

C25 - INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Table des matières

1	Intégrale à paramètre	1
1.1	théorème de continuité sous le signe intégral	2
1.2	théorème de dérivabilité sous le signe intégral	3
2	Résultats annexes	4
2.1	Rappels pour les fonctions d'une variable réelle	4
2.2	Rappels pour les fonctions de deux variables réelles	4

1 Intégrale à paramètre

DANS CE PARAGRAPHE , NOUS ALLONS DÉFINIR UNE FONCTION g EN POSANT

$$g(x) = \int_J f(x,t)dt \quad \text{intégrale à paramètre}$$

où

- I ET J SONT DEUX INTERVALLES

- $\begin{array}{l} f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) \longmapsto f(x,t) \end{array}$ UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

Nous allons nous intéresser aux propriétés de régularité de la fonction g

L'ensemble de définition de g est l'ensemble des $x \in I$ pour lesquels l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ existe.

Plus précisément:

1. si l'intégrale est généralisée, c'est l'ensemble des $x \in I$ tels que l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ converge.
2. si l'intégrale n'est pas généralisée(c'est à dire si J est un segment et si $t \mapsto f(x,t)$ est continue), c'est l'ensemble I .

☀️ exemple 1:

- voici quelques exemples d'intégrales à paramètre

$$\int_0^1 \cos(x.t^2)dt \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^x.\sqrt{1-t}} \quad \int_0^\infty e^{-x.t^2} dt \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}.dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

- ... et d'intégrales qui ne le sont pas

$$\int_2^x \cos(t^2)dt \quad \int_0^x \cos(x.t^2)dt \quad \int_{-x}^{x^2} \cos(t^2)dt \quad \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad \int_x^\infty e^{-x.t^2} dt$$

☀️ exemple 2: Etonnant non?

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = \int_1^\infty \frac{x}{t^{x+1}} dt$.

Montrer que la fonction g est bien définie sur $[0, +\infty[$ mais qu'elle n'y est pas continue!

1.1 théorème de continuité sous le signe intégral

💡 théorème 1: théorème de continuité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $\boxed{\begin{matrix} f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) \longmapsto f(x,t) \end{matrix}}$ une fonction telle que:

- à $t \in J$ fixé, la fonction $x \rightarrow f(x,t)$ est continue sur I
- à $x \in I$ fixé, la fonction $t \rightarrow f(x,t)$ est continue sur J
- il existe une fonction φ intégrable sur J , telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

Alors :

la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est définie et continue sur I

remarques:

- on dit aussi que f est continue par rapport à t
- on dit encore que f est continue par rapport à x
- le majorant $\varphi(t)$ ne doit pas dépendre de x

Le théorème dit que sous certaines conditions on a: $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_J f(x,t)dt = \int_J f(x_0,t)dt = \int_J \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,t)dt$
(il s'agit donc d'un théorème qui justifie une interversion...)

☀️ exemple 3:

- Justifier que la fonction $g : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x.t^2).dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que la fonction $g : x \mapsto \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t^2}.dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

remarque 1

Le programme précise que:

- "l'on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par rapport à t ."
- "le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire"



méthode 1: domination locale

- On considère un segment $K = [a, b] \subset I$
- On vérifie l'hypothèse de domination sur K , c-à-d on prouve l'existence d'une fonction φ_K intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in K \times J, |f(x, t)| \leq \varphi_K(t) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

- On applique le théorème qui permet d'affirmer que g est continue sur K
- On écrit
"g est continue sur tout segment $K = [a, b]$ inclus dans I donc g est continue sur $\bigcup_{[a, b] \subset I} [a, b] = I$ "



exemple 4:

On pose $g(x) = \int_0^\infty \exp(-xt) \cdot \arctan t \, dt$
 Montrer que g est continue sur $]0, +\infty[$

1.2 théorème de dérivabilité sous le signe intégral



théorème 2: théorème de dérivation sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ une fonction telle que:

$$(x, t) \longmapsto f(x, t)$$

- à $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J
- à $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur I
- à $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J
- il existe une fonction φ intégrable sur J , telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

Alors :

la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et de classe C^1 sur I , et l'on a

$$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Cette formule s'appelle la formule de Leibniz,

Le théorème dit que sous certaines conditions on a: $\frac{d}{dx} \int_J f(x, t) dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$
 (il s'agit donc d'un théorème qui justifie une interversion...)



exemple 5:

- Justifier que la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \arctan(xt) \cdot dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, puis donner explicitement $g'(x)$
- Justifier que la fonction $g : x \mapsto \int_0^\infty \arctan(xt) \cdot e^{-t} \cdot dt$ est C^1 .

2 Résultats annexes

2.1 Rappels pour les fonctions d'une variable réelle

- On dit que g EST CONTINUE EN $x_0 \in I$ lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$
- On dit que g est CONTINUE [DÉRIVABLE, C^1] SUR L'INTERVALLE I lorsque g est CONTINUE [DÉRIVABLE, C^1] EN TOUT POINT $x_0 \in I$
- La continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales

théorème 3: à ne pas retenir

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il y a équivalence entre:

- g est continue [dérivable, C^1] sur l'intervalle I
- g est continue [dérivable, C^1] sur tout segment inclus dans I

démonstration pour la continuité:

- $ii) \Rightarrow i)$: On suppose que g est continue sur tout segment inclus dans I .
Nous allons montrer que g est continue sur I .
Pour cela, nous allons montrer que g est continue en tout point x_0 de I .
Soit $x_0 \in I$ fixé.
Il existe un segment K inclus dans I tel que $x_0 \in K$.
Or par hypothèse, g est continue sur K , c'est à dire est continue en tout point de K ;
donc en particulier, on peut affirmer que g est continue en x_0 .
On a bien justifié que g est continue en tout point de I
- $i) \Rightarrow ii)$: Il s'agit du sens trivial.
Si g est continue sur I alors g est a fortiori continue sur tout intervalle inclus dans I .

2.2 Rappels pour les fonctions de deux variables réelles

définition 1: dérivée partielle (rappels) pour une fx de deux variables

Soit
$$\begin{array}{ccc} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

On dit que f ADMET UNE DÉRIVÉE PARTIELLE PREMIÈRE PAR RAPPORT À x EN $(x_0, t_0) \in I \times J$ lorsque la fonction $f_{t_0} : x \mapsto f(x, t_0)$ est dérivable en x_0

Dans ce cas, on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0) = f'_{t_0}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_{t_0}(x) - f_{t_0}(x_0)}{x - x_0}$$

théorème 4: théorème des bornes atteintes (fxs de plusieurs variables)

Si f est continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ alors f est bornée sur ce domaine et atteint ses bornes

En particulier, si f est continue sur le produit cartésien de segment $[a, b] \times [c, d]$ alors f est bornée
c'est à dire $\exists M > 0, \forall (x, t) \in [a, b] \times [c, d], |f(x, t)| \leq M$