la recherche d'équivalents

1. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose $u_n = \operatorname{sh} \frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\beta}$
Déterminer la nature de $\sum u_n$
2. Soit α un réel. Déterminons la nature de la série de terme général $u_n = \arctan n^\alpha$.

ANA 140 (démonstration de $x^n = o(n!)$)

Soit $x > 1$ un réel fixé. On note $a_n = \frac{n!}{x^n}$ et $S_n = \ln a_n$ pour $n \geq 1$

1. Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{x}$ pour tout entier n .
2. En déduire que $\lim S_n = +\infty$
3. Justifier que $x^n = o(n!)$

ANA 141

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq 0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq k$

1. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est majorée par une suite géométrique que l'on explicitera.
2. A quelle condition sur k est-t-on sûr que la suite (u_n) CV? Que la série de terme général u_n CV?
3. Dans le cas où $k < 1$, déterminer en fonction de k et de u_0 le plus petit entier N pour lequel on est sûr que $|u_N| \leq 10^{-5}$

ANA 142

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n}$

1. la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?
2. en écrivant $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$

ANA 143

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$

1. Etudier la suite (u_n)

2. On pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
Montrer que $\lim v_n = 1$

3. En utilisant le théorème de Césaro (cf. RDM), déterminer un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$

ANA 144

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sin(u_n)$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On pose pour tout $n \geq 1, v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. Montrer que (v_n) converge vers $1/3$.
3. En utilisant le théorème de Césaro (cf. RDM) à la suite (v_n) , montrer que $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

ANA 145

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

Montrer que les séries suivantes sont convergentes

$$i) \sum \max(u_n, v_n) \quad ii) \sum \sqrt{u_n v_n}$$

ANA 146

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge

ANA 147

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$ pour $n \geq 1$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n

(On pourra montrer par l'absurde que cette série est divergente)

ANA 148

Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Montrer que les séries $\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$ et $\sum \frac{\operatorname{ch}(a_n) - 1}{a_n}$ convergent

ÉTUDIER LES SOMMES PARTIELLES OU LE RESTE
ANA 149

Déterminer un équivalent des expressions suivantes lorsque $n \rightarrow \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^{2030} \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-2030} \quad U_n = \ln(n!) \quad V_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}$$

ANA 150

On souhaite donner une valeur approchée de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ à 10^{-2} près. On pose $u_n = \frac{1}{n^3}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a $u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$ (on note v_k cette quantité)
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et tout $N > n$, on a $\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \int_n^N \frac{dt}{t^3}$

3. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 < R_n \leq \frac{1}{2n^2}$, et proposer une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

ANA 151

Convergence et valeur approchée à 10^{-6} près de $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + 3^k + \dots + 2026^k}$

ANA 152

Soit a et b deux paramètres réels. On note $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$

- Déterminer une cns sur (a, b) pour que $\sum u_n$ converge
- Sous cette condition, déterminer la somme de la série ainsi qu'un équivalent simple du reste d'ordre n

ANA 153

- Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.
- Encadrer la somme partielle S_n en utilisant deux intégrales, puis en déduire un équivalent.

ANA 154

Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$

- Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente
- Encadrer $S(a)$ avec des intégrales lorsque $a > 0$
- En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \rightarrow +\infty$

ANA 155

On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = (-1)^n \cdot \frac{3n+2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

- Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série convergente
- On note R_n le reste de cette série numérique.
 - Justifier que $\forall n \geq 1, |R_n| \leq \frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$
 - En déduire une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ à 10^{-2} près

DÉTERMINER LA SOMME D'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE

ANA 156

On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^3 - n}$ avec $n \geq 2$.

- Déterminer la somme partielle d'indice n
- En déduire la convergence et la somme de la série

ANA 157

Soit x un réel tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^n} \neq 0[\frac{\pi}{2}]$.

Après avoir exprimé $\frac{1}{\tan(x)} - \tan x$ de manière simple en fonction de $\tan(2x)$,

justifier que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$ converge et donner sa somme

ANA 158

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$ et (w_n) une suite numérique telle que $\lim w_n = 0$.

Pour tout $n \geq 0$ on pose $u_n = aw_n + bw_{n+1} + cw_{n+2}$

Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

ANA 159

Montrer la convergence et déterminer la somme de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ avec $n \geq 2$

ANA 160

Nature et somme des séries suivantes :

- $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!}$
- $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n+1}$
- $\sum_{n \geq 0} 2^{-n/2} \cos(n\frac{\pi}{4})$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{x}{(1+x)^n}$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!}$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 1}{n!}$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$
- $\sum_{n \geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$
- $\sum_{n \geq 0} 2^{-n+(-1)^n}$
- $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^{4n-3}}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$
- $\sum_{n \geq 0} \ln \cos(\frac{1}{2^n})$
- $\sum_{n \geq 0} 3^n \cdot \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right)$
- $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

ANA 161 (D'après un exercice d'oral)

Soit $p \geq 0$ un entier. On note pour tout $k \geq 0$, $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$

- Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$
- Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{p - (n+1)u_n}{p-1}$
- Montrer que la série de terme général u_k diverge pour $p = 0$ ou $p = 1$
- Dans le cas où $p = 2$, montrer que $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge et que sa somme vaut $\frac{p}{p-1}$

ANA 162

On pose pour tout $n \geq 0$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

- Montrer que la suite (R_n) est bien définie, càd que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est bien convergente
- Montrer que la série $\sum R_n$ est convergente
- On souhaite calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$.
Pour cela on note S_N la somme partielle d'indice N de cette série.
(On admettra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$)
 - Montrer que $\forall N \geq 0, S_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + (N+1) \cdot \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$
 - Donner un majorant simple de $\left| \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right|$
 - En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} R_n = -\ln 2$

ANA 163

Nature (et somme éventuelle) des séries de terme général :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) \quad v_n = \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

(on pourra, pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$, utiliser la formule d'addition (en la démontrant):

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) \text{ si } (\arctan(a) - \arctan(b)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

ANA 164

Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \frac{\ln n}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

1. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes
2. Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} u_n$

ANA 165

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$ et (w_n) une suite numérique telle que $\lim w_n = 0$.

Pour tout $n \geq 0$ on pose $u_n = aw_n + bw_{n+1} + cw_{n+2}$

Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

ANA 166

On admet dans cet exercice que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. convergence et somme de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2}$ (on remarquera $2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$)
2. convergence et somme de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$

(déterminer les réels a, b, c et d tels que $\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k^2} + \frac{d}{(k+1)^2}$)

PRODUIT DE CAUCHY

ANA 167

Pour $n \geq 0$ on pose $c_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$

1. Montrer que la série de terme général c_n converge
2. Déterminer 2 réels a et b tels que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n\right)$ et en déduire $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

ANA 168

Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$

ANA 169

Soient a et b deux complexes de modules strictement inférieur à un.

Montrer que $\frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$

PETITS PROBLÈMES

ANA 170

Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $t_1 \in]0, \pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} = \sin t_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < t_n < \pi$
2. Montrer que la suite (t_n) converge vers 0
3. Montrer que $\sum \ln\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ diverge
4. En déduire la nature de $\sum t_n^2$ et enfin celle de $\sum t_n$

ANA 171 (série et intégrale)

On considère la série de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

On note S_N la somme partielle d'indice N

1. Montrer que cette série est convergente
2. Montrer que $S_N = I - J_N$ avec $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$ et $J_N = \int_0^1 \frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t^3} dt$
3. Trouver 3 réels a, b, c tels que $\frac{1}{1+X^3} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$
4. En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(On trouvera $\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{9} + \frac{\ln 2}{3}$)

ANA 172 (série et intégrale)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $a_n = \int_0^1 t^n \cdot f(t) dt$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot a_n$ converge vers $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

ANA 173 (série et intégrale)

Soit $a > 0$.

1. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$ on a $\left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot t^{ak} \right| \leq t^{(n+1)a}$
2. En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$
3. Application pour $a = 2$

ANA 174

1. préliminaire : Montrer que si la série de terme général $x_n > 0$ converge alors la série de terme général x_n^2 converge aussi

2. Dans les questions suivantes, on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} \end{cases} \quad \forall n \geq 0$

Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$
 - (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative
 - (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle
 - (c) En utilisant $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$, montrer que la série de terme général v_n est divergente

4. (a) Montrer que $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$
 (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente
 (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n

ANA 175

Nous allons montrer la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})} \text{ avec } n \geq 1$$

et en calculer la somme. Pour cela, on pose $\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{n}u_n$

- Après avoir justifié que $u_n = v_{n-1} - v_n$ pour $n \geq 2$, montrer que $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - v_n$
- En déduire que $\sum u_n$ converge.
- Montrer que $\ln v_n = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
- En déduire que $\lim \ln v_n = -\infty$. Donner $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

ANA 176

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln n, \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

- Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes
- En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

- Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n}$
- Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ est convergente et calculer sa somme en utilisant les questions précédentes

QUELQUES CORRIGÉS

- 71** 1. Nous allons utiliser la formule de trigonométrie $\cos(2X) = 2\cos^2(X) - 1$.

On a donc $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0, a_{n+1} = 2a_n^2 - 1 \text{ et } b_{n+1} = 2b_n^2 - 1}$

Pour $n \geq 0$, on a

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n^2 - 2b_n^2 = 2(a_n - b_n)(a_n + b_n)$$

Comme on a supposé que pour tout entier n on a $a_n > b_n$, on peut écrire

$$a_n + b_n = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n}$$

et ainsi remarqué que $a_n + b_n > 0$ car quotient de deux nombres strictement positifs.

On vient de prouver que $\forall n \geq 0, a_n > -b_n$, comme on sait aussi que $\forall n \geq 0, a_n > b_n$, on peut bien en déduire que $\boxed{\forall n \geq 0, a_n > |b_n|}$

2. Pour $n \geq 0$ fixé, on a

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n^2 - a_n - 1 = (a_n - 1)(2a_n + 1)$$

Or on sait que $a_n > 0$ (car $a_n > |b_n|$) et $a_n \geq 1$ (car $a_n = \cos(\dots)$), on en déduit ainsi que $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

On vient de montrer que $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante.}}$

3. Comme la suite (a_n) est une suite positive, elle est minorée par zéro.

La suite (a_n) est minorée et décroissante: on en déduit qu'elle est convergente.

Notons L sa limite.

On sait que $\forall n \geq 0, a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$.

Par passage à la limite cela donne $L = 2L^2 - 1$, c'est à dire $2L^2 - L - 1 = 0$.

Or les solutions de cette équation sont 1 et $-\frac{1}{2}$.

Comme $L \geq 0$ (car limite d'une suite positive), on en déduit que nécessairement $L = 1$.

$\boxed{\text{Conclusion } \lim a_n = 1}$

4. La suite (a_n) est une suite décroissante qui converge vers 1, on a donc $\forall n \geq 0, a_n \geq 1$.

Mais on sait aussi que par définition $1 \geq a_n$.

On a ainsi $\forall n \geq 0, 1 \geq a_n \geq 1$, càd $\boxed{\forall n \geq 0, a_n = 1}$

C'est en particulier le cas pour a_0 , or $a_0 = \cos(x)$

Comme $\cos(x) = 1$, on peut affirmer qu'il existe un entier relatif k tel que $x = 2k\pi$!

- 78** – On va s'intéresser aux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

– Par hypothèse, on a dans le cas particulier où $p = n$

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, on a avec les gendarmes $\boxed{\lim u_{2n} = 0}$

– Par hypothèse, on a dans le cas particulier où $p = n + 1$

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0$, on a avec les gendarmes $\boxed{\lim u_{2n+1} = 0}$

- Comme les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, on peut affirmer par théorème que $\boxed{(u_n) \text{ converge aussi vers 0}}$

80 2. On trouvera $\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|} = 2\pi n + \frac{a}{4\pi} + o(1)$.

83

- La fonction $\tan$ est continue sur le segment $[0, \pi/4]$ à valeurs dans $[0, 1]$, donc pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto (\tan(t))^n$ est continue sur le segment $[0, \pi/4]$ aussi.
- On vient de vérifier que les intégrales I_n existaient bien pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$1. \quad (a) \quad \boxed{I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 dt = \frac{\pi}{4}} \text{ et } \boxed{I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(t) dt = [-\ln |\cos(t)|]_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) = \frac{\ln 2}{2}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) + \tan^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t)) \tan^n(t) dt$$

En effectuant le changement de variable $u = \tan(t)$, on a $du = (1 + \tan^2(t))dt$, et donc

$$\boxed{I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}}$$

(c) Pour déterminer I_n on va distinguer les cas n pair et n impair comme sur les exemples suivants:

$$* \quad I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{1} - I_0\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{1} + I_0$$

$$* \quad I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - I_1\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + I_1$$

$$* \quad I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1} - I_0$$

Au final on peut montrer rigoureusement par récurrence que

$$i. \quad I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \frac{1}{2p-5} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{3} + (-1)^{p-1} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^p \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{p-k}}{2k-1}$$

$$ii. \quad I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \frac{1}{2p-4} + \cdots + (-1)^{p-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}\right) = (-1)^p \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{p-k}}{2k}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

– Le changement de variable $x = \tan t$ donne $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

– Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$, ce qui, par croissance de l'intégrale, permet de dire que $\int_0^1 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$.

– On a ainsi pour tout $n, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Le théorème de convergence par encadrement nous permet d'affirmer que $\boxed{\lim I_n = 0}$

(b) – Comme la suite (I_n) tend vers 0, on peut affirmer que ses suites extraites (I_{2p}) et (I_{2p+1}) convergent elles aussi vers 0

– A la question 1)c)i), on a montré que $(-1)^p I_{2p} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k-1}$

La suite $((-1)^p I_{2p})$ tend vers 0 (produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0), on peut donc affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{-\pi}{4}$, soit de manière équivalente que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}}$$

– avec un raisonnement similaire on prouve l'autre égalité.

84

1. – Soit $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons utiliser la **croissance de l'intégrale**.

Comme

$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2 < 1 \quad (*)$$

On a

$$\forall t \in [0, 1], (\ln(1+t))^{n+1} \leq (\ln(1+t))^n$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt \leq \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$$

càd

$$u_{n+1} \leq u_n$$

Conclusion $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante}}$

– Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme la fonction $x \mapsto x^n$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a d'après (*)

$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq (\ln(1+t))^n \leq (\ln 2)^n$$

ce qui donne par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0 \cdot dt \leq \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \leq \int_0^1 (\ln 2)^n dt$$

càd

$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$$

Comme $\ln 2 \simeq 0,67$ on a $\lim (\ln 2)^n = 0$.

Le **théorème des gendarmes** permet d'affirmer que $\boxed{\lim u_n = 0}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

– On réalise une intégration par parties sur u_{n+1}

On pose $\begin{cases} u(t) &= (\ln(1+t))^{n+1} \\ v(t) &= t+1 \end{cases}$ (petite astuce!) qui sont bien C^1 sur $[0, 1]$.

Cela donne

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= [(t+1) \cdot (\ln(1+t))^n]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (t+1) \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^n dt \\ &= 2 \cdot (\ln 2)^{n+1} - (n+1) \cdot u_n \end{aligned}$$

– Nous allons prouver l'encadrement demandé.

– Comme la suite (u_n) est décroissante, on a $u_{n+1} \leq u_n$ ce qui donne

$$2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \leq u_n$$

et déjà

$$2.(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2).u_n$$

– On a vu en Q1 que la suite (u_n) était positive, on a donc

$$u_{n+1} \geq 0$$

càd

$$2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \geq 0$$

ce qui donne

$$(n+1).u_n \leq 2.(\ln 2)^{n+1}$$

– Au final, on a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1).u_n \leq 2.(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2).u_n}$

3. – On a $(n+1).u_n \sim n.u_n$ et $(n+2).u_n \sim n.u_n$

ce qui permet d'écrire avec l'encadrement de Q2

$$n.u_n \sim 2(\ln 2)^{n+1}$$

et ainsi

$$u_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$$

4. Cette question est plus délicate car on est obligé de décomposer l'intervalle d'intégration par la relation de Chasles

– Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \underbrace{\int_1^2 (\ln(1+t))^n dt}_{=x_n} + \underbrace{\int_2^3 (\ln(1+t))^n dt}_{=y_n}$$

– La fonction $t \mapsto (\ln(1+t))^n$ est positive sur $[1,2]$, on a donc par positivité de l'intégrale

$$x_n = \int_1^2 (\ln(1+t))^n dt \geq 0$$

ce qui prouve que

$$v_n \geq y_n$$

Il suffit donc maintenant de montrer que $\lim y_n = +\infty$ pour conclure

– On reprend la même idée de croissance de l'intégrale (de manière plus rapide)

Comme

$$\forall t \in [2,3], (\ln(1+t))^n \geq (\ln 3)^n$$

On a

$$y_n = \int_2^3 (\ln(1+t))^n dt \geq \int_2^3 (\ln 3)^n dt = (\ln 3)^n$$

– On vient de montrer que

$$\forall n \geq 0, v_n \geq (\ln 3)^n$$

Comme $\ln 3 > \ln e = 1$, on a $\lim (\ln 3)^n = +\infty$,

ce qui permet d'affirmer que

$$\lim v_n = +\infty$$

88 1. Une ipp donne $U_1 = e - 2$

2. Une ipp donne $\forall n \geq 2, U_n = -\frac{1}{n!} + U_{n-1}$

3. Par récurrence

4. Vraiment classique!

93 On pourra commencer par montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 0$

101 1. On va bien sûr utiliser le théorème de la bijection

– La fonction f_n est C^∞ sur l'intervalle $]0,1[$ comme somme de fonctions c^∞ , avec

$$\forall x \in]0,1[, f'_n(x) = -\frac{1}{2x^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-k^2)^2} < 0$$

– Ainsi la fonction f_n est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $]0,1[$, f_n réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)[=]-\infty, +\infty[$

Ceci permet d'affirmer que $\exists ! u_n \in]0,1[, f_n(u_n) = 0$

x	0	u_n	1
$f'_n(x)$		-	
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

– Quelques précisions qui aident à la compréhension:

$$- f_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k^2} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1^2} + \frac{1}{x-2^2} + \frac{1}{x-3^2} + \dots + \frac{1}{x-n^2}$$

– Sous cette forme étendue il est clair que $f_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,1[$. (L'ensemble de définition complet serait $\mathbb{R} - \{0,1^2,2^2,\dots,n^2\}$)

– Sous cette forme, l'obtention des limites en 0^+ et en 1^- est claire aussi

2. i) On peut par exemple reconnaître un procédé télescopique.

– La décomposition en éléments simples donnent

$$\frac{1}{\frac{1}{4} - X^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2} - X)(\frac{1}{2} + X)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - X} + \frac{1}{\frac{1}{2} + X} = \frac{1}{X + \frac{1}{2}} - \frac{1}{X - \frac{1}{2}}$$

et ainsi, avec $n \geq 1$ fixé

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \frac{1}{k - \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dans la seconde somme, on fait le glissement d'indice $k \leftarrow k - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1) - \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{-4n}{2n+1}\end{aligned}$$

ii) On peut par exemple procédé par récurrence

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: " $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$ "

– **initialisation:**

$$\text{On a } \sum_{k=1}^1 \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3} = -\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_1$ est vraie

– **hérédité:**

On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geq 1$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} + \frac{1}{\frac{1}{4} - (n+1)^2} \\ &= -\frac{4n}{2n+1} + \frac{4}{1 - (2n+2)^2} \\ &= -\frac{4n}{2n+1} + \frac{4}{(1 - (2n+2))(1 + (2n+2))} \\ &= -\frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{6}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= -4 \cdot \frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= -4 \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= -4 \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= -4 \cdot \frac{n+1}{2n+3} = -4 \cdot \frac{n+1}{2(n+1)+1}\end{aligned}$$

et l'on prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

– **conclusion:**

Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$

3. Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}f_n(x) - g_n(x) &= \left(\frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k^2} \right) - \left(\frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x - k^2} - \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{4} - x}{(x - k^2)(\frac{1}{4} - k^2)} \\ &= \left(\frac{1}{4} - x \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - k^2)(\frac{1}{4} - k^2)}\end{aligned}$$

Or

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x - k^2 < 0 \text{ et } \frac{1}{4} - k^2 < 0$$

Ce qui permet d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - k^2)(\frac{1}{4} - k^2)} > 0$$

Conclusion : $\boxed{sg(f_n(x) - g_n(x)) = sg(\frac{1}{4} - x)}$

4. – Comme f_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$,

pour montrer que $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$ **il suffit de montrer que** $f_n(\frac{1}{4}) \geq f_n(u_n) \geq f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n})$

càd prouver que $f_n(\frac{1}{4}) > 0$ **et** $f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) < 0$

x	$\frac{1}{4}$	u_n	$\frac{1}{4} + \frac{1}{n}$
$f_n(x)$	$f_n(\frac{1}{4})$	$\overset{!}{0}$	$f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n})$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(\frac{1}{4}) = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} > 0$$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} > \frac{1}{4}$, on sait d'après Q3. que

$$f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) \leq g_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n})$$

Or

$$g_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \right)} - \frac{4n}{2n+1} = \frac{-14n}{(n+4)(2n+1)}$$

et il est clair que pour $n \geq 1$, on a $\frac{-14n}{(n+4)(2n+1)} < 0$

On a donc bien $f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) < 0$

– Conclusion: $\boxed{\forall n \geq 1, \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{n}}$

– Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{4}$

103 On trouvera $u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n$

104 On trouve $\forall n \geq 0, u_n = \frac{\cos(\frac{(2n-1)\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$

112 1. (a) On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(z) \in i\mathbb{R} &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff z + 1/z = -(\bar{z} + 1/\bar{z}) \\ &\iff \bar{z}.z^2 + z.\bar{z}^2 + z + \bar{z} = 0 \\ &\iff (z + \bar{z}) \left(\underbrace{1 + z\bar{z}}_{\neq 0 \text{ car } z\bar{z} = |z|^2 \geq 0} \right) = 0 \\ &\iff z + \bar{z} = 0 \\ &\iff z \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) On a donc également l'équivalence

$$z \notin i\mathbb{R} = \mathbb{C} - i\mathbb{R} \iff f(z) \notin i\mathbb{R} = \mathbb{C} - i\mathbb{R}$$

Comme $z_0 \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$, on a $z_0 \neq 0$ et donc z_1 est bien défini.

De plus, on sait que $z_1 \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$.

...

Une récurrence immédiate nous assure que tous les termes de la suite (z_n) sont bien définis.

2. Le calcul donne $u_{n+1} = u_n^2$.

Par une récurrence immédiate cela donne $\forall n \geq 0, u_n = u_0^{2^n} = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2^n}$

3. On commence par exprimer z_n en fonction de u_n , et l'on trouve $z_n = \frac{1+u_n}{1-u_n}$

(a) cas $Re(a) > 0$.

En faisant une interprétation géométrique dans le plan complexe, on constate que cela signifie que le point d'affixe a est plus proche du point d'affixe 1 que de celui d'affixe -1 .

On a donc $|a-1| < |a+1|$ càd $\left|\frac{a-1}{a+1}\right| < 1$

Ainsi $\lim u_n = 0$ et donc $\lim z_n = 1$

(b) cas $Re(a) < 0$.

La même interprétation donne $\left|\frac{a-1}{a+1}\right| > 1$.

On a donc $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Comme $z_n = \frac{1+u_n}{1-u_n} = \frac{1/u_n + 1}{1/u_n - 1}$, cela donne $\lim z_n = -1$.

rem: on est passé par $1/u_n$ car (u_n) étant une suite complexe, on ne peut écrire $\lim u_n = +\infty$

(c) cas $Re(a) = 0$.

C'est le cas exclu car a n'est PAS un imaginaire pur par hypothèse!

113 $u_{n+1} = -3.4^{n+1} + 5 = 4.(-3.4^n + 5) - 15 = 4.u_n - 15$

128 .10 Intéressant surtout pour la recherche d'équivalents

Pour a et b réels on note $u_n = \frac{a^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$

– Pour $a = 0$ on a $\forall n \geq 1, u_n = 0$ et donc la série $\sum u_n$ converge trivialement.

Dans toute la suite on supposera $a \neq 0$

– Commençons par déterminer un équivalent de u_n : pour cela on va chercher un équivalent du dénominateur.

Pour tout $n \geq 1$ on a $\left|\frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right| = \frac{|b|^n}{2^{\sqrt{n}}} = \exp(n \ln(|b|) - \sqrt{n} \ln 2)$

On en déduit que:

i) si $|b| \leq 1$ alors $\lim \left|\frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right| = 0$

ii) si $|b| > 1$ alors $\lim \left|\frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right| = +\infty$ d'après le théorème des puissances comparées.

Conclusion: si $|b| \leq 1$ on a $b^n = o(2^{\sqrt{n}})$ et donc $\boxed{b^n + 2^{\sqrt{n}} \sim 2^{\sqrt{n}}}$

si $|b| > 1$ on a $2^{\sqrt{n}} = o(b^n)$ et donc $\boxed{b^n + 2^{\sqrt{n}} \sim b^n}$

– Etude du cas $|b| \leq 1$. On a alors $u_n \sim a^n$

Ici comme a peut être négatif il ne faudrait surtout pas affirmer que les séries de $\text{tg } u_n$ et de $\text{tg } a^n$ sont de même nature!

On commence par écrire que $|u_n| \sim |a|^n$.

Nous allons utiliser cet équivalent de deux manières différentes.

i) si $|a| < 1$

On sait que la série géométrique de $\text{tg } |a|^n$ est convergente, et l'équivalent précédent nous permet d'affirmer (signe stable!) que la série de $\text{tg } |u_n|$ converge.

On a prouvé que la série de $\text{tg } u_n$ est absolument convergente donc convergente.

ii) si $|a| \geq 1$

On ne va pas utiliser l'équivalent précédent pour dire que les séries sont de même nature (en effet, on arriverait juste à prouver que $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, ce qui ne permet pas de déterminer la nature de $\sum u_n$)

On sait que $\lim |a|^n = 1$ si $|a| = 1$ ou $\lim |a|^n = +\infty$ si $|a| > 1$. De par l'équivalent on en déduit que $\lim |u_n|$ est donc égale à 1 ou $+\infty$. Ceci indique que la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

On a prouvé que la série de $\text{tg } u_n$ est grossièrement divergente.

– Etude du cas $|b| > 1$. On a alors $u_n \sim \frac{a^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n}$

De même, comme a ou b peuvent être négatifs, on va commencer par écrire que $|u_n| \sim \frac{|a|^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{|b|^n}$

Nous allons distinguer deux cas:

i) si $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 1$.

On a alors $\lim \left(\left|\frac{a}{b}\right|\right)^n \cdot 2^{\sqrt{n}} = +\infty$.

On en déduit donc par l'équivalent ci-dessus que $\lim |u_n| = +\infty$. On ne peut donc avoir $\lim u_n = 0$.

On a prouvé que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

ii) si $\frac{|a|}{|b|} < 1$.

Notons pour tout entier $n, v_n = \frac{|a|^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{|b|^n}$.

Nous allons déjà montrer que la série de terme général v_n est convergente et nous pourrions affirmer, grâce à l'équivalent de signe stable $|u_n| \sim v_n$, que la série de terme général $|u_n|$ est absolument convergente donc convergente.

Pour montrer que $\sum v_n$ est convergente, nous allons utiliser la règle de D'Alembert.

Pour $n \geq 0$ on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|} 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \rightarrow \frac{|a|}{|b|} < 1$ (en effet $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (penser à la quantité conjuguée! cf TD)

On a bien prouvé que $\sum v_n$ converge et que $\sum u_n$ converge!

145 i) On a clairement comme les termes sont positifs

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_n = \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$$

Comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on a $\sum u_n + v_n$ converge.

Et donc par théorème de comparaison, $\sum x_n$ converge

ii) – Première idée:

Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est une fonction croissante, on peut remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq y_n = \sqrt{u_n \cdot v_n} \leq \max(u_n, v_n)$$

En effet, il suffit de considérer le cas $u_n \leq v_n$ puis $v_n \leq u_n$

Et donc par comparaison, $\sum y_n$ converge

– Seconde idée:

On commence par établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

(Pour la deuxième inégalité, il suffit de développer $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$)

On conclut ensuite avec le même théorème de comparaison!

150 Dans cet exercice, il ne s'agissait pas d'appliquer DIRECTEMENT le théorème de comparaison série-intégrale, mais de redémontrer une partie des résultats.

1. Soit $k \geq 2$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, on a donc

$$\forall t \in [k-1, k], f(k) \leq f(t)$$

Ainsi par croissance ce l'intégrale

$$\int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

ce qui donne l'inégalité demandée

$$u_k = \frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$$

2. Soit $n \geq 1$ et $N > n$.

Si $k \geq n+1$, on a $k \geq 2$, et donc d'après Q1, on a par sommation

$$\sum_{k=n+1}^N u_k = \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^N \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$$

or par la relation de Chasles, on sait que

$$\sum_{k=n+1}^N \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3} = \int_n^N \frac{dt}{t^3}$$

ce qui donne bien

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \int_n^N \frac{dt}{t^3}$$

3. – Comme on sait que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, la notion de reste R_n a bien un sens.

On a $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$

– Comme $\forall k \geq 1, u_k > 0$, on a clairement $R_n > 0$ pour tout $n \geq 1$

– Soit $n \geq 1$.

On considère un $N > n$.

D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \int_n^N \frac{dt}{t^3} = \left[\frac{-1}{2t^2} \right]_n^N = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}$$

En faisant tendre $N \rightarrow \infty$, on obtient alors

$$R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

– On a donc

$$\forall n \geq 1, 0 \leq S - S_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

On est donc certain que S_n fournira une valeur approchée de S à 10^{-2} lorsque $\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire $n^2 \geq 50$.

Conclusion: S_8 est une v.a. de S à 10^{-2} près

155

1. On a

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \cdot \frac{3n}{n^3} = \frac{3 \cdot (-1)^n}{n^2}$$

Comme $\sum \frac{3 \cdot (-1)^n}{n^2}$ est une série ACV^{*}, par comparaison, on peut affirmer que $\sum v_n$ est ACV
^{*}: ne surtout pas se contenter d'écrire CV, car le signe N'est PAS stable
 autre remarque: pour Q1 il était préférable de répondre ainsi plutôt que d'utiliser le critère spécial...

2. Ici, il fallait penser au critère spécial de convergence des séries alternées!

(a) Notons $f : t \mapsto \frac{3t+2}{t^3+3t^2+2t}$

- On a pour tout $n \geq 1$, $v_n = (-1)^n \cdot f(n)$ avec $f(n) > 0$.
Donc $\sum v_n$ est une série alternée!
- La fonction f est bien clairement définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ avec

$$f'(t) = -\frac{6t^3 + 15t^2 + 12t + 4}{(t^3 + 3t^2 + 2t)^2} < 0$$

Ainsi la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$
ce qui permet d'affirmer que la suite $(|v_n|) = (f(n))$ est décroissante.

- Comme $f(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$ on a $\lim f(n) = 0$
- On a montré que la suite $(|v_n|) = (f(n))$ est une suite décroissante qui tend vers 0, ce qui prouve que $\sum v_n$ vérifie le critère spécial.
On sait alors que

$$|R_n| \leq |v_{n+1}| = \frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$$

- (b) Pour déterminer une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ il suffit de déterminer un n tel que

$$|R_n| \leq \frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6} \leq 10^{-2}$$

Pour cela je propose 2 idées:

- **première idée:**

On essaie différente valeur de n et on calcule $\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$.

On trouve que la première à passer sous les 10^{-2} c'est $n = 15$

Conclusion $S_{15} = \sum_{k=1}^{15} v_k$ est une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ à 10^{-2} près

- **seconde idée:**

On cherche au préalable une majoration de $\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$

On a clairement par minoration du dénominateur

$$\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6} \leq \frac{3n+5}{n^3}$$

et aussi par majoration du numérateur pour $n \geq 5$

$$\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6} \leq \frac{3n+5}{n^3} \leq \frac{3n+n}{n^3} = \frac{4}{n^2}$$

Ainsi pour avoir une v.a. à 10^{-2} près, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{4}{n^2} \leq 10^{-2}$$

cela donne $n \geq 20$

rem: on constate, sans surprise, qu'en ayant fait une majoration intermédiaire, on est obligé de calculer davantage de termes pour être sûr d'obtenir au final la même précision

- 160** 1 - pour la convergence, on peut remarquer que comme $\frac{2}{n(n+3)} \rightarrow 0$,

on a $\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) \sim \frac{2}{n(n+3)} \sim \frac{2}{n^2}$. Or la série $\sum \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, théorème 5, $\sum u_n$ converge.

- On a:

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n) - \ln(n+3)$$

- Ainsi, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k+3) = \ln(3) + \ln(n+1) - \ln(n+3)$ par procédé télescopique. D'où $S_n = \ln(3) + \ln \frac{n+1}{n+3}$

- Sous cette forme, il est clair que $\lim S_n = \ln(3)$.

On a prouvé que $\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln(3)$

- 7** - Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

- Une décomposition en éléments simples donne $u_n = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$

- Notons $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$. On subodore un procédé télescopique. En effet:

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1/2}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1/2}{p+2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p+2}$$

Avec un changement d'indices cela donne: $S_n = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{n+2} \frac{1}{p}$

En isolant les termes d'indices 2 et 3 ainsi que ceux d'indices $n+1$ et $n+2$, on a

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{p=3}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^n \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p=3}^n \frac{1}{p}$$

On obtient donc après simplifications $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$, et donc trivialement

$$\lim S_n = \frac{1}{4}$$

- Conclusion: on vient de prouver que $\sum u_n$ est une série convergente et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$

- 9** On pourra considérer $\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}$

- 16** On pourra linéariser $\sin^3$

- 166** On note pour tout entier n , $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

D'après le rappel, on sait que la suite (S_n) converge vers $\pi^2/6$

1. - **première idée: on revient aux sommes partielles.**

Pour tout entier n on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2(k+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 = 2S_n + \frac{1}{(n+1)^2} - 1$

Ensuite, on fait tendre $n \rightarrow \infty$ et on obtient la limite finie $\pi^2/3 - 1$. Ceci prouve que la série converge et que sa somme vaut $\pi^2/3 - 1$

– **deuxième idée: on reconnaît la somme de deux séries convergentes.** C'est donc une série convergente et l'on a

$$\begin{aligned} & - \text{la série } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \text{ converge et l'on a } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \pi^2/6 - 1 \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = (\pi^2/6 - 1) + \pi^6 = \pi^2/3 - 1 \end{aligned}$$

remarque:

ici on a le choix entre les deux méthodes, et notamment le retour aux sommes partielles n'est pas indispensable... contrairement à la question suivante!

2. On effectue une décomposition en éléments simples. On trouve

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

Soit n un entier naturel fixé, on a:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}$$

On reconnaît un procédé télescopique et l'on trouve

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 + \frac{2}{n+1} - 2 = 2S_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} - 3$$

D'après le rappel, on sait que $\lim S_n = \frac{\pi^2}{6}$. On trouve donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \pi^2/3 - 3$.

Conclusion: on a prouvé que $\sum \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$
--

rem: cette fois le retour aux sommes partielles étaient indispensables car la série ne s'écrivait pas comme une somme de séries convergentes (il y en avait deux qui divergeaient!)

170

1. On va faire une démonstration par récurrence.

On note pour $n \geq 1, \mathcal{P}_n : 0 < t_n < \pi$

– **initialisation:**

$\mathcal{P}_1$ est vraie car par hypothèse $t_1 \in]0, \pi[$

– **hérédité:**

On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour $n \geq 1$ fixé quelconque.

On a donc

$$0 < t_n < \pi$$

On connaît bien la fonction sin et l'on sait d'ailleurs que

$$\sin([0, \pi]) =]0, 1]$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\sin t_n \in]0, 1]$$

ce qui prouve a fortiori que

$$0 < t_{n+1} < \pi$$

ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

– **conclusion:** par le principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \geq 1, 0 < t_n < \pi}$

2. – Dans la question précédente, on a montré que (t_n) est une suite bornée.

Il est donc naturel de vouloir utiliser le théorème de la limite monotone et ainsi s'intéresser à la monotonie de la suite (t_n)

– Posons
$$\begin{array}{ccc} f : [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) - x \end{array}$$

– La fonction f est clairement dérivable sur $[0, \pi]$ avec $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$.

La fonction f est donc décroissante (strictement même car la dérivée n'est nulle qu'en 0) sur cet intervalle

x	0	π
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$-\pi$

Ainsi f est négative (strictement même) sur $]0, \pi[$.

Comme $\forall n \geq 1$, on a $t_n \in]0, \pi[$, et donc $f(t_n) = t_{n+1} - t_n \leq 0$.

On a prouvé que (t_n) est une suite décroissante

– D'après le **théorème de la limite monotone**, on peut affirmer que

$\boxed{\text{la suite } (t_n) \text{ converge vers une limite } l \text{ avec } l \in [0, \pi[}$

Mais attention!! A ce stade, on ne peut affirmer directement la suite tend vers 0

– On sait que $\forall n \geq 1, t_{n+1} = \sin t_n$

La fonction sin étant une fonction continue, on peut affirmer par passage à la limite que

$$l = \sin l$$

C'est à dire que

$$f(l) = 0$$

Or l'étude précédente de la fonction f montre que la seule solution à cette équation sur $[0, \pi[$ est $l = 0$

Conclusion: la suite (t_n) converge vers 0
--

3. Notons $u_n = \ln \frac{t_{n+1}}{t_n} = \ln t_{n+1} - \ln t_n$

Notons également S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$

On a donc, avec un procédé télescopique immédiat,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \ln t_{k+1} - \ln t_k = \sum_{k=1}^n \ln t_{k+1} - \sum_{k=1}^n \ln t_k = \ln t_{n+1} - \ln t_1$$

Comme $\lim t_n = 0$, on en déduit que $\lim \ln t_{n+1} = -\infty$.

On a montré que $\lim S_n = -\infty$, ce qui prouve que $\sum u_n$ est une série divergente.

remarque: on aurait également pu utiliser **le théorème lien suite-série**.

Par ce théorème, on sait que

la série $\sum \ln t_{n+1} - \ln t_n$ converge **ssi** la suite $(\ln t_n)$ converge

. Comme on a prouvé que $t_n \rightarrow 0$, on a la suite $(\ln t_n)$ qui est divergente (vers $-\infty$), et donc la série $\sum \ln t_{n+1} - \ln t_n$ diverge

4. (a) Comme $t_n \rightarrow 0$, on peut utiliser le DL de de référence de $\sin$ en 0

$$u_n = \frac{\sin t_n}{t_n} = \ln \left(\frac{t_n - t_n^3/6 + o(t_n^3)}{t_n} \right) = \ln \left(1 - \frac{t_n^2}{6} + o(t_n^2) \right)$$

Comme $-\frac{t_n^2}{6} + o(t_n^2) \rightarrow 0$ et que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a donc

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{t_n^2}{6} + o(t_n^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{t_n^2}{6}$$

On en déduit que

$$t_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -6.u_n$$

On applique alors maintenant la Règle des Equivalents (le signe de t_n^2 est bien sûr positif!); on peut affirmer que $\sum t_n^2$ et $\sum -6.u_n$ sont de même nature.

On sait par ailleurs que multiplier une série par un scalaire non nul ne change pas la nature de la série, ce qui permet d'affirmer que $\sum t_n^2$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Conclusion: $\sum t_n^2$ est une série divergente

- (b) - Comme $\lim t_n = 0$ et que $t_n > 0$, on peut affirmer **qu'à partir d'un certain rang**, on a

$$0 < t_n \leq 1$$

et donc, comme $t_n > 0$

$$0 < t_n^2 \leq t_n$$

Par théorème de comparaison, comme $\sum t_n^2$ diverge, on peut affirmer que $\sum t_n$ diverge

- **autre solution possible: on procède par l'absurde.**

Supposons que $\sum t_n$ soit une série convergente.

Comme $t_n > 0$, cela revient à supposer que $\sum t_n$ est ACV.

D'autre part, comme $t_n \rightarrow 0$, on a

$$t_n^2 = o(t_n)$$

(en effet $\lim \frac{t_n^2}{t_n} = \lim t_n = 0$) Le théorème de comparaison avec le o permet alors d'affirmer que $\sum t_n^2$ converge.
Contradiction.

Conclusion: $\sum t_n$ diverge

171 Notons pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$

1. On reconnaît évidemment une série alternée qui vérifie le critère spécial, on a donc $\sum u_n$ convergente.

(Il est immédiat que la suite $(|u_n|) = (\frac{1}{3n+1})$ est une suite décroissante qui tend vers 0)

2. Soit $N \geq 0$ fixé.

On va reconnaître à l'intérieur de l'intégrale la somme partielle d'une série géométrique.

$$\begin{aligned} I - J_N &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} - \int_0^1 \frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t^3} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^3)^{N+1}}{1+t^3} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^3)^{N+1}}{1 - (-t^3)} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^N (-t^3)^k dt \quad (\text{somme partielle géométrique}) \\ &= \sum_{k=0}^N \int_0^1 (-1)^k t^{3k} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \sum_{k=0}^N \left[(-1)^k \cdot \frac{t^{3k+1}}{3k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \cdot \frac{1}{3k+1} \\ &= S_N \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^3+1} &= \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1} \\ &= \frac{a(X^2-X+1) + (X+1)(bX+c)}{(X+1)(X^2-X+1)} \\ &= \frac{(a+b)X^2 + (-a+b+c)X + a+c}{X^3+1} \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -a+b+c &= 0 \\ a+c &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/3 \\ b &= -1/3 \\ c &= 2/3 \end{cases}$$

4. – Montrons que $I = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{9}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[\ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln|t^2-t+1| \right]_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt}_{=J} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot J \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable affine (donc C^1) $\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$

ce qui donne $d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{d\theta}{\theta^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot [\arctan \theta]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Au final, on trouve que

$$I = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{9}$$

– Montrons que $\lim J_N = 0$.

Nous allons procéder par encadrement

Soit $N \geq 0$.

Par l'inégalité triangulaire intégrale, on a

$$0 \leq |J_N| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t} \right| dt = \int_0^1 \frac{(t^3)^{N+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t} dt$$

On a pour tout $t \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{t^{3N+3}}{1+t} \leq t^{3N+3}$$

on a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t} \leq \int_0^1 t^{3N+3} dt = \left[\frac{t^{3N+4}}{3N+4} \right]_0^1 = \frac{1}{3N+4}$$

On a prouvé pour tout N

$$0 \leq |J_N| \leq \frac{1}{3N+4}$$

Comme $\lim \frac{1}{3N+4} = 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $\lim |J_N| = 0$,
càd $\lim J_N = 0$

– Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{9}$

En Q2, on a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_N = I - J_N$$

Comme $\lim J_n = 0$, on en déduit que

$$\lim S_N = I$$

Conclusion: on a bien montré que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{9}$

173 Soit $a > 0$

1. Soit $n \geq 1$ et $t \geq 0$.

On sait que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} = \sum_{k=0}^n (-t^a)^k = \frac{1 - (-t^a)^{n+1}}{1 - (-t^a)}$$

donc

$$\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} = \frac{(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}$$

On a donc en valeur absolue

$$\left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| = \frac{(t^a)^{n+1}}{1+t^a}$$

et comme $1+t^a \geq 1$, on a bien l'inégalité demandée

$$\left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| \leq t^{a(n+1)}$$

2. Soit $n \geq 1$.

– Notons S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{ak+1}$.

On a $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ak+1}$

– En utilisant l'**inégalité triangulaire intégrale** et le **croissance de l'intégrale**, on obtient

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| dt \leq \int_0^1 t^{a(n+1)} dt = \frac{1}{a(n+1)+1}$$

– Par linéarité de l'intégrale on sait que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right) dt &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{ak} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ak+1} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - S_n\end{aligned}$$

– Ainsi, on a

$$\forall n \geq 1, \left| \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - S_n \right| \leq \frac{1}{a(n+1)+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a(n+1)+1} = 0$, on peut affirmer que $\lim S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$

On a bien prouvé que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{an+1}$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$

Soit $n \geq 0$ et $t \geq 0$.

Comme $-t^a \leq 0$ on a $-t^a \neq 1$, on peut appliquer la formule précédente ce qui donne

$$\sum_{k=0}^n (-t^a)^k = \frac{1 - (-t^a)^{n+1}}{1 - (-t^a)}$$

Soit encore

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} = \frac{1}{1+t^a} + \frac{(-1)^{n+1} t^{a(n+1)}}{1+t^a}$$

D'où

$$\left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| = \left| \frac{-(-1)^{n+1} t^{a(n+1)}}{1+t^a} \right| = \frac{t^{a(n+1)}}{1+t^a}$$

De plus, comme $t^a \geq 0$ on a $\frac{t^{a(n+1)}}{1+t^a} \leq t^{a(n+1)}$.

Au final, on a bien montré que

$$\left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| = \left| \frac{-(-1)^{n+1} t^{a(n+1)}}{1+t^a} \right| \leq t^{a(n+1)} \quad (*)$$

On sait que par théorème on a $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ donc ici

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| dt$$

De plus par croissance de l'intégrale on a d'après (*)

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right| dt \leq \int_0^1 t^{a(n+1)} dt = \frac{t^{an+a+1}}{an+a+1} = \frac{1}{an+a+1}$$

On vient donc de justifier que

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right) dt \right| \leq \frac{1}{an+a+1}$$

$$\text{or } \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ak} \right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{ak} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ak+1}$$

On a donc pour tout entier n

$$\left| \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ak+1} \right| \leq \frac{1}{an+a+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{an+a+1} = 0$ on en déduit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$$

on a bien prouvé que la série $\sum \frac{(-1)^n}{an+1}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$

Remarque: dans le cas $a = 2$, on vient de prouver que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$