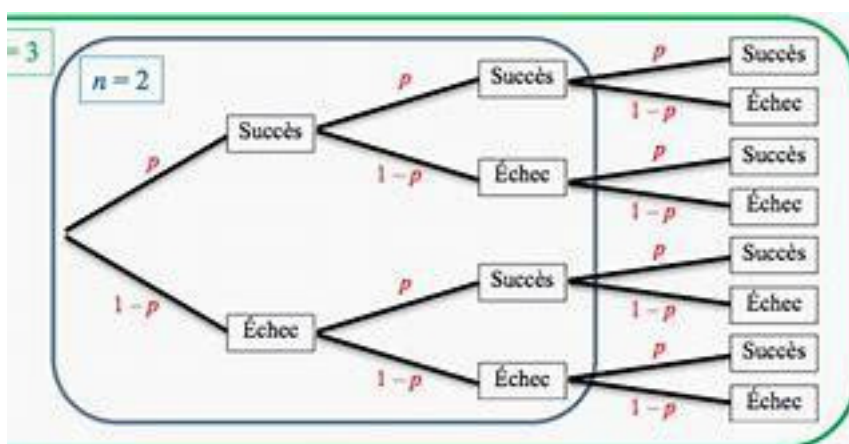


Variables aléatoires discrètes I

Table des matières

1 Variables aléatoires discrètes	2
1.1 Définitions et propriétés	2
1.2 distribution de probabilités pour une variable aléatoire	4
1.3 Espérance et variance (cas fini: 1ère année)	5
2 Lois à connaître	7
2.1 Loi uniforme(rappel)	7
2.2 Loi de Bernoulli de paramètre p	8
2.3 Loi binomiale V136	9
2.4 Loi géométrique	10
2.5 Loi de Poisson	11
3 Indépendance de variables aléatoires discrètes	12
3.1 Indépendance deux à deux, mutuelle indépendance	12
3.2 Modélisation du jeu de pile ou face infini	13
3.3 Somme de variables aléatoires	14
4 Loi conjointe, lois marginales	16



1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions et propriétés

remarque 1 (définition v.a. cas fini)

L'année dernière vous avez vu une définition simplifiée de variable aléatoire.

Ω étant toujours un univers fini, on considérait toujours la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et E un ensemble quelconque, on appelait variable aléatoire toute application X définie sur Ω à valeurs dans E .

L'ensemble $X(\Omega)$, qui est l'ensemble des images prises par X , était forcément un ensemble fini.



définition 1: variables aléatoires discrètes

Soit Ω un univers muni de la tribu $\mathcal{T}$, et E un ensemble.

Une VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE sur Ω est une application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que

- i) $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, (càd fini ou dénombrable)
- ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est un événement

rem: on donne cette définition pour être sûr de pouvoir calculer la probabilité de tous les événements du type $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$, et d'une manière générale de tous les événements "liés à X "

Dans ce cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle discrète. En abrégé, on notera $v.a.r.d.$

remarque 2 (peu important)

- E n'est pas forcément un ensemble de nombres: cependant c'est le cas le plus courant!
- Si Ω est fini ou dénombrable et que l'on a choisi comme tribu l'ensemble des parties de Ω (càd $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$) alors toute application définie sur Ω est obligatoirement une variable aléatoire. En effet, pour tout $x \in X(\Omega)$, $(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est par définition un sous-ensemble de Ω

remarque 3 (Important!)

Attention! Une autre écriture possible de $(X = x)$ est $X^{-1}(\{x\})$, mais cela ne présuppose en rien que l'application X^{-1} existe c'est à dire que X est bijective! La notation X^{-1} est ici piègeuse!

$$X^{-1}(\{x\}) = (X = x) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$$

D'une manière générale, lorsque U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(U)$ désigne l'ensemble des antécédents des éléments de U par l'application X , c'est à dire $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\}$.

Les notations suivantes sont équivalentes

$$X^{-1}(U) = (X \in U) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in U\}$$



exemple 1:

Si X désigne une v.a.d alors les ensembles suivants sont des événements
(bien mémoriser les différentes notations possibles!)

$$\{X \leq 4\} = (X \leq 4) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq 4\} = X^{-1}(]-\infty, 4])$$

$$\{3 < X\} = (3 < X) = \{\omega \in \Omega | 3 < X(\omega)\} = X^{-1}(]3, +\infty[)$$

$$\{3 < X \leq 4\} = (3 < X \leq 4) = \{\omega \in \Omega | 3 < X(\omega) \leq 4\} = X^{-1}(]3, 4]) = (3 < X) \cap (X \leq 4)$$



exemple 2: variable aléatoire constante

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.

Soit k un réel fixé. On considère l'application constante

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\omega \longmapsto k$

X est bien une variable aléatoire car

- i) $X(\Omega) = \{k\}$ est bien un ensemble fini
- ii) L'événement $(X = k) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = k\} = \Omega$ appartient à $\mathcal{T}$ par définition d'une tribu

A noter que:

- Pour tout réel $x \neq k$, $(X = x) = \emptyset$. On écrirait encore $X^{-1}(\{x\}) = \emptyset$
- De même que l'on écrirait aussi $X^{-1}(\{k\}) = \Omega$

On utilise la notation X^{-1} mais attention X n'est pas bijective et donc n'admet pas de fonction réciproque!



exemple 3: pour définir une v.a. sur Ω fini: pas de pb!

On considère $\Omega = \llbracket 1,6 \rrbracket$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

On considère l'application

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a

- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $(X = 0) = \{1,3,5\} = X^{-1}(\{0\})$ et $(X = 1) = \{2,4,6\} = X^{-1}(\{1\})$
- La va $Y = X^2 - X$ est la variable aléatoire nulle (=constante, égale à zéro)



théorème 1: propriétés des images réciproques

Si X est une variable aléatoire et si $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset X(\Omega)$ alors

$(X \in (A \cup B)) = (X \in A) \cup (X \in B)$	et	$(X \in (A \cap B)) = (X \in A) \cap (X \in B)$
---	----	---

" X appartient à A ou B SIGNIFIE QUE X appartient à A ou X appartient à B "

" X appartient à A et B SIGNIFIE QUE X appartient à A et X appartient à B "

proposition 1 (fonction d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, alors $g \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ notée $g(X)$

exemple: si X est une v.a. réelle alors $\sin(X), X^2, e^X$ sont v.a. réelles aussi



définition 2: loi d'une variable aléatoire, syst. complet associé à une variable

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

- $X(\Omega)$ désigne l'ensemble image de X
- La LOI DE PROBABILITÉ DE LA VARIABLE X , que l'on note P_X , est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$
- La famille d'événement $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements; on l'appelle SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS ASSOCIÉ À LA VARIABLE ALÉATOIRE X .

remarque 4 (notation $\sim$, (spoiler: rien à voir avec la notion d'équivalent vu en Analyse!))

Soient X et Y deux variables aléatoires

- lorsque X et Y suivent la même loi (càd $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $P_X = P_Y$), on note $X \sim Y$
- si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$

1.2 distribution de probabilités pour une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire.

– On note $X(\Omega)$ l'ensemble image de X , càd l'ensemble des valeurs prises par X .



méthode 1: définition pratique d'une variable aléatoire

1. Si $X(\Omega)$ est fini, on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ et $p_i = P(X = x_i) \geq 0$
Il s'agit d'avoir $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
Le SCE lié à X est $((X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)) = ((X = x_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$
2. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on note $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $p_i = P(X = x_i) \geq 0$
Il s'agit d'avoir $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$
Le SCE lié à X est $((X = x_1), (X = x_2), \dots) = ((X = x_i))_{i \in \mathbb{N}}$



exemple 4: exemples de référence

– loi uniforme

On a $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et pour tout i , $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

On a bien $\sum_{i=1}^n p_i = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n = 1$

– loi de Bernoulli de paramètre p

On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $p_0 = P(X = 0) = p$ et $p_1 = P(X = 1) = 1 - p$

On a bien

$$p_0 + p_1 = p + (1 - p) = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 0), (X = 1))$

– Loi binomiale de paramètre (n, p)

On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$

On a bien

$$\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} = (p + (1 - p))^n = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 0), (X = 1), \dots, (X = n))$

– Loi de Poisson (de paramètre $\lambda > 0$)

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout i , $p_i = P(X = i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$

On a bien

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 0), (X = 1), (X = 2), \dots) = ((X = i))_{i \in \mathbb{N}}$

– Loi géométrique de paramètre p

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout i , $p_i = P(X = i) = (1 - p)^{i-1} \cdot p$

On a bien

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p)^{i-1} \cdot p = p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1 - p)^j = p \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 1), (X = 2), \dots) = ((X = i))_{i \in \mathbb{N}^*}$

1.3 Espérance et variance (cas fini: 1ère année)



définition 3: espérance, variance - cas fini

Soit X une v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ soit fini.

i) On appelle ESPÉRANCE DE X , et on note $E(X)$, le réel

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$$

ii) On appelle VARIANCE DE X , et on note $V(X)$, le réel positif

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

iii) On appelle ÉCART-TYPE DE X , et on note $\sigma(X)$, le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

iv) On dit que X est une variable aléatoire CENTRÉE RÉDUITE lorsque $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

rem: l'espérance de la v.a. X correspond à LA MOYENNE DES VALEURS PRISES PAR X PONDÉRÉES PAR LEURS PROBABILITÉS RESPECTIVES.

rem: on verra que lorsque $X(\Omega)$ n'est pas un ensemble fini mais dénombrable alors X ne possèdera pas forcément d'espérance ou de variance!



exemple 5: résultats immédiats en percevant l'espérance comme une moyenne

Montrer les résultats suivants:

1. Si X est la var constante égale à c alors $E(X) = c$ et $V(X) = 0$
2. Si X est une var pour laquelle il existe un réel c tel que $P(X = c) = 1$ alors $E(X) = c$ et $V(X) = 0$
3. s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \omega \in \Omega, m \leq X(\omega) \leq M$ alors $m \leq E(X) \leq M$



théorème 2: théorème de transfert - cas fini

Soit X une v.a. telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et g une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$ est à valeurs réelles

$$\text{Alors } E(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \cdot P(X = x)$$

rem: ce théorème est très important d'un point de vue pratique car il nous permet de déterminer l'espérance de la v.a.r. $g(X)$ sans déterminer sa loi, mais uniquement en connaissant celle de X



théorème 3: linéarité: admis- positivité- croissance

Soient X et Y deux v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$

- Pour tous a et b réels, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (linéarité de l'espérance)
- Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$ (positivité de l'espérance)
- Si $X \geq Y$ alors $E(X) \geq E(Y)$ (croissance de l'espérance)
- Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

démo:

i) et iv) admis!

ii) Soit X une var telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_i \geq 0$ pour tout i .

$$\text{On a par définition } E(X) = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(X = x_i)}_{\geq 0}$$

Comme le produit et la somme de réels positifs sont encore des réels positifs, on a bien $E(X) \geq 0$

iii) Soient X et Y tels que $X \geq Y$ (càd $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq Y(\omega)$).

Comme $X - Y \geq 0$ on a d'après ii) $E(X - Y) \geq 0$

et par linéarité de l'espérance $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$. On a montré que $E(X) - E(Y) \geq 0$

♥ théorème 4:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ avec $X(\Omega)$ fini

1. Si X est une v.a. constante (égale à k), on a $E(X) = k$ et $V(X) = 0$
2. $V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$
3. Pour tous réels a et b : $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$
4. $V(X) = 0$ ssi l'événement " X est constante" est presque certain ($\iff \exists \mu \in \mathbb{R}, P(X = \mu) = 1$)
5. Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

démo

1. Pour plus de lisibilité nous noterons $\mu = E(X)$ (μ est une constante).

On a $(X - E(X))^2 = (X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$

Par linéarité de l'espérance on a donc

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{=\mu} + \mu^2 \underbrace{E(1)}_{=1} = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

2. Il suffit d'exploiter les formules précédentes, en particulier la linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 \\ &= E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b \underbrace{E(1)}_{=1})^2 \\ &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 \underbrace{E(1)}_{=1} - (a^2 E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= a^2 (E(X^2) - (E(X))^2) = a^2 V(X) \end{aligned}$$

3. On note $X(\Omega) = \{x_i | i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ et $P(X = x_i) = p_i$. (on suppose les x_i distincts)

Supposons que $V(X) = 0$

On a

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = 0$$

Or une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul.

On a donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = 0$$

Comme $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, on a au moins un des $p_i \neq 0$ et donc il existe i_0 tel que $p_{i_0} \neq 0$ et $x_{i_0} = \mu$

Comme les x_i sont distincts, on a alors $\forall i \neq i_0, p_i = 0$

et on en déduit alors que $p_{i_0} = 1$

On a montré que $P(X = \mu) = 1$ cqfd !

Réciproquement, on suppose que $\exists \mu \in \mathbb{R}, P(X = \mu) = 1$

♠ exemple 6: utilisation du théorème de transfert ou calcul de la loi

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $Y = (-1)^X$ et $Z = \frac{Y+1}{2}$

Déterminer les espérances et variances de Y et Z

2 Lois à connaître

2.1 Loi uniforme(rappel)



définition 4: loi uniforme (sur un ensemble fini forcément!)

Soit X une variable aléatoire sur Ω fini, telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (on a $n = \text{card}(X(\Omega))$)

On dit que X SUIT LA LOI UNIFORME SUR Ω lorsque $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ (constante).

On écrit $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$

cas particulier important:

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque:

1. $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$

2. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $P(X = i) = \frac{1}{n}$

On écrit donc $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\}) = \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Le système complet d'événements associés à X est $(X = i)_{1 \leq i \leq n}$

On utilise cette loi dans les situations d'équiprobabilité (par exemple on tire un dé équilibré à n faces et on note X le nombre tiré)



théorème 5: (Hors-programme)

Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Alors:

i) $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

ii) $G_X(t) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{n}(t+t^2+\dots+t^n)$ et $R = \infty$

démo:

on utilisera $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n i \cdot P(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^n P(X=i) \cdot i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot i^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{et ainsi } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \dots = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\text{De plus, } \forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{i=1}^n P(X=i)t^i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} t^i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t^i$$

$$\text{et ainsi } \forall t \neq 1, \frac{1}{n} \cdot \frac{t-t^{n+1}}{1-t}$$

2.2 Loi de Bernoulli de paramètre p

Contexte usuel: Il s'agit de modéliser l'expérience la plus simple qui soit (appelée "**ÉPREUVE DE BERNOULLI**"): elle ne possède que deux issues possibles, appelées conventionnellement Succès et Echec. L'événement $(X = 1)$ correspondra au Succès et l'événement $(X = 0)$ correspondra à l'Echec.



définition 5: loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0,1]$.

On dit que X SUIT LA LOI DE BERNOULLI DE PARAMÈTRE p lorsque:

1. $X(\Omega) = \{0,1\}$
2. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p = q$

On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou encore $X \sim \mathcal{B}(1,p)$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = 0), (X = 1))$

remarque 5

Si X suit une loi de Bernoulli alors pour tout $n \geq 1$, $X^n = X$



théorème 6:

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$

- i) $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p) = pq$
- ii) $G_X(t) = 1 - p + pt$ et $R = \infty$

démo:

- i) $E(X) = P(X = 0).0 + P(X = 1).1 = p$
- ii) $E(X^2) = P(X = 0).0^2 + P(X = 1).1^2 = p$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- iii) $G_X(t) = P(X = 0).t^0 + P(X = 1).t^1 = 1 - p + pt = q + pt$



exemple 7: fonction indicatrice: exemple important de v.a. de Bernoulli

Soit A un événement (c'est à dire un élément de $\mathcal{T}$).

On appelle fonction indicatrice de A la fonction notée $\mathbf{1}_A$, définie par

$$\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction indicatrice de A vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon

Dans l'exemple 3, la variable aléatoire X n'est rien d'autre que la fonction indicatrice de l'événement $A = \text{"le nombre tiré est pair"}$

1. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire discrète.
2. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a. de Bernoulli. De quel paramètre?
3. Déterminer la variance et l'espérance de $\mathbf{1}_A$
4. Soient A et B deux événements, montrer que:

i) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$

ii) $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$

iii) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}$

(La solution est à la dernière page.)

2.3 Loi binomiale V136

Contexte usuel: on modélise une expérience (appelée "**SCHÉMA DE BERNOULLI**") consistant en LA RÉPÉTITION DE n ÉPREUVES DE BERNOULLI IDENTIQUES (CÀD DE MÊME LOI $\mathcal{B}(p)$) ET INDÉPENDANTES, et on note X le nombre total de succès.

La variable X prend toutes les valeurs comprises entre 0 et n ; la probabilité que $(X = k)$ est égale à la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'obtenir p succès et $n-p$ échecs, multipliée par le nombre de façons d'obtenir cette configuration, c'est à dire le coefficient binomial " k parmi n "



définition 6: loi binomiale de paramètres n et p

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in [0,1]$.

On dit que X SUIT LA LOI BINOMIALE DE PARAMÈTRES n ET p lorsque:

1. $X(\Omega) = \{0, \dots, n\} = \llbracket 0, n \rrbracket$
2. pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = i))_{0 \leq i \leq n}$



théorème 7:

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- i) $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$
- ii) $G_X(t) = (1-p+pt)^n = (q+pt)^n$ et $R = \infty$



exemple 8: lien entre ÉPREUVE DE BERNOULLI et SCHÉMA DE BERNOULLI

Une expérience consiste à lancer 10 pièces de monnaie toutes équilibrées.

On numérote chaque pièce avec un numéro de 1 à 10.

On considère:

- X la variable aléatoire égale au nombre total de Faces obtenus.
- X_i la variable de Bernoulli égale un si la pièce numérotée i donne Face et zéro sinon
- Le lancer de la pièce numérotée i correspond à **une épreuve de Bernoulli** pour lequel le succès consiste à obtenir Face.
On a donc $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$
- $X \sim \mathcal{B}(10, 1/2)$ car on reconnaît typiquement **un schéma de Bernoulli** dans lequel la variable aléatoire X compte le nombre de succès.
- Comme toutes les pièces ont des comportements indépendants les unes des autres, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ sont indépendantes.
- et puis $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$



exemple 9: probabilité qu'une variable soit paire

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Calculer $P(X \text{ pair}) - P(X \text{ impair})$.

En déduire $P(X \text{ pair})$ et $P(X \text{ impair})$

2.4 Loi géométrique

Expérience type : On procède à une succession d'expériences de type Succès -Echec("**ÉPREUVE DE BERNOULLI**") jusqu' à obtenir un premier succès. Les expériences sont supposées indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0,1[$, et on note X le rang du premier succès.
La loi de X est calculée dans l'exemple 10.



définition 7: loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que X suit une LOI GÉOMÉTRIQUE DE PARAMÈTRE p sur $\mathbb{N}^*$ lorsque:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}p$

On écrit : $X \sim \mathcal{G}(p)$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = k))_{k \geq 1}$



théorème 8:

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$

- i) $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$
- ii) $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ et $R = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}$



exemple 10: répétitions d'un nombre infini d'expériences identiques indépendantes

On réalise une infinité d'expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p . On note X le rang du premier succès (et $X = 0$ au cas où aucun succès n'est observé).

Donner la loi de X .

Solution

- On note pour tout $i \in \mathbb{N}^*, E_i = \text{"échec au } i\text{-ème tirage"}$
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $P(X = 1) = P(\overline{E_1}) = p$
- $P(X = 2) = P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1)P(\overline{E_2}) = q.p$ car E_1 et E_2 indépendants
- d'une manière plus générale, soit $k \geq 1$

$$P(X = k) = P(E_1 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap \overline{E_k}) = P(E_1) \dots P(E_{k-1})P(\overline{E_k}) = q^{k-1}.p$$

car les événements $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont indépendants

- Reste à déterminer $P(X = 0)$!

Comme $((X = k))_{k \geq 0}$ est un SCE on a $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$

On a déjà

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

On en déduit que $P(X = 0) = 0$ (!)

rem: dans ce cas, $((X = k))_{k \geq 1}$ est un quasi-SCE

2.5 Loi de Poisson



définition 8: La loi de Poisson n'est pas associée à une expérience type!

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

On dit que X SUIT LA LOI DE POISSON DE PARAMÈTRE λ lorsque:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

On écrit $\boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = k))_{k \in \mathbb{N}}$



théorème 9:

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

- i) $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$
- ii) $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda \cdot (t-1)} = \exp(\lambda \cdot (t-1))$ et $R = \infty$



théorème 10: somme de variables indépendantes suivant une loi de Poisson

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes,
et telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ alors:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

En particulier, si X_1 et X_2 sont 2 variables indépendantes
telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

3 Indépendance de variables aléatoires discrètes

3.1 Indépendance deux à deux, mutuelle indépendance



définition 9: indépendance de deux variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

LES VARIABLES ALÉATOIRES X ET Y SONT DITES INDÉPENDANTES, et on note $X \perp Y$, lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x).P(Y = y)$$

rem: on peut aussi préférer les notations plus légères

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x).P(Y = y) \text{ ou } P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$$

Cela correspond à dire que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si le fait que X prenne une valeur donnée est indépendant du fait que Y prenne une valeur donnée.



théorème 11: admis

Deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A).P(Y \in B)$$

C'est à dire lorsque les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont des ÉVÉNEMENTS indépendants



exemple 11:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

On peut donc écrire par exemple

$$P(X \leq 10 \cap Y \in \{1, 3\}) = P(X \leq 10).P(Y \in \{1, 3\})$$

ou

$$P(X \leq 5 \cap Y \geq 3) = P(X \leq 5).P(Y \geq 3)$$

remarque 6

On étend naturellement cette notion d'indépendances au cas de n variables aléatoires:

– les v.a. $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dites indépendantes lorsque

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

– cela revient aussi à dire que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall A_i \subset X_i(\Omega)$ on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$



théorème 12: fonctions de variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes

Soient f et g deux fonctions

Si $X \perp Y$ alors $f(X) \perp g(Y)$

exemple: si $X \perp Y$ alors $X^2 \perp \sin(2Y) + e^Y$

rem: se généralise bien sûr au cas de n v.a.

théorème 13: lemme des coalitions

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes

alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi

rem: ce résultat se généralise à plus de 2 coalitions

rem: ce lemme indique en particulier que si des va sont indépendantes alors elles sont indépendantes deux à deux (réciproque fausse comme d'habitude)

exemple 12:

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq 6}$ des variables aléatoires indépendantes.

Le lemme des coalitions permet d'affirmer que

- X_1 et X_5 sont deux va indépendantes
- $X_1 + 3X_2^2$ et $X_4^2 + X_5 - 2X_6$ sont deux va indépendantes
- X_1 et $X_2^2 + \cos(X_3)$ et $X_4 - X_6$ sont trois va indépendantes

exemple 13:

Soient X et Y deux variables indépendantes qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}(\{-1, +1\})$.

On considère la v.a $Z = XY$

Montrer que X, Y et Z sont des variables indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes.

exemple 14:

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq 6}$ des variables indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$.

On note $S_1 = \max(X_1, X_3, X_5)$ et $S_2 = \max(X_2, X_4, X_6)$ ainsi que $S = S_1 + S_2$

Déterminer la loi de S

exemple 15:

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.

On note $M = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ déterminer $P(M \geq k)$ puis la loi de M

3.2 Modélisation du jeu de pile ou face infini

- Le jeu de pile ou face infini est modélisé par une suite de variables indépendantes et identiquement distribués (iid) de variables de Bernoulli.
- On considère $(X_n)_{n \geq 1}$ une telle suite avec $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ avec p la probabilité (par exemple) d'obtenir un Face
- Le nombre de Face obtenus lors des n premiers lancers est une variable aléatoire $N \sim \mathcal{B}(n, p)$
- Le rang d'obtention du premier Face est une variable aléatoire $R \sim \mathcal{G}(p)$
- On a également $R = \min(n \geq 1 \mid X_n = 1)$

3.3 Somme de variables aléatoires

♥ théorème 14: loi de la somme de deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = X + Y$. Alors:

- i) Z est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (Y = n - k))$$

- ii) Si de plus les deux variables sont indépendantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k) \cdot P(Y = n - k)$$

démonstration:

- Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, un système complet d'événements est $((X = k))_{k \geq 0}$.
On sait alors que pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B \cap (X = k))$$

- Pour $n \geq 0$ fixé. On considère l'événement $B = (Z = n) = (X + Y = n)$, on a alors

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((Z = n) \cap (X = k))$$

or

$$(Z = n) \cap (X = k) = (X + Y = n) \cap (X = k) = (Y = n - k) \cap (X = k)$$

d'où

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((Y = n - k) \cap (X = k))$$

- Comme $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, l'événement $(Y = n - k)$ est l'événement impossible quand $k > n$,
et donc $P(Y = n - k) = 0$ quand $k > n$.

La somme précédente est donc égale à $P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (Y = n - k))$

♥ théorème 15: somme de v.a. indépendantes suivant une même loi de Bernoulli

- Soit $p \in]0, 1[$.

Si $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{B}(p)$

Alors $X = \sum_{k=1}^n X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$

(l'exemple 8 fournit l'idée de la démonstration sans calcul)

- (c'est la réciproque)

Soit $p \in]0, 1[$ et $n \geq 1$ un entier.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Il existe n v.a. $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$, telle que $X = \sum_{k=1}^n X_k$.

rem: une v.a. qui suite une loi binomiale peut être vue comme la somme de variables de Bernoulli indépendantes

démonstration du théorème 15

1. Soient $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{B}(p)$

– **initialisation pour $n = 2$.**

Notons $Y_2 = X_1 + X_2$.

– Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$, on a $Y_2(\Omega) = \{0,1,2\}$

$$- P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) \underset{\perp}{=} P(X_1 = 0).P(X_2 = 0) = q.q = \binom{2}{0}.p^0.q^2$$

$$- P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) \underset{\perp}{=} P(X_1 = 1).P(X_2 = 1) = p.p = \binom{2}{2}.p^2.q^0$$

$$- P(Y_2 = 1) = 1 - P(Y_2 = 0) - P(Y_2 = 2) = 1 - p^2 - (1 - p)^2 = 2p - 2p^2 = 2pq = \binom{2}{1}.p^1.q^2$$

On a bien $Y_2 \sim \mathcal{B}(2,p)$

– **hérédité: on suppose la propriété vraie pour $m \geq 2$**

càd $Y_m = \sum_{k=1}^m X_k \sim \mathcal{B}(m,p)$.

Notons $Y_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} X_k = Y_m + X_{m+1}$

– Comme $Y_m(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$ et $Y_{m+1} = \{0,1\}$, on a $Y_{m+1}(\Omega) = \llbracket 0, m+1 \rrbracket$

– Comme les v.a $(X_k)_{1 \leq k \leq m}$ sont indépendantes, d'après le **lemme des coalitions**, on a $Y_m \perp\!\!\!\perp X_{m+1}$

$$- P(Y_{m+1} = 0) = P(Y_m = 0, X_{m+1} = 0) \underset{\perp}{=} P(Y_m = 0).P(X_{m+1} = 0) = \binom{m}{0}.p^0.q^m.q = q^{m+1} = \binom{m+1}{0}.p^0.q^{m+1}$$

– Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$(Y_{m+1} = i)$ est l'union disjointe de $(Y_m = i, X_{m+1} = 0)$ et $(Y_m = i-1, X_{m+1} = 1)$.

Ainsi, par l'indépendance identifiée plus haut

$$\begin{aligned} P(Y_{m+1} = i) &= P(Y_m = i, X_{m+1} = 0) + P(Y_m = i-1, X_{m+1} = 1). \\ &= P(Y_m = i).P(X_{m+1} = 0) + P(Y_m = i-1).P(X_{m+1} = 1). \\ &= \binom{m}{i}.p^i.q^{m-i}.q + \binom{m}{i-1}.p^{i-1}.q^{m+1-i}.p \\ &= \binom{m}{i}.p^i.q^{m+1-i} + \binom{m}{i-1}.p^i.q^{m-i+1} \\ &= \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right).p^i.q^{m-i+1} \\ &= \binom{m+1}{i}.p^i.q^{m+1-i} \quad \text{triangle de Pascal} \end{aligned}$$

On a montré que $\forall i \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket, P(Y_{m+1} = i) = \binom{m+1}{i}.p^i.q^{m+1-i}$ càd $Y_{m+1} \sim \mathcal{B}(m+1,p)$

2. Démonstration sans calcul des points 1 et 2.

Il s'agirait simplement de généraliser l'exemple 8 avec une épreuve de Bernoulli de paramètres n et p .



exemple 16: somme de 2 binomiales indépendantes de même paramètre de succès

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

(On pourra utiliser la formule de $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$)

4 Loi conjointe, lois marginales



définition 10:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

UN COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES est un couple (X, Y) où X et Y sont deux variables aléatoires réelles, c'est à dire UN COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} Z = (X, Y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

rem: on montre que $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire et bien sûr $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.



définition 11:

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

- LES LOIS MARGINALES sont les lois de X et de Y
- LA LOI CONJOINTE du couple (X, Y) est la donnée des valeurs prises par (X, Y) et des réels

$$P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x, Y = y) \text{ où } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)$$

rem: on présente souvent, dans le cas fini, la loi conjointe à l'aide d'un tableau

rem: si $P(Y = y) = 0$ alors $\forall x \in X(\Omega), P((X = x) \cap (Y = y)) = 0$



exemple 17:

On considère une urne contenant 3 boules rouges et 4 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise et on note X_1 [resp. X_2] la va qui vaut 1 si une boule rouge a été tirée au premier [resp. deuxième] tirage et 0 sinon.

Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) ainsi que les lois marginales.



méthode 2: Comment déterminer les lois marginales à l'aide de la loi conjointe

Grâce aux systèmes complets d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ d'une part, et $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$ d'autre part, on a

- la loi de X à l'aide de la loi conjointe est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

- la loi de Y à l'aide de la loi conjointe est donnée par

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

Plus précisément:

- dans le cas où $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est fini, on a $P(X = x) = \sum_{j=1}^n P((X = x) \cap (Y = y_j))$
- dans le cas où $Y(\Omega) = \{y_j | j \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, on a $P(X = x) = \sum_{j=0}^{\infty} P((X = x) \cap (Y = y_j))$

remarque: $((X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un SCE

exemple: si X et Y sont deux v.a. de Bernoulli, le SCE de $Z = (X, Y)$ est

$$((X = 0, Y = 0), (X = 1, Y = 0), (X = 0, Y = 1), (X = 1, Y = 1))$$

remarque 7

- La connaissance de la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales. (cf. ci-dessus)
- La connaissance des lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe, comme le prouve le tableau ci-dessous

$X \setminus Y$	0	1	.
0	c		a
1			
	b		



définition 12: loi conditionnelle d'une va sachant un événement

Soit X une variable aléatoire et A un événement.

On appelle LOI CONDITIONNELLE DE X SACHANT L'ÉVÉNEMENT A l'application

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto P_A(X=x) = \frac{P((X=x) \cap A)}{P(A)} \end{aligned}$$

autrement dit, c'est la distribution des réels $P_A(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Il s'agit donc de calculer $P_A(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$



exemple 18:

Soit (X,Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	.	.
1	0.08	0.04	0.16	0.12		
2	0.04	0.02	0.08	0.06		
3	0.08	0.04	0.16	0.12		

$Z \setminus T$	1	2	3	4	.	.
1	.	.	.	.		
2						
3						

1. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y)
2. Si l'on souhaite regarder si X et Y sont indépendantes, combien de vérifications devrait-on effectuer?
En effectuer quelques unes.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=2)$ puis celle de X sachant $(Y=3)$
4. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$. Déterminer la loi conjointe du couple (Z,T)



exemple 19: Poisson et Binomiale

On suppose que le nombre N de clients allant en caisse suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Le magasin dispose de 2 caisses et chaque client se dirige au hasard et indépendamment des autres clients vers la caisse 1 avec une probabilité p ou vers la caisse 2 avec une probabilité $q = 1 - p$

On note N_1 le nombre de clients se dirigeant vers la première caisse.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer la loi de N_1 sachant $(N=n)$
2. Déterminer la loi de N_1 . Remarque?

Correction de l'exemple 7

1. Il s'agit d'utiliser la définition 1

- $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$ est bien un ensemble au plus dénombrable car de cardinal deux.
- $(\mathbf{1}_A = 1) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{1}_A(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\} = A$
- $(\mathbf{1}_A = 0) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{1}_A(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in \bar{A}\} = \bar{A}$
- Comme A est un événement ($\bar{A}$ est alors forcément un événement aussi), et on a bien prouvé que $(\mathbf{1}_A = 0)$ et $(\mathbf{1}_A = 1)$ étaient des événements.

2. Comme $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$, on a bien $\mathbf{1}_A$ qui est une variable de Bernoulli.

Par définition le paramètre de cette v.a. est $p = P(\mathbf{1}_A = 1)$ et donc $p = P(A)$!

$$\boxed{\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))}$$

3. Comme $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$, on a

$$E(\mathbf{1}_A) = P(A) \quad \text{et} \quad E(\mathbf{1}_A) = P(A) \cdot (1 - P(A)) = P(A) \cdot P(\bar{A})$$

4. On va envisager tous les cas possibles en considérant une partition judicieuse de Ω

	$x \in A \cap B$	$x \in A \cap \bar{B}$	$x \in \bar{A} \cap B$	$x \in \bar{A} \cap \bar{B}$
$\mathbf{1}_A(\omega)$				
$\mathbf{1}_B(\omega)$				
$\mathbf{1}_{\bar{A}}(\omega)$				
$\mathbf{1}_{A \cap B}(\omega)$				
$\mathbf{1}_{A \cup B}(\omega)$				
$1 - \mathbf{1}_A(\omega)$				
$\mathbf{1}_A(\omega) \cdot \mathbf{1}_B(\omega)$				
$\mathbf{1}_A(\omega) + \mathbf{1}_B(\omega) - \mathbf{1}_A(\omega) \cdot \mathbf{1}_B(\omega)$				