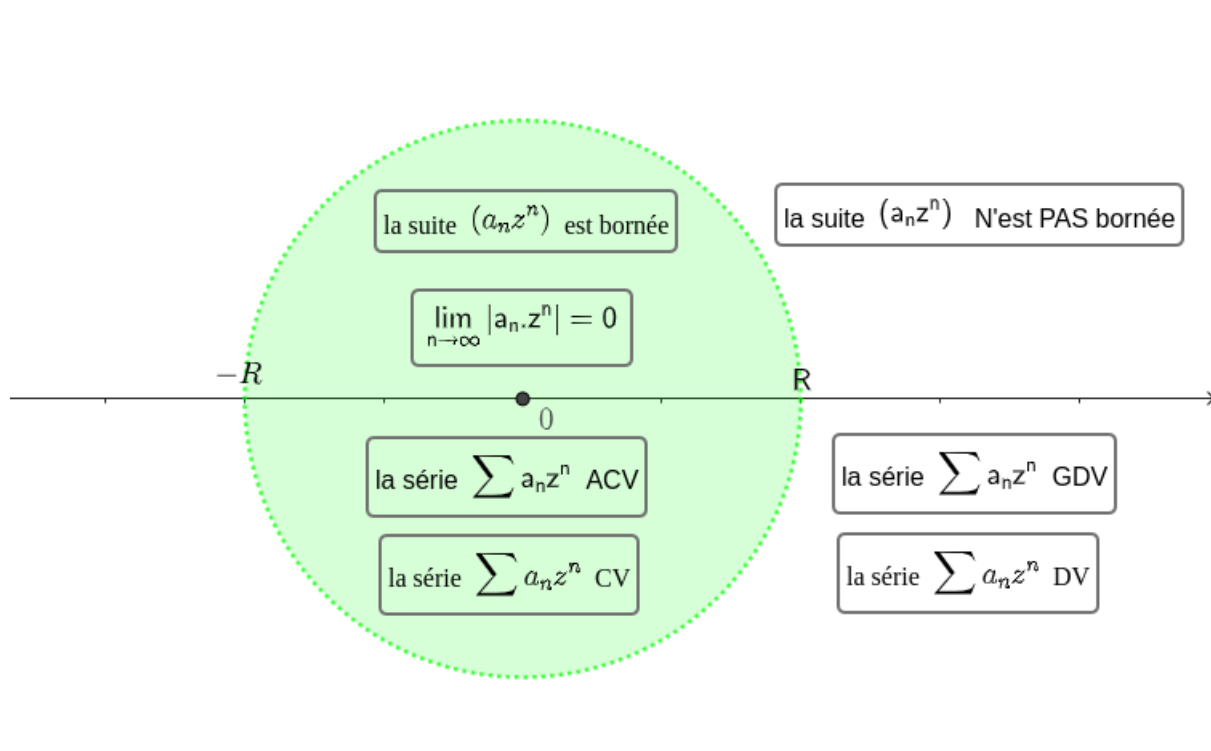


C17 - SÉRIES ENTIÈRES

Table des matières

1 Définitions, rayon	2
1.1 Série entière complexe	2
1.2 Rayon de convergence	2
1.3 Exemples de référence complexes	4
1.4 Série entière réelle	4
2 Quelques résultats sur le rayon	6
2.1 Multiplication par un scalaire non nul	6
2.2 Règle de D'Alembert	6
2.3 théorèmes de comparaison	7
2.4 rayon de la somme de 2 séries entières	8
3 Produit de Cauchy	9
4 Fonction somme d'une série entière complexe	10
5 Fonction somme d'une série entière réelle	11
5.1 Séries entières réelles de référence	11
5.2 Propriétés (admisses) de la fonction somme d'une série entière réelle	12
5.3 Développement en série entière	14
6 Annexe	18
7 Intégration terme à terme	20



1 Définitions, rayon

1.1 Série entière complexe



définition 1: série entière complexe

On appelle SÉRIE ENTIÈRE COMPLEXE toute série de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où les coefficients a_n sont des complexes (indépendants de z) et où z désigne une variable complexe.



exemple 1: savoir reconnaître une série entière

Parmi les séries suivantes, lesquelles sont des séries entières complexes?

- $\sum_{n \geq 0} z^n$
- $\sum_{n \geq 2} z^n$
- $\sum_{n \geq 0} z^{2n}$
- $\sum_{n \geq 0} z^{2n-7}$
- $\sum_{n \geq 3} 2^{n+1} \cdot z^{4n}$
- $z^3 + 4z + 8$

remarque 1

- La locution "série entière" vous semble-t-elle bien adaptée à l'objet qu'elle est censée décrire?
- Remarquons que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est une série entière particulière, qui correspond à une suite (a_n) nulle à partir d'un certain rang.
- lorsque l'on se fixe z , on est ramené à l'étude d'une série numérique: tous les résultats vus dans ce chapitre-ci sont alors applicables!
- une série entière peut s'écrire de différentes manières.

Par exemple :

$\sum_{n \geq 0} (n^2 + n)z^{2n+1}$, $\sum_{n \geq 1} (n^2 - n)z^{2n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} (n^2 - 3n + 2)z^{2n-3}$ désignent la même série entière.

On aura donc parfois intérêt à écrire mentalement la série entière sous forme "étendue" :

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

1.2 Rayon de convergence



théorème 1: lemme d'Abel

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée.

Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Rappel: dire que la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée équivaut à dire que la suite $(|a_n z_0^n|)_{n \geq 0}$ est majorée



définition 2: rayon de convergence

On appelle RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE ENTIÈRE $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ l'élément, noté R , de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n \cdot r^n)_{n \geq 0} \text{ soit bornée}\}$$

càd aussi

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| \cdot r^n)_{n \geq 0} \text{ soit majorée}\}$$

rem: lorsque l'ensemble précédent n'est pas majoré, on convient de poser $R = +\infty$

rem: l'ensemble précédent n'est jamais vide car 0 y appartient

rem: on montre que l'ensemble précédent est un intervalle

rem: on appelle DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$



méthode 1: déterminer le rayon à l'aide de la définition

On détermine les $r \geq 0$ tels que la suite $(|a_n| \cdot r^n)_{n \geq 0}$ soit majorée.

exemple:

Nous allons déterminer le rayon de $\sum_{n \geq 0} z^n$.

Notons $E = \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| r^n)_{n \geq 0} \text{ soit majorée}\} = \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (r^n)_{n \geq 0} \text{ soit majorée}\}$.

Soit $r \geq 0$

- si $r > 1$ on a $\lim r^n = +\infty$ donc $r \notin E$
- si $r \leq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, r^n \leq 1$ donc $r \in E$
- ainsi $E = [0, 1]$
- D'où $R = \text{Rayon}(\sum z^n) = \sup([0, 1]) = 1$



exemple 2:

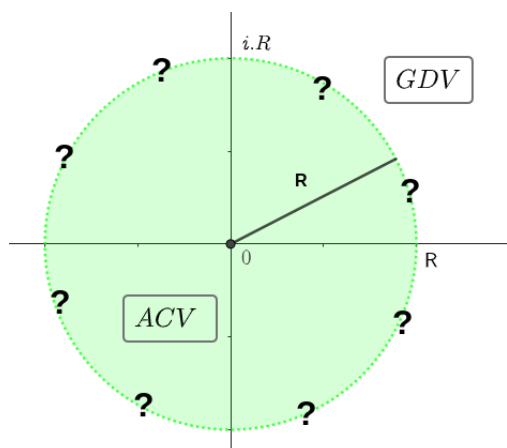
Déterminer le rayon de $\sum_{n \geq 0} n \cdot z^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ et de $\sum_{n \geq 0} 2^{n/2} \cdot z^{2n}$



théorème 2: propriétés caractéristiques du rayon de convergence(important)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

- $R = 0 \iff \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$
- $R = +\infty \iff \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$
- $R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |z| < R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |z| > R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$



1.3 Exemples de référence complexes

Ces résultats ont été établis dans le chapitre "séries numériques"



théorème 3: exemple de référence : la série géométrique

- Le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ est égal à un.
- La série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge [absolument] si et seulement si $|z| < 1$.
- Et l'on a $\forall |z| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$



théorème 4: exemple de référence : l'exponentielle complexe

- La rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$
- La série entière complexe $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout z complexe
- Et l'on a $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

rem: on dit que la fonction $z \mapsto e^z$ est DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE sur $\mathbb{C}$ tout entier

remarque 2

| On rappelle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$

1.4 Série entière réelle



définition 3: série entière réelle

| On appelle SÉRIE ENTIÈRE RÉELLE toute série de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où les coefficients a_n sont des réels (indépendants de x) et où x désigne une variable réelle.



définition 4: rayon de convergence(bis), intervalle ouvert de convergence

| On appelle RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE ENTIÈRE $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ l'élément, noté R , de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| \cdot r^n)_{n \geq 0} \text{ soit majorée}\}$$

| On appelle INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE l'intervalle $] -R, +R[$

remarque 3

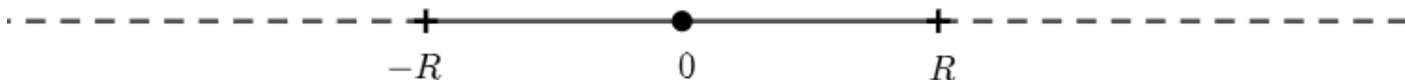
- Une série de rayon R a pour intervalle de convergence soit $[-R, +R]$, soit $[-R, +R[$, soit $] -R, +R]$, soit $] -R, +R[$
- Deux séries de même rayon R ont le même intervalle ouvert de convergence $] -R, +R[$

💡 théorème 5: propriétés caractéristiques du rayon de convergence(bis)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors :

- i) $R = 0 \iff \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$
- ii) $R = +\infty \iff \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$
- iii) $R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |x| < R \text{ (càd } x \in]-R, +R[\text{) } & \text{alors } \sum a_n x^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |x| > R & \text{alors } \sum a_n x^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$



remarque 4

On a aussi:

- i) $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n \cdot r^n)_{n \geq 0} \text{ tend vers } 0\}$
- ii) $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n \cdot r^n)_{n \geq 0} \text{ converge}\}$
- iii) $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la série } \sum a_n r^n \text{ converge}\}$

☀ exemple 3: des interrogations formatrices!

On note R le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot 2^n$ ACV, que peut-on dire de R ?
2. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (-2)^n$ CV que peut-on dire de R ?
3. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot 5^n$ GDV que peut-on dire de R ?
4. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot 4^n$ DV que peut-on dire de R ?
5. Si pour tout $x \in [0, 3[$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$ CV, que peut-on dire de R ?
6. Si pour tout $x \geq 3$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$ DV, que peut-on dire de R ?
7. Si $\sum a_n$ converge mais n'est pas ACV. Que dire de R ?

☀ exemple 4: comparaison de rayon

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

Déterminer le rayon de la série $\sum a^n z^n$, et celui de la série $\sum a^n z^{2n}$

☀ exemple 5: comparaison de rayon, cas général: très important !

- Soient p un entier strictement positif et q un entier quelconque.
Si R' désigne le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^{np+q}$ et R le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$
alors on a $\boxed{R' = (R)^{1/p}}$

exemple 6: lien avec les probabilités

 Soit (a_n) une suite telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et vaut 1.
Que dire du rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

2 Quelques résultats sur le rayon

2.1 Multiplication par un scalaire non nul

théorème 6: multiplier une SE par un scalaire non nul ne modifie pas le rayon

Soit λ un complexe non nul.
Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$ ont le même rayon

Cela découle directement du fait que si λ est un complexe non nul

on a alors l'équivalence

la suite $(|a_n|.r^n)$ est majorée $\iff$ la suite $(|\lambda|.|a_n|.r^n)$ est majorée

et donc

$$\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|.r^n)_{n \geq 0} \text{ est majorée}\} = \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|\lambda a_n|.r^n)_{n \geq 0} \text{ est majorée}\}$$

exemple 7:

- la SE $\sum_{n \geq 0} 3.z^n$ a même rayon que la SE $\sum_{n \geq 0} z^n$ càd $\text{Rayon}(\sum_{n \geq 0} 3.z^n) = 1$
- la SE $\sum_{n \geq 0} 3^n.z^n$ n'a, a priori, pas le même rayon que la SE $\sum_{n \geq 0} z^n$

2.2 Règle de D'Alembert

A $z \neq 0$ fixé, la série $\sum a_n z^n$ est une série numérique. On peut donc étudier sa convergence avec tous les outils vus dans ce dernier chapitre. En particulier, on peut penser à utiliser:

théorème 7: règle de D'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe.

Alors :

- si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV
- si $l < 1$ alors $\sum u_n$ ACV (en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$)
- si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

rem: Attention! Il n'y a pas de réciproque à la règle de D'Alembert...

méthode 2: utilisation de la règle de D'Alembert pour déterminer le rayon

La méthode consiste à poser $u_n = a_n z^n$ pour $z \neq 0$ fixé et à appliquer la règle de D'Alembert à la série numérique $\sum u_n$.
On compare ensuite cette limite avec 1

exemple 8:

 Déterminons le rayon de convergence des séries entières $\sum (n^2 - \ln n)z^n$, $\sum \frac{n^2}{4^n + n} \cdot z^n$

méthode 3: Règle de D'Alembert pour les séries entières (A' éviter!)

 Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ alors $\text{Rayon}(\sum a_n z^n) = \frac{1}{l}$

 Avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$

 Attention: cette méthode est très efficace mais peut être très piègeuse. (je ne la recommande pas) par exemple, elle ne s'applique pas à la SE

2.3 théorèmes de comparaison

théorème 8: théorèmes de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b

1. comparaison avec les inégalités

Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$

2. comparaison avec les équivalents

Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

3. comparaison avec le o ou le O

Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$

à noter que pour la comparaison avec l'équivalent il n'y a pas de signe stable à contrôler

méthode 4: utiliser un équivalent et comparer à une série entière connue

On utilise le deuxième point du théorème précédent.

exemple:

Considérons la série entière $\sum (-1)^n \cdot \text{ch } n \cdot z^n$.

- on sait que $\text{ch } n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \sim \frac{e^n}{2}$ donc $(-1)^n \text{ch } n \sim \frac{(-e)^n}{2}$
- d'après le théorème ci-dessus on peut affirmer que les séries entières $\sum (-1)^n \cdot \text{ch } n \cdot z^n$ et $\sum \frac{(-e)^n}{2} z^n$ ont le même rayon
- or $\sum \frac{(-e)^n}{2} z^n$ est une série géométrique de raison $-ez$, qui converge donc si et seulement si $|ez| < 1$ c'est à dire $|z| < 1/e$
- ci-dessus on a établi que $\sum \frac{(-e)^n}{2} z^n$ était une série entière de rayon $1/e$

Conclusion: le rayon de $\sum (-1)^n \cdot \text{ch } n \cdot z^n$ est $1/e$

Pouvez-vous calculer la fonction somme de cette série entière?

exemple 9:

 Déterminer le rayon des deux séries entières suivantes $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \cdot z^n$ et $\sum \frac{n-1}{n} \cdot z^n$

💡 théorème 9: des résultats à retenir

- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{Rayon}(\sum n^\alpha \cdot x^n) = 1$

2.4 rayon de la somme de 2 séries entières

💡 théorème 10: rayon de la somme de deux séries entières

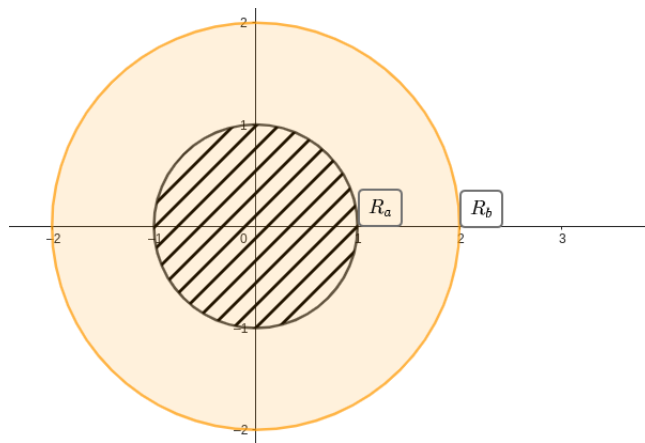
Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b . **Alors :**

- la série entière somme $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ possède un rayon $R \geq \min(R_a, R_b)$
- dans le cas où $R_a \neq R_b$ alors le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$

par exemple:

si $R_a = 1$ et $R_b = 2$ alors on peut affirmer que $R = 1$

si $R_a = 1$ et $R_b = 1$ alors on peut affirmer que $R \geq 1$



démonstration

- Soit z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$

Ceci signifie que $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$
 et donc que $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries absolument convergentes
 on sait alors que la somme des deux séries, c'est-à-dire $\sum (a_n + b_n) \cdot z^n$ est encore une série ACV
 Comme pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a $\sum (a_n + b_n) \cdot z^n$ ACV

on en déduit que $\text{Rayon}(\sum (a_n + b_n) \cdot z^n) \geq \min(R_a, R_b)$

- Plaçons nous dans le cas $R_a < R_b$.

Notons $R = \text{Rayon}(\sum (a_n + b_n) \cdot z^n)$

On sait d'après ce qui précède que $R \geq R_a$

Soit z tel que $R_a < |z| < R_b$

On sait alors que $\sum a_n \cdot z^n$ est GDV et que $\sum b_n \cdot z^n$ est ACV

On peut alors affirmer que $\sum (a_n + b_n) \cdot z^n$ est GDV

Comme pour tout z tel que $R_a < |z| < R_b$ on a $\sum (a_n + b_n) \cdot z^n$ GDV

On en déduit que $R = \text{Rayon}(\sum (a_n + b_n) \cdot z^n) \leq R_a$.

Au final on a bien montré que $R = \text{Rayon}(\sum (a_n + b_n) \cdot z^n) = R_a$

3 Produit de Cauchy

remarque 5 (*rappel: produit de Cauchy de deux séries numériques*)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.

- On appelle PRODUIT DE CAUCHY de ces deux séries la série $\sum w_n$ avec pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = \sum_{j=0}^n u_j v_{n-j} = \sum_{j=0}^n u_{n-j} v_j$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV alors $\sum w_n$ est ACV et l'on a $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

théorème 11: rayon du produit de deux séries entières

1. Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j \cdot b_{n-j} \text{ pour tout } n \geq 0$$

2. Notons $R_a = \text{Rayon}(\sum_{n \geq 0} a_n z^n)$, $R_b = \text{Rayon}(\sum_{n \geq 0} b_n z^n)$, et R_p le rayon de la série produit alors

- pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, les trois séries sont ACV et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- la série produit est de rayon $R_p \geq \min(R_a, R_b)$

rem: lorsque $R_a \neq R_b$ cette fois on ne peut rien dire (contrairement à la somme de deux SE)

démonstration:

Soit z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$

Notons $u_n = a_n \cdot z^n$ et $v_n = b_n \cdot z^n$

Comme $|z| < R_a$ on sait que $\sum u_n$ est ACV

et comme $|z| < R_b$ on sait que $\sum v_n$ est ACV.

Notons $\sum w_n$ la série numérique produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Par définition, on sait que pour tout $n \geq 0$

$$w_n = \sum_{j=0}^n u_j \cdot v_{n-j} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot z^j \cdot b_{n-j} \cdot z^{n-j} = \left(\sum_{j=0}^n a_j \cdot b_{n-j}\right) \cdot z^n = c_n \cdot z^n$$

Par théorème, comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV on sait que

$$\sum w_n \text{ est ACV et que } \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

$$\text{On a donc montré que } \sum c_n z^n \text{ est ACV et que } \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

On a montré que pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$ la série $\sum c_n z^n$ est ACV,

ce qui permet d'affirmer que $\text{Rayon}(\sum c_n z^n) \geq \min(R_a, R_b)$

exemple 10:

On considère la suite (c_n) définie par $\forall n \geq 0, c_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$

Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$

4 Fonction somme d'une série entière complexe



définition 5: fonction somme d'une série entière

Lorsque la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, on note $S(z)$ sa somme.

La fonction S ainsi définie est appelée LA FONCTION SOMME DE LA SÉRIE ENTIÈRE.

On a donc : $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

remarque 6

- pour $z = 0$, la série converge toujours, et l'on a $S(0) = a_0$
- la fonction S est définie à l'aide d'une série : pour nous, c'est une nouvelle manière de définir une fonction.
- l'ensemble de définition de la fonction somme S est l'ensemble des complexes z pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est convergente. Il s'agit donc des z qui sont à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon R ainsi que, éventuellement, certains z situés sur le "cercle d'incertitude".

remarque 7 (avec les séries entières complexes de référence)

- On a vu que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
 - Sa fonction somme est $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$
- On a vu que la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge pour tout $|z| < 1$ uniquement
 - Sa fonction somme est $S : B_O(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ où $B_O(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
 - La fonction somme S est définie uniquement sur l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à un : la fonction somme S est donc **la restriction** de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ à $B_O(0,1)$



théorème 12: fonction complexe développable en série entière

Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

On dit que f est DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE sur un disque ouvert de centre 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon non nul et un réel $\alpha > 0$ telles que

$$\forall |z| < \alpha, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$



exemple 11:



Montrer que la fonction $f : z \mapsto \frac{z^2}{2-z}$ est développable en série entière

5 Fonction somme d'une série entière réelle



définition 6: fonction somme d'une série entière

Lorsque la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge, on note $S(x)$ sa somme.

La fonction S ainsi définie est appelée LA FONCTION SOMME DE LA SÉRIE ENTIÈRE.

On a donc: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout x tels que $\sum a_n x^n$ CV

rem: l'ensemble de définition de S est égal à l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série est convergente

rem: on sait que 0 est toujours dans l'ensemble de définition de S



exemple 12: Les trois séries suivantes ont même rayon mais...

- La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour intervalle de convergence $] -1, +1[$
L'ensemble de définition de sa fonction somme est donc $] -1, +1[$
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ a pour intervalle de convergence est $[-1, +1[$
L'ensemble de définition de sa fonction somme est donc $[-1, +1[$
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ a pour intervalle de convergence $[-1, +1]$
L'ensemble de définition de sa fonction somme est donc $[-1, +1]$
et elles ont le même intervalle ouvert de convergence, à savoir $] -1, +1[$



définition 7: intervalle de convergence, intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle, de rayon R .

1. On appelle INTERVALLE DE CONVERGENCE l'ensemble de définition de la fonction S , c'est-à-dire:
 - (a) Si $R = 0$, l'intervalle de convergence est $\{0\}$
 - (b) Si $R = \infty$, l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$
 - (c) Si R est un réel strictement positif, l'intervalle de convergence sera ou $] -R, +R[$, ou $] -R, +R]$, ou $[-R, +R[$, ou $[-R, +R]$
(c'est l'étude en $\pm R$ qui permet de déterminer en quel cas on se trouve)
2. On appelle intervalle ouvert de convergence l'intervalle $] -R, +R[$ (lorsque $R \neq 0$)

rem: l'intervalle ouvert de convergence est particulièrement important pour une série entière, car les théorèmes de dérivation et de primitivation terme à terme (voir plus loin) ne s'applique que sur cet intervalle!

5.1 Séries entières réelles de référence



exemple 13: classique

Vérifier que $\forall x \in] -1, +1[, \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)} \binom{2n}{n} x^n$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} x^n$

Dans le tableau ci-dessous, α désigne un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (réel non entier)

série entière	rayon	somme sur l'intervalle ouvert de convergence
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$
$\sum_{n \geq 0} x^n$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$\forall x \in]-1, +1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

remarque 8 (précisions sur le tableau ci-dessus)

Les formules sont à mémoriser sur l'intervalle ouvert de convergence.

On montrera cependant qu'elles sont vraies également pour $x = R$ et/ou pour $x = -R$ lorsque les séries convergent en ces points.

Plus précisément:

- $\forall x \in]-1, +1], \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
- $\forall x \in [-1, +1[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
- $\forall x \in [-1, +1], \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

5.2 Propriétés (admisses) de la fonction somme d'une série entière réelle



théorème 13: continuité sur l'intervalle de convergence(admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S

Sa fonction somme S est continue sur son intervalle de définition(càd sur l'intervalle de convergence de la série entière)

rem: ceci signifie que:

- si $x_0 \in]-R, +R[$ on a $\lim_{x \rightarrow x_0} S = S(x_0)$
- si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ CV alors $S(R) = \lim_{x \rightarrow R^-} S(x)$
- si $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ CV alors $S(-R) = \lim_{x \rightarrow -R^+} S(x)$

remarque 9 (interprétation du théorème comme double limite)

- Soit $x_0 \in]-R, +R[$. Dire que la fonction S est continue en x_0 revient à dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$,
soit encore que
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n x^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N a_n x_0^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^N a_n x^n \right)$$
- Ainsi la démonstration du théorème consiste à montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{N \rightarrow \infty} (\dots) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} (\dots)$
Il s'agit d'une démonstration (HP) très compliquée qui nécessite la maîtrise de la notion de convergence uniforme

 théorème 14: classe C^∞ et dérivation terme à terme (admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S .
Alors:

- la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle OUVERT de convergence $] -R, +R[$
- la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et la série dérivée $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ont même rayon.
- sur l'intervalle ouvert $] -R, +R[$, S' est obtenue en dérivant terme à terme, on a donc

$$\forall x \in]-R, +R[, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

remarque:

- le résultat est établi sur l'intervalle ouvert de convergence uniquement!
- La série dérivée de $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 \dots$
est la série $a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 1} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

 exemple 14: Très classique! A retenir!

Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$ et de $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot x^n$

 exemple 15: démonstration de cours

- Montrer que $\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
- Montrer que $\forall x \in [-1, +1], \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

 théorème 15: formule de la dérivée p-ième

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S .
Alors:

- la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle OUVERT de convergence $] -R, +R[$
- pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in]-R, +R[$ on a

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

- on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

exemple 16:



1. Donner la valeur de la dérivée n -ième en 0 de la fonction $\arctan$
2. Donner la valeur de la dérivée n -ième en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + 2x)$



théorème 16: primitivation terme à terme des SE

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S .

Soit F une primitive de la fonction S sur $] -R, +R[$

Alors

- i) $\forall x \in] -R, +R[, F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- ii) et $\text{Rayon} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^{n+1} \right) = R = \text{Rayon} \left(\sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n \right)$

remarque:

- On dit encore que "SUR L'INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE, UNE PRIMITIVE EST OBTENUE PAR PRIMITIVATION TERME À TERME".
- et que "LA SÉRIE ENTIÈRE ET SA SÉRIE PRIMITIVÉE ONT MÊME RAYON"
- moyen mnémotechnique pour se rappeler la formule i)

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n \cdot t^n \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$



exemple 17:



1. Justifier que la fonction $\arctan$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer une expression explicite des primitives de $\arctan$
3. Ecrire la primitive de $\arctan$ qui vaut 1 en 0 comme la somme d'une série entière

5.3 Développement en série entière



définition 8: fonction développable en série entière

Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, et f une fonction de $I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que LA FONCTION f EST DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE (DSE) AU VOISINAGE DE 0 lorsqu'il existe un réel $\alpha > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon non nul tels que $\forall x \in] -\alpha, +\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

rem: il est implicite que $(\text{Rayon}(\sum a_n \cdot x^n) \geq \alpha)$

remarque 10

- On rappelle qu'un voisinage du réel x_0 est une partie de $\mathbb{R}$ (i.e. sous-ensemble de $\mathbb{R}$) qui contient un intervalle ouvert centré en x_0 . Par exemple, $] -2, -1] \cup [0, +\infty[$ est un voisinage de 3 mais n'est pas un voisinage de 0
- La définition précédente est encore équivalente à: la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe un voisinage V de 0 et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon non nul tels que $\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- D'après cette définition, il n'est pas nécessaire qu'une fonction soit égale à une série entière sur tout son ensemble de définition. La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est égale à sa série entière que sur $[-1, 1]$. Comme il s'agit d'un voisinage de 0, on dit que la fonction $\arctan$ est DSE. (même remarque avec la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$)
- Si on veut développer en série entière une fonction f en un point x_0 autre que 0, on développe la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ en 0

exemple 18:

 Expliquer pourquoi la fonction partie entière et la fonction valeur absolue ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.

méthode 5: comment trouver un DSE I

On utilise les séries entières de référence et on effectue des changements de variable et/ou des combinaisons linéaires.

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto \ln(1 + 3x^2) & f_2 : x &\mapsto \ln(2 + 3x^2) & f_3 : x &\mapsto \cos^2 x & f_4 : x &\mapsto \cos^3 x \\ f_5 : x &\mapsto e^{x^2} & f_6 : x &\mapsto \frac{1}{2-x} & f_7 : x &\mapsto \frac{1}{(1+x)(2-x)} & f_8 : x &\mapsto \ln(3-x^2+2x) \quad , \quad f_9 : x \mapsto e^x \cdot \sin x \end{aligned}$$

méthode 6: comment trouver un DSE II

 On utilise les séries entières de référence que l'on dérive.

méthode 7: comment trouver un DSE III

 On utilise les séries entières de référence que l'on primitive.
exemple: arctan, arcsin, $\ln(1+x)$, ...

exemple 19:

 Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est DSE et donner son développement

- Notons $f : t \mapsto e^{t^2}$
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que F est la primitive de f qui s'annule en 0.

- On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\text{On a donc } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{n!}$ converge pour tout t réel, ceci prouve que $\text{Rayon}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}) = R = +\infty$

rem: à ce niveau on a montré que $\text{Rayon}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}) = R = +\infty$ et que sa fonction somme est la fonction f

- D'après le théorème de primitivation terme à terme on peut affirmer que pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

rem: il est à bien noter ici que ce n'est pas la linéarité de l'intégrale qui permet d'écrire la ligne ci-dessus, mais bien le théorème d'intégration terme à terme vu plus haut!



méthode 8: utiliser une équation différentielle pour trouver un DSE

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0

1. Analyse

- On commence par déterminer une équation différentielle linéaire satisfaite f
- On suppose que f est DSE et on cherche une série entière inconnue de rayon non nul qui vérifie l'équation différentielle. On s'aide des conditions initiales.

2. Synthèse

- On vérifie que le rayon de la série trouvée est non nul
- On applique le théorème d'existence et d'unicité de la solution à un problème de Cauchy



exemple 20:

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n$

1. Déterminer le rayon de cette série entière.
2. Justifier que f vérifie sur $] -1, +1[$ l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$
3. En déduire une expression simple de f



définition 9: série de Taylor

f étant une fonction de classe C^∞ sur un intervalle contenant 0,

On appelle SÉRIE DE TAYLOR DE f la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$



théorème 17: unicité du DSE

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. :

- i) Si f est DSE sur $] -\alpha, +\alpha[$ alors f est C^∞ sur $] -\alpha, +\alpha[$
- ii) Si f est DSE sur $] -\alpha, +\alpha[$ alors son DSE est sa série de Taylor, càd

$$\forall x \in] -\alpha, +\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

rem:

- Attention, i) est juste une implication! $f C^\infty \not\Rightarrow f$ DSE
- **le DSE est unique:** si f est dse alors c'est la série de Taylor qui donne le dse

En effet, si $\forall x \in] -\alpha, +\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors f coïncide avec la fonction somme S de la série entière

sur cet intervalle et l'on a d'après le théorème 15 $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. cqfd



théorème 18: parité... là aussi!

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$

- i) $\forall x \in] -R, R[, S(-x) = S(x)$ si et seulement si pour tout entier n impair $a_n = 0$
- ii) $\forall x \in] -R, R[, S(-x) = -S(x)$ si et seulement si pour tout entier n pair $a_n = 0$

Pour démontrer cette proposition on utilise les résultats connus suivants:

- si f est paire alors f' est impaire
- si f est impaire alors f' est paire

Et on en déduit immédiatement que

- si f est paire alors $f', f^{(3)}, f^{(5)}, \dots$ (les dérivées d'ordre impair) sont impaires et donc s'annulent en 0
- si f est impaire alors $f'', f^{(4)}, f^{(6)}, \dots$ (les dérivées d'ordre pair) sont impaires et donc s'annulent en 0

théorème 19: formule de Taylor avec reste intégral (rappel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

$$\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ éléments de } I, \text{ on a } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Dans le cas où $n = 0$, la formule donne si f est de classe C^1 sur I alors on a $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$

exemple 21:

Dans le poly "Intégration I", à la page 10, on a utilisé cette formule pour justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

exemple 22: comment justifier qu'une fonction prolongée est C^∞ !

Soit la fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$!

- Soit $x \neq 0$.

On a

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \dots$$

Comme la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge pour tout $x \neq 0$ on sait que son rayon R est infini.

- Notons S sa fonction somme.

On sait par théorème que S est une fonction C^∞ sur $] -R, +R[= \mathbb{R}$.

Or $S(0) = 1 = f(0)$ et $\forall x \neq 0, S(x) = f(x)$!

Ainsi $S = f$ et l'on a bien montré que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$!

exemple 23: DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout x réel on note $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, donner le DSE de f_α et son rayon.

Dans la suite on supposera que $\alpha \notin \mathbb{N}$

2. Déterminer la série de Taylor de f . Quel est le rayon de cette série entière?
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_α et montrer que sa série de Taylor vérifie la même équation différentielle. (on précisera sur quel intervalle)
4. Justifier que f_α est DSE et retrouver le résultat de cours



exemple 24:

A l'aide de leurs développements en série entière,
retrouver la dérivée de la fonction exp et de la fonction sh

6 Annexe

démonstration 1 (prélude à la démonstration du théorème 2)

Montrons que l'ensemble $E = \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|.r^n)_{n \geq 0} \text{ soit majorée}\}$ est un intervalle.

- Il est clair que $0 \in E$ et que c'est son plus petit élément.
- Pour montrer que E est un intervalle (c'est à dire d'un seul tenant) nous allons montrer que pour tout $b \in E$ fixé et tout c fixé dans le segment $[0, b]$ on a $c \in E$
- Soit $b \in E$ fixé.

Par définition de E ceci signifie qu'il existe un $M > 0$ tel que $\forall n \geq 0, |a_n|.b^n \leq M$

Considérons maintenant un c quelconque dans le segment $[0, b]$.

Comme $0 \leq c \leq b$, on a $\forall n \geq 0, 0 \leq c^n \leq b^n$ et donc $\forall n \geq 0, 0 \leq |a_n|.c^n \leq |a_n|.b^n$

On vient de prouver que $\forall n \geq 0, 0 \leq |a_n|.c^n \leq M$,

c'est à dire que la suite $(|a_n|.c^n)$ était majorée. C'est la définition de $c \in E$! cqfd

Nous venons de prouver que E est un intervalle du type $[0, R[$ ou $[0, R]$ (avec $R \geq 0$) ou bien $[0, +\infty[$

démonstration 2 (démonstration du théorème 2)

$$1. \quad R = +\infty \iff \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument pour tout } z \in \mathbb{C}$$

(a) On suppose que $R = +\infty$

On est ainsi dans le cas où $E = [0, +\infty[$, c'est à dire pour tout réel $r \geq 0$ la suite $(a_n r^n)$ est majorée.

Soit z un complexe quelconque.

En choisissant $r = |z| + 1$ et en appliquant le lemme d'Abel on justifie que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(b) On suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On sait donc que pour tout $z \in \mathbb{C}$ le terme général tend vers 0. Or une suite convergente étant forcément bornée, on peut affirmer que la suite $(a_n z^n)$ est une suite bornée.

On vient bien de prouver que pour $r \geq 0$ la suite $(|a_n|.r^n)$ était majorée, c'est à dire que $E = [0, +\infty[$.

Or $R = \sup E$ donc $R = +\infty$

$$2. \quad R = 0 \iff \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ ne converge que pour } z = 0$$

(a) On suppose que $R = 0$

On est ainsi dans le cas où $E = \{0\}$, c'est à dire que pour tout $r > 0$ la suite $(|a_n|.r^n)$ n'est pas majorée.

Soit z un complexe non nul.

On peut affirmer que la suite $(|a_n z^n|) = (|a_n|.|z|^n)$ n'est pas majorée.

De cela on en déduit que l'on ne peut avoir $\lim a_n z^n = 0$ et donc $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente

(b) On suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$

Nous allons montrer que $E = \{0\}$. Pour cela on va tenir un raisonnement par l'absurde.

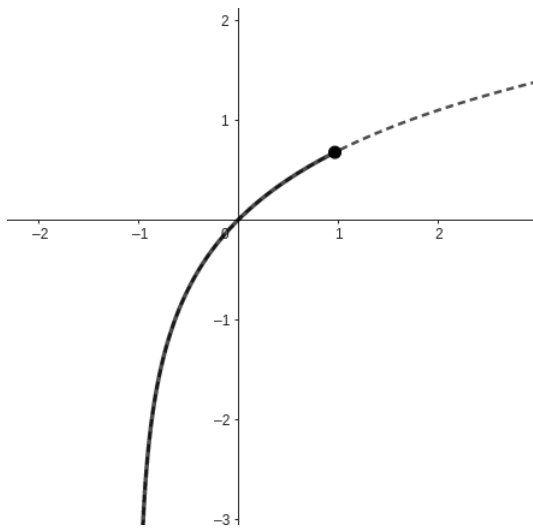
On suppose qu'il existe un $r > 0$ tel que la suite $(a_n.r^n)$ soit majorée.

D'après le lemme d'Abel, comme $0 < \frac{r}{2} < r$, on peut affirmer que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $z = \frac{r}{2}$.

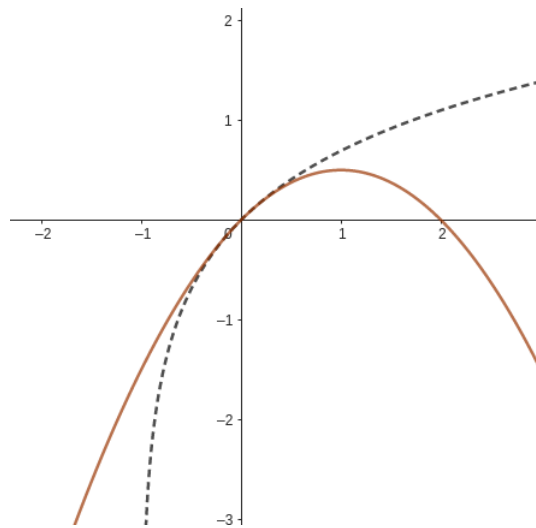
On aboutit à une contradiction car la série entière ne converge que pour 0 par hypothèse. cqfd!

$$3. \quad R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |z| < R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |z| > R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$$

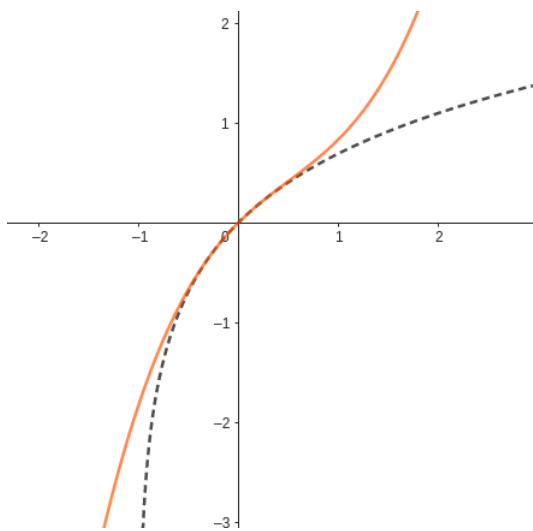
démonstration en classe



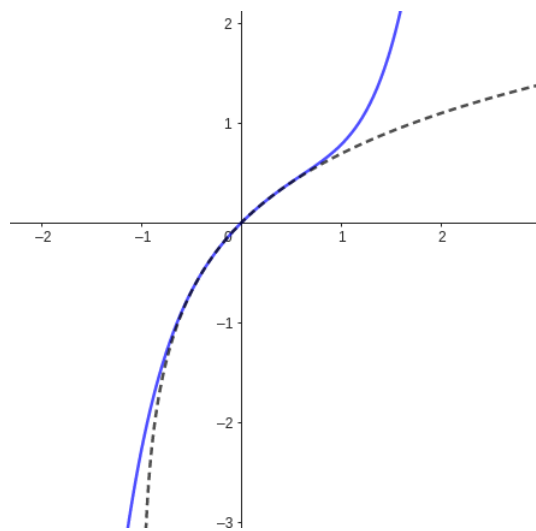
FONCTION $x \mapsto \ln(1+x)$



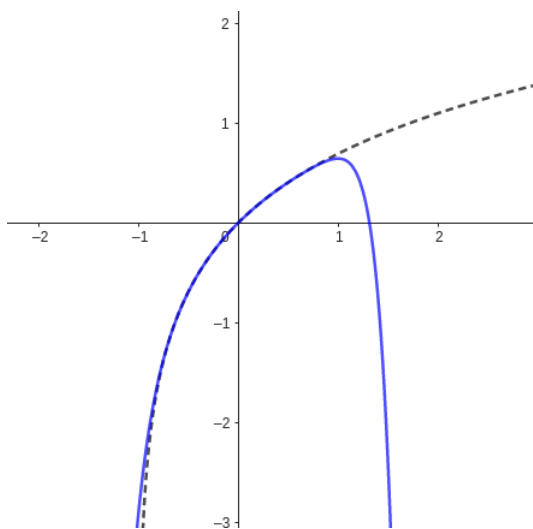
FONCTION $x \mapsto x - \frac{x^2}{2}$



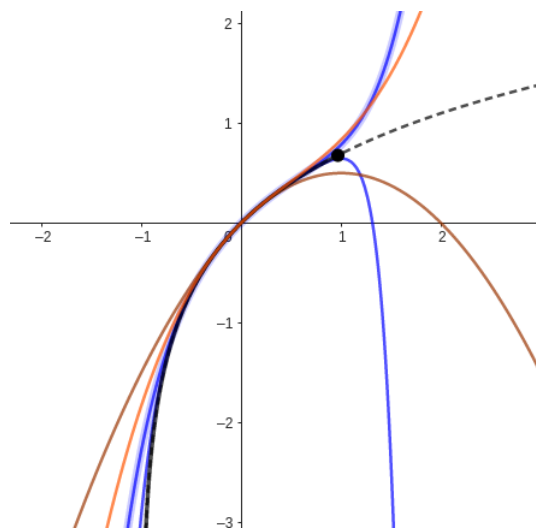
FONCTION $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$



FONCTION $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$



FONCTION $x \mapsto \sum_{k=1}^{15} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$



TOUS ENSEMBLE! TOUS ENSEMBLE!

7 Intégration terme à terme

Ce paragraphe NE s'applique PAS SEULEMENT aux séries entières

théorème 20: théorème d'intégration terme à terme (admis)

Soit I un intervalle réel.

Soient $S \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $C^0(I, \mathbb{R})$ telle que

1. pour tout n , f_n est intégrable sur I
2. pour tout $t \in I$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ converge et $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$
3. la série $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(t)| dt$ converge

Alors

$$S \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_I S(t) dt = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt$$

rem: la notion générale d'intégrabilité sur un intervalle quelconque a été vue dans le chapitre C16 - intégrales généralisées

remarque 11 (série et intégration)

Lorsque l'on a à "intégrer une série", c'est-à-dire permuter les signes $\int$ et $\sum$, on pensera à utiliser

- soit le **théorème de primitivation des séries entières**: s'il s'agit d'une série entière et que l'on cherche une primitive ou une intégrale sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence
- soit le **théorème ci-dessus**: dans tous les autres cas

exemple 25:

 Ecrire $\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt$ à l'aide de la somme d'une série numérique.

exemple 26: exemple

 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto t.e^{-nt}$

1. Montrer que $\int_0^{\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{n^2}$
2. En déduire que $J = \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge et que $J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

exemple 27:

 Montrer que $\int_0^1 \ln(1+t^3) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(3n+1)}$

exemple 28: lorsqu'aucun théorème ne peut s'appliquer...

 Soit $a > 0$.

Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$