

C22 - ESPACES PROBABILISES

Table des matières

1	Probabilité	1
2	Probabilité conditionnelle	4
3	Système complet d'événements, formule des probabilités totales	6
4	Événements indépendants	11
5	Continuité croissante et décroissante	12
6	Démonstrations	14

1 Probabilité



définition 1: rappel de la définition de sup dans le cas Ω fini

Soit Ω un ensemble fini.

On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ telle que:

- i) $P(\Omega) = 1$
- ii) Pour tout couple d'événements disjoints A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité finie)

Il est facile de vérifier que cette définition est compatible avec la définition 2 plus générale lorsque l'on prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu



définition 2: axiomes des probabilités

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.

On appelle PROBABILITÉ SUR $(\Omega, \mathcal{T})$ une application $P : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ telle que

- i) $P(\Omega) = 1$
- ii) Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles on a

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

(La définition implique implicitement que la série est convergente.)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ s'appelle UN ESPACE PROBABILISÉ

Un espace probabilisé est donc la donnée d'un univers, de l'ensemble des événements(=la tribu) et d'une probabilité pour chacun de ces événements

On rappelle que deux à deux incompatibles signifie deux à deux disjoints c'est à dire que $\forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$

Les propriétés suivantes, valables sur un espace probabilisé fini, sont aussi valables sur un esp. proba. dénombrable!

♥théorème 1:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé dénombrable ou fini :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Si A est un évènement alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. Si A et B sont deux évènements, tels que $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ *(croissance)*
4. Si A et B sont deux évènements, alors
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
 - si de plus A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(additivité finie)*
 - $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

♠exemple 1: formule du crible de Poincaré(HP)

Soient $A_1, A_2, \dots, A_N$ des évènements (on ne les suppose pas 2 à 2 disjoints)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Par exemple pour $N = 3$ cela donne

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

à savoir redémontrer en posant $B = A_2 \cup A_3$ et en utilisant le 4 du théorème 1

♥théorème 2: probabilité d'une union

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. cas d'une union finie :

- pour tout entier N , on a $P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) \leq \sum_{n=0}^N P(A_n)$
- Si de plus les évènements sont incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = \sum_{n=0}^N P(A_n)$

2. cas d'une union dénombrable :

- Si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge alors on a $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$
- Si de plus les évènements sont incompatibles 2 à 2, on a $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$

"LA PROBABILITÉ DE L'UNION EST MAJORÉE PAR LA SOMME DES PROBABILITÉS"

"QUAND ON CALCULE LA PROBABILITÉ D'UNE UNION, ON SE DEMANDE SI CETTE UNION EST DISJOINTE 2 À 2"

remarque 1 (Très importante)

Pour calculer la probabilité d'une union on se demande si cette union est disjointe deux à deux.

- Si c'est le cas: la probabilité de l'union est égale à la somme des probabilités
- Si ce n'est pas le cas: on peut juste dire que la probabilité de l'union est majorée par la somme des probabilités



définition 3: événement négligeable

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé,

Un événement A est dit NÉGLIGEABLE OU PRESQUE IMPOSSIBLE lorsque $P(A) = 0$

Un événement A est dit PRESQUE SÛR OU PRESQUE CERTAIN lorsque $P(A) = 1$

$\emptyset$ est un événement négligeable, ce n'est peut-être pas le seul.

Ω est un événement presque certain, ce n'est peut-être pas le seul.

rem: à noter que ces notions dépendent de la probabilité choisie: un événement peut être négligeable pour une probabilité mais pas pour une autre!



exemple 2: un exemple classique d'événement négligeable

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce de monnaie équilibrée une infinité de fois.

On note

- A l'événement "On n'obtient que des Faces lors de cette infinité de lancers"
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement "les n -premiers lancers donnent toujours Face"

1. Donner $P(F_n)$ pour tout $n \geq 1$
2. Y a-t-il une relation d'inclusion entre A et F_n ?
3. En déduire que A est un événement négligeable.



exemple 3: probabilité uniforme

1. cas où Ω est fini: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

On appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité P pour laquelle **tous les événements élémentaires ont la même probabilité.**

Comme la somme des probabilités élémentaires doit valoir un, on a donc

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$$

2. cas où Ω est dénombrable: $\Omega = \{\omega_i / i \in \mathbb{N}\}$.

Il n'existe pas de probabilité uniforme sur Ω !

En effet, **supposons qu'une telle probabilité existe** et notons c la probabilité commune à tous les événements élémentaires.

On sait que la série $\sum P(\{\omega_i\})$ doit être une série convergente (de somme égale à un).

- Notons S_n la somme partielle d'indice n de la série précédente.

On a

$$\forall n \geq 0, S_n = \sum_{i=0}^n P(\{\omega_i\}) = (n+1).c$$

Or si $c \neq 0$, il est clair que la suite (S_n) est divergente, ce qui signifie que la série $\sum P(\{\omega_i\})$ diverge.

Nous venons de prouver que $c = 0$

- Mais alors on a $P(\Omega) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0 \neq 1$

contradiction!

- ON RETIENDRA QU'IL N'EXISTE PAS DE PROBABILITÉ UNIFORME SUR UN UNIVERS DÉNOMBRABLE,
- SUR UN UNIVERS FINI LA PROBABILITÉ UNIFORME VÉRIFIE $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ POUR TOUT ÉVÉNEMENT A

2 Probabilité conditionnelle



définition 4: probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, tel que $P(B) > 0$.

On appelle PROBABILITÉ CONDITIONNELLE DE A SACHANT B , et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, le réel

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

rem: on rappelle que $A|B$ ne désigne pas un événement!



théorème 3:

Soit B un évènement de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, tel que $P(B) > 0$.

Alors l'application $P_B : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$,

$$A \mapsto P_B(A)$$

on l'appelle LA PROBABILITÉ CONDITIONNÉE À B

démonstration: on montre que P_B vérifie les axiomes d'une probabilité

- i) P_B est clairement à valeurs positives
- ii) $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ car $\Omega \cap B = B$
- iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles.

Notons pour tout n , $C_n = B \cap A_n$.

La suite d'évènements $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore une suite d'évènements deux à deux incompatibles.

En effet: soit $n \neq m$

$$\text{On a } C_n \cap C_m = (A_n \cap B) \cap (A_m \cap B) = (A_n \cap A_m) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

Comme P est une probabilité on peut écrire

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(C_n)$$

$$\text{Or } B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

$$\text{donc } P\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)$$

Ainsi

$$P\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$$

En divisant chaque membre de cette égalité par $P(B) > 0$ cela donne

$$\frac{P\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{c'est à dire } P_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n)$$

♥ théorème 4: formule de Bayes ou des causes

Soient A et B deux évènements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, tel que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$
On a

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$$

rem: cela provient simplement de l'égalité évidente

$$P(B)P_B(A) = P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

♥ théorème 5: Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé,

et $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite finie d'évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \cdot P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

En particulier pour $n = 3$ cela donne $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$

rem: cette formule permet de calculer une intersection d'un nombre fini d'évènements

démo dans le cas $n = 3$ et $n = 4$

♠ exemple 4:

Dans une urne se trouvent 3 boules vertes et 3 boules rouges.

On extraie successivement, sans remise, 3 boules en suivant la règle suivante: si la boule extraite est verte, on ajoute deux boules rouges, sinon on ajoute deux boules vertes.

Déterminer la probabilité de tirer successivement 3 boules vertes.

Solution

3 Système complet d'événements, formule des probabilités totales



définition 5: système complet d'événements (SCE)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. Une suite finie $(A_n)_{n \in [1, N]}$ d'événements est un SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS lorsque:

- i) les événements sont 2 à 2 disjoints: $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) l'union est l'univers tout entier: $\bigcup_{n \in [1, N]} A_n = \Omega$

2. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements est un SYSTÈME COMPLET DÉNOMBRABLE D'ÉVÉNEMENTS lorsque:

- i) les événements sont 2 à 2 disjoints: $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) l'union est l'univers tout entier: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

rem: Une famille d'événements est un SCE ssi chaque élément de Ω appartient à un et un seul des événements de la famille.

càd, ssi un et un seul des événements de la famille se réalise lorsque l'expérience aléatoire se déroule

rem:(cas important) si A est un événement alors $(A, \bar{A})$ est un SCE

illustration d'un SCE comme partition de Ω ou comme un arbre



exemple 5: savoir reconnaître un SCE

Expérience aléatoire: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.

Indiquer si les familles suivantes sont des SCE

1. $\mathcal{F} = (A, B)$ avec $A = \text{"le premier lancer a donné pile"}$, $B = \text{"le premier lancer a donné face"}$
2. $\mathcal{F} = (A, B)$ avec $A = \text{"le premier lancer a donné pile"}$, $B = \text{"le second lancer a donné face"}$
3. $\mathcal{F} = (A, B, C)$ avec $A = \text{"le premier lancer a donné pile"}$, $B = \text{"le second lancer a donné face"}$ et $C = \text{"le second lancer a donné pile"}$
4. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in [0, 4]}$ avec $A_n = \text{"on a obtenu exactement } n \text{ Piles avec les quatre premiers lancers"}$
5. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n = \text{"on a obtenu Face au } n\text{-ième lancer"}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 = \text{"aucun lancer n'a donné Face"}$
6. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $A_n = \text{"on a obtenu Face pour la première fois au } n\text{-ième lancer"}$ où $n \in \mathbb{N}^*$
7. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n = \text{"on a obtenu Face pour la première fois au } n\text{-ième lancer"}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 = \text{"aucun lancer n'a donné Face"}$



définition 6: système quasi-complet d'événements

Une suite d'événements $(A_i)_{i \in J}$ est un système quasi-complet d'événements lorsque

- i) les événements sont 2 à 2 disjoints: $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) $P(\bigcup_{i \in J} A_i) = 1$

rem: un système complet d'événements est aussi un système quasi-complet mais la réciproque est fausse



exemple 6:

La famille 6 de l'exemple précédent est un système quasi-complet d'événements

♥ théorème 6: formule des probabilités totales avec un système complet fini

Soit $(A_n)_{n \in [1, N]}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements.

Alors pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^N P(A_n)P(B|A_n) \quad \text{avec la convention } P(A_n).P(B|A_n) = 0 \text{ lorsque } P(A_n) = 0$$

remarque: très souvent on utilise cette formule avec $N = 2$ et $A_2 = \overline{A_1}$:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap \overline{A_1}) = P(A_1).P(B|A_1) + P(\overline{A_1}).P(B|\overline{A_1})$$

♠ exemple 7: trop classique, lien entre SCE et arbre

Dans une fabrique, une étude statistique a montré que le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées est égal à 2%. Pour éliminer les pièces défectueuses, un test de qualité est mis en place dont les résultats sont les suivants:

- le test élimine 99% des pièces défectueuses
- le test élimine 0,5% des pièces non défectueuses.

Questions:

1. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit éliminée à tort.
2. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'a pas été éliminée par le test.

Réponses:

- On note D l'événement "la pièce est défectueuse", et T l'événement "le test élimine la pièce".
- L'énoncé donne $P(D) = 0.02$ $P(T|D) = P_D(T) = 0.99$ et $P(T|\overline{D}) = P_{\overline{D}}(T) = 0.005$

1. La première question revient à calculer $P(T \cap \overline{D})$

On a $P(T \cap \overline{D}) = P(\overline{D}).P(T|\overline{D})$ avec $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.02 = 0.98$.

Ainsi $P(T \cap \overline{D}) = 0.98 \times 0.005 = 0.0049$

2. La deuxième question revient à calculer $P(D|\overline{T}) = P_{\overline{T}}(D)$

On a $P_{\overline{T}}(D) = \frac{P(D)}{P(\overline{T})} P_D(\overline{T})$. Il nous manque $P(\overline{T})$ et $P_D(\overline{T})$.

Comme $(D, \overline{D})$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P_D(T).P(D) + P_{\overline{D}}(T).P(\overline{D}) = 0.99 \times 0.02 + 0.005 \times 0.98 = 0.0247$$

Donc $P(\overline{T}) = 0.9753$

On a $P_D(\overline{T}) = 1 - P_D(T) = 1 - 0.99 = 0.01$ et $P_{\overline{T}}(D) = \frac{0.02}{0.9753} \times 0.01 = 0.0002$ à 10^{-4} près, soit à peu près 0.02%

représentation avec un arbre

♠ exemple 8: avec un nombre fini d'urnes

Dans tout cet exemple, on notera:

- B l'événement la boule tirée est blanche
- A_n l'événement on tire la boule dans l'urne numérotée n

1. Soit $N \geq 1$ un entier fixé.

On dispose de N urnes numérotées de 1 à N .

L'urne numérotée n renferme n boule(s) blanche(s) et $N - n$ boule(s) noire(s).

On choisit au hasard de manière équiprobable une des urnes et l'on extrait une boule.

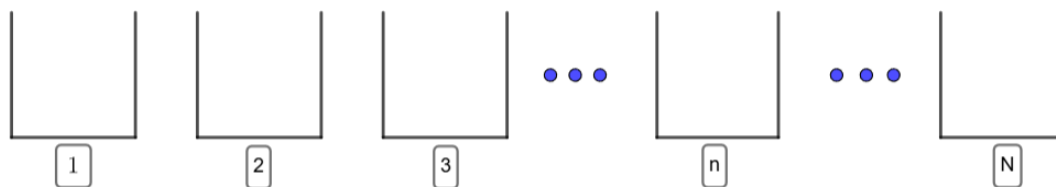
Cette boule est blanche! Quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans l'urne numéro n ?

- Pour tout n on a $P(A_n) =$ et $P(B|A_n) = P_{A_n}(B) =$
- $(A_1, A_2, \dots, A_N)$ est un système complet d'événements (fini) donc d'après la formule des probabilités totales on a

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \cdot \frac{n}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N n = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N}$$

- On cherche pour n fixé $P_B(A_n)$. D'après la formule de Bayes on a

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)}{P(B)} \cdot P_{A_n}(B) = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{N+1}{2N}} \cdot \frac{n}{N} = \frac{2n}{N(N+1)}$$



♥ théorème 7: formule des probabilités totales avec un système complet dénombrable

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) d'évènements

Alors pour tout évènement B ,

la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et
$$P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$$

avec la convention: $P(A_n) P_{A_n}(B) = 0$ si $P(A_n) = 0$

rem: cette convention est justifiée par le fait que $B \cap A_n \subset A_n$ et donc que $P(B \cap A_n) \leq P(A_n) = 0$

démo

♠ exemple 9: avec un nombre dénombrable d'urnes

Dans tout cet exemple, on notera:

- B l'événement la boule tirée est blanche
- A_n l'événement on tire la boule dans l'urne numérotée n
- 2. On dispose d'une infinité d'urnes numérotées par $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'urne numérotée n renferme n boule(s) blanche(s) et 2 boules noires.

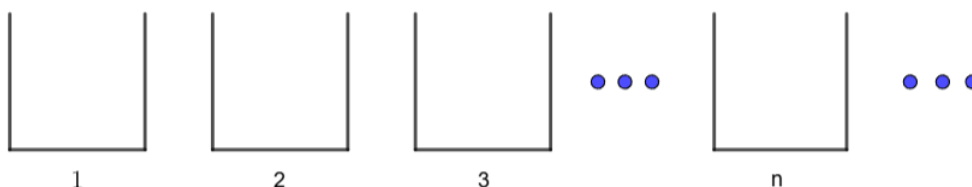
L'expérience consiste à choisir une urne au hasard (*on suppose que $P(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$*), et à en extraire une boule. On se pose les mêmes questions que précédemment

- Pour tout n on a $P_{A_n}(B) =$
- Comme $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (dénombrable) on a d'après la formule des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Un calcul classique prouve que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ et donc $P(B) = \frac{1}{2}$

- Pour n fixé on a cette fois $P_B(A_n) = \frac{P(A_n)}{P(B)} \cdot P_{A_n}(B) = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$



♥ théorème 8: formule de Bayes-deuxième version (à savoir retrouver)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soit B un événement tel que $P(B) > 0$, alors

1. Si $(A_n)_{n \in [1, N]}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements, on a

pour tout $n \in [1, N]$ tel que $P(A_n) > 0$, on a

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{\sum_{k=1}^N P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) dénombrable d'événements, on a

pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(A_n) > 0$, on a

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$



exemple 10: des probabilités en cascade

Une urne contient $2n$ boules : n noires et n blanches . On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. On note B_i l'évènement "la i -ième boule tirée est blanche"

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?
2. On suppose que n est pair (on note $n = 2k$) . Quelle est la probabilité de tirer en alternance une boule blanche, puis une une noire , en commençant par une blanche ?
3. Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une boule blanche ?

Réponse

1. On utilise la formule des probabilités composées:

$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cap B_2) \dots P(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1})$ avec

- $P(B_1) = \frac{n}{2n}$ (il y a n boules blanches et $2n$ boules au total)
- $P(B_2|B_1) = \frac{n-1}{2n-1}$ (il y a $n-1$ boules blanches et $2n-1$ au total)
- $P(B_3|B_1 \cap B_2) = \frac{n-2}{2n-2}$
- $P(B_k|B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) = \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}$ (il y a $n-(k-1)$ boules blanches et $2n-(k-1)$ au total)

d'où
$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \left(\frac{n}{2n}\right) \left(\frac{n-1}{2n-1}\right) \left(\frac{n-2}{2n-2}\right) \dots \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n!}{(2n)!} = \frac{n!^2}{n!}$$

2. On note N_k l'évènement "la k -ième boule tirée est noire" .

On utilise encore la formule des probabilités composées:

$$P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n) = \left(\frac{2k}{4k}\right) \left(\frac{2k}{4k-1}\right) \left(\frac{2k-1}{4k-2}\right) \dots \left(\frac{k+1}{2k+2}\right) \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)$$

Ce qui se simplifie en
$$P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n) = \frac{(2k)!^3}{k!^2(4k)!}$$

3. Notons A l'évènement "ne tirer qu'une boule blanche"

A est la réunion disjointe des événements:

$$(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) \quad , \quad (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n) \quad , \dots , \quad (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$

On a toujours avec la même formule des probabilités composées:

- $P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot n!^2}{(2n)!}$
- $P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot n!^2}{(2n)!}$
- $P(N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4 \cap \dots \cap N_n) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n-2} \cdot \frac{n-2}{2n-3} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot n!^2}{(2n)!}$

Comme A est la réunion disjointe des événements ci-dessus on sait que $P(A)$ est égal à la somme de leurs probabilités, d'où:

$$P(A) = P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n) + \dots + P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$

Comme toutes ces probabilités sont égales cela donne
$$P(A) = n^2 \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

application numérique: pour $n = 4$ on a $P(A) \simeq 23\%$ et pour $n = 10$ on a $P(A) \simeq 0,05\%$

4 Événements indépendants



définition 7: indépendance cas fini

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé

On dit que:

- i) LES ÉVÉNEMENTS A ET B SONT INDÉPENDANTS lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
(c'est à dire $P_B(A) = P(A)$ quand $P(B) > 0$)
- ii) les événements $(A_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont 2 À 2 INDÉPENDANTS lorsque

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \text{ tels que } i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

- iii) les événements $(A_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont (MUTUELLEMENT) INDÉPENDANTS lorsque

$$\text{pour tout sous ensemble } I \subset \{1, \dots, N\}, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

rem 1: **Attention à ne pas confondre indépendant et incompatible!**

rem 2: **il est clair que la (mutuelle) indépendance implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.**

Question malicieuse : pour montrer la mutuelle indépendance de N événements, combien de vérifications doit-on effectuer?

remarque 2 (ne pas confondre indépendants et incompatibles)

- Des événements peuvent être indépendants pour une probabilité P mais ne plus l'être pour une probabilité P_1 !
- En revanche, la notion d'incompatibilité ne dépend pas de la probabilité P choisie sur l'espace.
- Il n'y a pas d'implication entre "indépendant" et "incompatible".

remarque 3 (importante)

QUAND ON CONSIDÈRE LA PROBABILITÉ D'UNE INTERSECTION D'UN NOMBRE FINI D'ÉVÉNEMENTS, ON SE DEMANDE S'IL S'AGIT D'ÉVÉNEMENTS (MUTUELLEMENT) INDÉPENDANTS



exemple 11: l'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.

- ⌚ On lance 2 dés parfaits. A_1 est l'évènement "le premier dé amène un nombre pair", A_2 est l'évènement "le deuxième dé amène un nombre pair", A_3 est l'évènement "la somme des dés est paire".
- ⌚ Montrer que (A_1, A_2, A_3) sont des événements 2 à 2 indép.s mais qu'ils ne sont pas mutuellement indép.

♥théorème 9:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé

- i) Si A et B sont deux événements indépendants
alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, ainsi que $\overline{A}$ et B , ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$
- ii) Si $(A_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont (mutuellement) indépendants et si $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on a $B_i = \overline{A_i}$ ou $B_i = A_i$,
alors $(B_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont (mutuellement) indépendants

Par exemple si on sait que (A_1, A_2, A_3, A_4) sont des événements (mutuellement) indépendants, on peut affirmer que:

- $(A_1, A_2, \overline{A_3}, A_4)$ sont (mutuellement) indépendants
- $(A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4)$ sont (mutuellement) indépendants
- $(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4)$ sont (mutuellement) indépendants
- ...

démonstration du i)

On suppose que A et B sont indépendants, c'est à dire que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

- On a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et cette union est DISJOINTE.

$$\text{d'où } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

et donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A).P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A).P(\overline{B})$$

5 Continuité croissante et décroissante

♠exemple 12:

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ et $D_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$

1. Montrer que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion
2. Montrer que la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion
3. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$
4. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$

ce qui s'écrit encore $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k=0}^n A_k \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

♥théorème 10: continuité croissante

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements pour l'inclusion (c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$).

$$\text{Alors } \boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)}$$

remarques:

- le théorème affirme implicitement l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$
- $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n\right)$ n'a aucun sens car $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ n'a aucun sens!

♥ théorème 11: continuité décroissante

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements pour l'inclusion (*c'est à dire* $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$).

Alors
$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

démonstration du théorème 11 à partir du théorème 10

- Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante d'événements pour l'inclusion

Notons pour tout entier $n, B_n = \overline{A_n}$.

La suite (B_n) est alors une suite croissante d'événements!

D'après le théorème 10, on peut donc affirmer que $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$

Or:

i) $P(B_n) = 1 - P(A_n)$

ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$ et donc $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$

Ainsi $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - P(A_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

🔧 **méthode 1: calcul de** $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right)$ **ou de** $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right)$

⚡ Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (monotone ou pas), on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

⚡ Pour justifier ceci, on introduit la suite d'événements (C_n) ou (D_n) de l'exemple 12 , et on utilise les théorèmes de continuités croissantes ou décroissantes.

♠ exemple 13: exemple important

⚡ On considère l'expérience qui consiste à lancer une infinité de fois une pièce de monnaie.

⚡ On suppose les tirages indépendants et la pièce parfaitement équilibrée.

⚡ On souhaite prouver qu'il est presque impossible de n'obtenir que des Faces.

Notons:

- pour tout $k \geq 1, F_k$ l'événement "Face est sorti au k -ème tirage".
- A l'événement "Face est sorti à tous les tirages".

On a bien sûr
$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite décroissante pour l'inclusion: nous ne pouvons donc appliquer directement la théorème de continuité décroissante!

Nous allons utiliser l'astuce de la méthode 1

6 Démonstrations

démonstration du théorème 10:

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante d'événements.

- i) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ on a $\boxed{\forall n \geq 0, P(A_n) \leq P(A_{n+1})}$

La suite $(P(A_n))_{n \geq 0}$ est donc une suite croissante et majorée (par un),

elle est donc convergente! Conclusion: $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \text{ existe}}$

- ii) On souhaite définir une suite d'événements 2 à 2 disjoints $(B_n)_{n \geq 0}$ telle que $\forall n \geq 0, A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$

On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n - A_{n-1} = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$.

- Soit $j > i$
on a $B_i \subset A_i \subset A_{j-1}$, et $B_j \subset \overline{A_{j-1}}$ donc $B_i \cap B_j = \emptyset$
ceci montre que les événements de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ sont 2 à 2 disjoints.
- Par récurrence sur n , on montre que $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$

i) $A_0 = B_0$ par définition

ii) on suppose que $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$ pour un $n \geq 0$ fixé quelconque

Comme $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$ on a donc $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1} = (\bigcup_{k=0}^n B_k) \cup B_{n+1}$

c'est à dire $A_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n+1} B_k$

- iii) Comme les B_k sont disjoints 2 à 2 on a $\boxed{P(A_n) = P(\bigcup_{k=0}^n B_k) = \sum_{k=0}^n P(B_k)}$ pour tout $n \geq 0$

- iv) On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{k=0}^n B_k)$ et l'on a vu que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{k=0}^n B_k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

On a ainsi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $\boxed{P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)}$

- v) Or d'après la définition d'une probabilité on peut écrire, car $(B_n)_{n \geq 0}$ suite d'événements 2 à 2 incompatibles

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad \text{cqfd!}$$

démonstration du théorème 2, 1, deuxième point

Soit N un entier et $A_1, A_2, \dots, A_N$ des événements 2 à 2 disjoints

Considérons la suite d'événements $(B_n)_{n \geq 0}$ définis par $\begin{cases} B_n = A_n & \text{si } 1 \leq n \leq N \\ B_n = \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

Il est aisé de se convaincre que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles.
en effet:

soient n et m deux entiers distincts

- si $1 \leq n \neq m \leq N$, on a $B_n \cap B_m = A_n \cap A_m = \emptyset$
- sinon on a $B_n = \emptyset$ ou $B_m = \emptyset$ et donc $B_n \cap B_m = \emptyset$

On peut donc affirmer que $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$

Or

$$\text{i) } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n=1}^{n=N} A_n$$

$$\text{ii) } \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = P(B_0) + \sum_{n=1}^N P(B_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(B_n) = 0 + \sum_{n=1}^N P(A_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 0 = \sum_{n=1}^N P(A_n)$$

On a bien prouvé que $\boxed{P(\bigcup_{n=1}^{n=N} A_n) = \sum_{n=1}^N P(A_n)}$