

C16 - INTEGRALES GENERALISEES INTEGRALES IMPROPRES

Table des matières

1	Définition, exemples (V072)	2
2	Intégrale faussement généralisée (V073)	4
3	Des remarques bien utiles (V074)	6
4	Intégrales de référence (V075)	8
5	Des théorèmes que l'on semble déjà connaître (V076)	10
6	Intégrale généralisée en ses deux bornes	12
7	Des théorèmes pas vraiment indispensables	13
8	Absolue convergence, fonction intégrable sur un intervalle	15
9	Fonctions à valeurs complexes	18
10	Comparaison série-intégrale	19
11	Annexe	19

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme d'habitude
- Dans tout ce résumé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
- On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.
- **En intégration, la notion de segment est fondamentale.**
- DANS CE POLYCOPIÉ, NOUS ALLONS DONNER UN SENS À DES INTÉGRALES DE FONCTIONS QUI SONT CONTINUES SUR UN INTERVALLE AUTRE QU'UN SEGMENT.

théorème 1: théorème fondamental du calcul intégral(rappel)

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

- i) l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ existe, càd $\int_a^b f$ existe.
- ii) et l'on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a, b]$

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours.

Pour justifier qu'une intégrale NON généralisée existe, on écrit au choix

- **"une fonction CONTINUE sur un SEGMENT est intégrable* sur ce segment".**
- **"la fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[a, b]$ donc $\int_{[a, b]} f$ existe"**

1 Définition, exemples (V072)



définition 1: intégrale généralisée en sa borne supérieure

Soit $[a, b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit f une fonction continue de $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

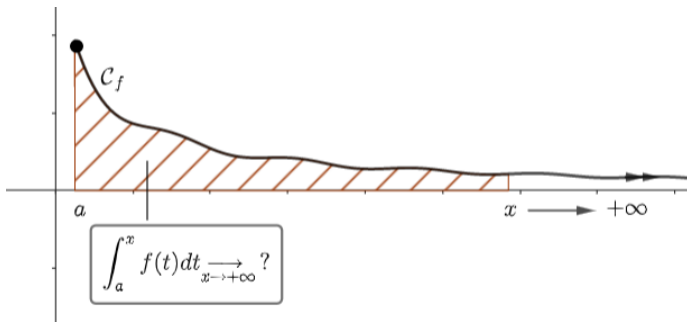
1. On dit que L'INTÉGRALE $\int_a^b f(t)dt$ EST CONVERGENTE (EN b) lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures

Si tel est le cas, on note $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$

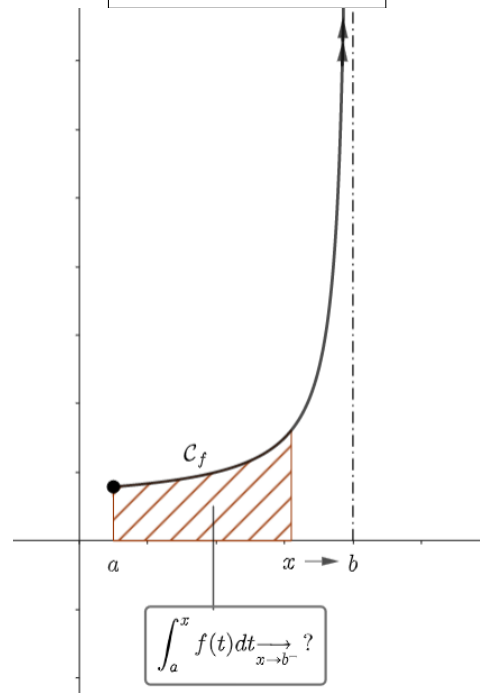
2. Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une INTÉGRALE DIVERGENTE (EN b).

remarque: comme pour les séries numériques, la notation $\int_a^b f(t)dt$ désigne "le problème" et, dans le cas de convergence, la valeur de l'intégrale, c'est à dire un nombre réel ou complexe.

cas $b = +\infty$



cas $b \in \mathbb{R}$ (borne finie)



rem: lorsque l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge c'est

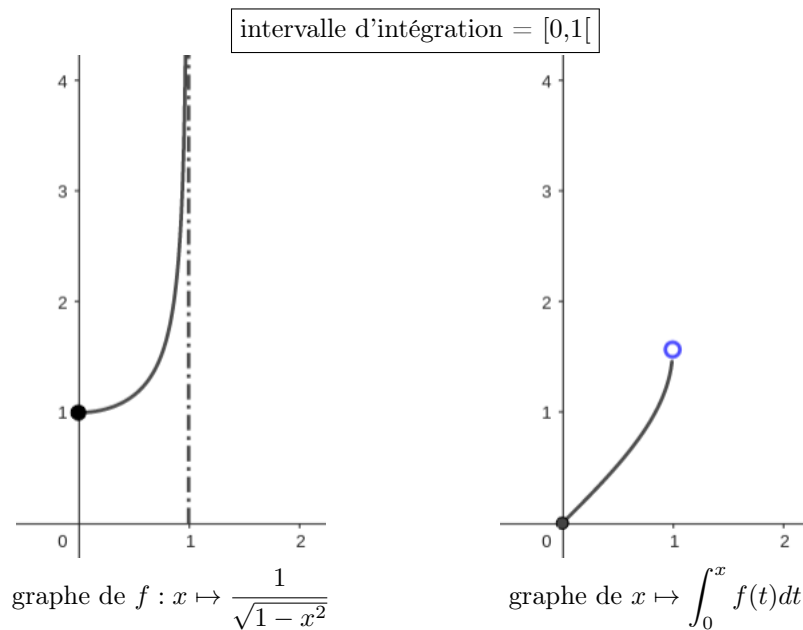
- soit parce que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ possède une limite infinie quand $t \rightarrow b^-$
- soit parce que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ NE possède PAS de limite quand $t \rightarrow b^-$



exemple 1:

Déterminer la nature et éventuellement la valeur de

$$I = \int_0^{\pi/2} \tan(t).dt \quad J = \int_0^\infty \cos(t)dt \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \quad L = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$



On adapte la définition précédente à une intégrale généralisée en sa borne inférieure.



définition 2: intégrale généralisée en sa borne inférieure

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

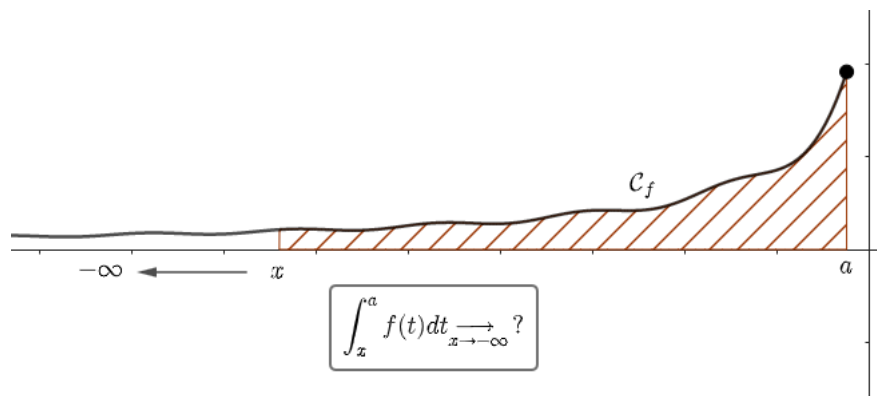
Soit f une fonction continue de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. On dit que L'INTÉGRALE $\int_a^b f(t)dt$ EST CONVERGENTE (EN a) lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures

Si tel est le cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$$

2. Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une INTÉGRALE DIVERGENTE (EN a).



exemple 2:



Nature et éventuellement calcul de $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dt}{t^2 - 1}$

☀ exemple 3: déterminer la nature d'une intégrale à l'aide de la définition

☞ Nature et éventuellement calcul de $\int_{-\infty}^0 \cos(t)dt$

- La fonction $\cos$ est continue sur $] -\infty, 0]$

L'intégrale $\int_{-\infty}^0 \cos(t)dt$ est donc généralisée en sa borne inférieure uniquement

- Soit $x \leq 0$

On a $F(x) = \int_x^0 \cos(t)dt = [\sin(t)]_x^0 = -\sin(x)$

Comme F ne possède pas de limite en $-\infty$, on a montré que $\int_{-\infty}^0 \cos(t)dt$ est une intégrale divergente.

2 Intégrale faussement généralisée (V073)

☞ définition 3: fonction prolongeable par continuité

Soit I un intervalle, et x_0 un élément de I ou une borne **finie** de I .

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I - \{x_0\}$.

On dit que f EST PROLONGEABLE PAR CONTINUITÉ EN x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est finie

La fonction ainsi prolongée est la fonction

$$\bar{f}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

La fonction $\bar{f}$ est alors une fonction continue sur I .

rem: Très souvent, l'énoncé dit que "l'on appellera encore f la fonction ainsi prolongée"

rem: on ne dit jamais qu'une fonction est prolongeable par continuité en $+\infty$ ou en $-\infty$

☀ exemple 4: fonction prolongeable en un point intérieur de l'intervalle

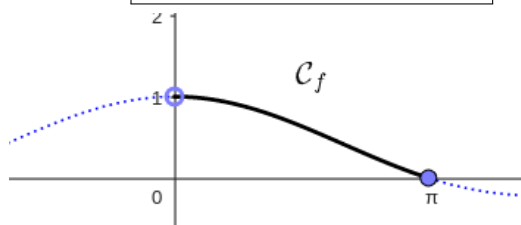
- La fonction $f: t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^*$

- On sait $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (limite finie)

On peut donc affirmer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0

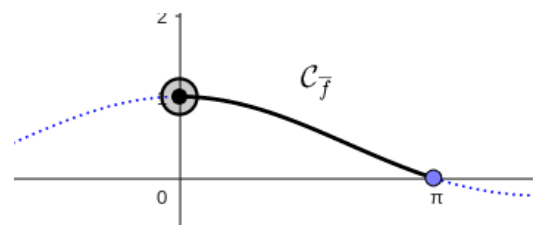
- La fonction $\bar{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est maintenant une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$



f n'est PAS définie en 1

$\int_0^1 f(t)dt$ EST FAUSSEMENT
GÉNÉRALISÉE EN 0



$\bar{f}$ est définie et continue en 1

$\int_0^1 \bar{f}(t)dt$ N'EST PAS UNE
INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

exemple 5: fonction prolongeable en une borne de l'intervalle

- La fonction $f :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur $]0,1]$

$$t \mapsto t \cdot \ln t$$
- On sait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \ln t = 0$ (limite finie)
 On peut donc affirmer que f est prolongeable par continuité en 0
- La fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est maintenant une fonction continue sur $[0,1]$

$$t \mapsto \begin{cases} t \cdot \ln t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

définition 4: intégrale faussement généralisée en sa borne supérieure

Soit $f \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$ avec a et b bornes finies

On dit que L'INTÉGRALE $\int_a^b f(t)dt$ EST FAUSSEMENT GÉNÉRALISÉE EN b lorsque f est prolongeable par continuité en b

rem: une intégrale faussement généralisée est bien sûr convergente. (la réciproque est fausse)

exemple 6:

Nature de l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{t} \cdot \ln t \cdot dt$

- La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t} \cdot \ln t$ est continue sur $]0,1]$.
 L'intégrale I est donc généralisée en sa borne inférieure uniquement.
- On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$ d'après le théorème des croissances comparées.
 Comme f possède une limite **finie** en 0^+ , on peut affirmer que f est prolongeable par continuité en 0
- On a prouvé que l'intégrale I était une intégrale faussement généralisée.

exemple 7:

Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2t} - e^2}{t - 1} dt$ est faussement généralisée (par deux méthodes)

définition 5: intégrale faussement généralisée en sa borne inférieure

Soit $f \in C^0(]a, b], \mathbb{K})$ avec a et b bornes finies

On dit que L'INTÉGRALE $\int_a^b f(t)dt$ EST FAUSSEMENT GÉNÉRALISÉE EN a lorsque f est prolongeable par continuité en a

3 Des remarques bien utiles (V074)

💡 théorème 2: évident et très pratique!

Soit $f \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$ et $c \in [a, b[$

Alors: $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.

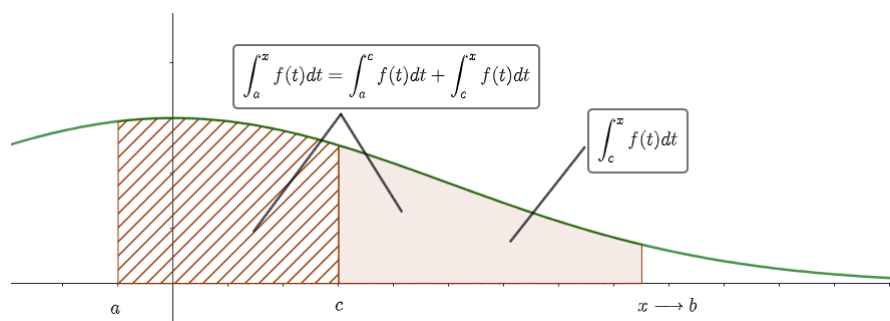
rem: la nature d'une intégrale ne dépend que du comportement de la fonction en la borne généralisée (càd celle qui "pose problème")

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à retenir

le problème de la convergence d'une intégrale est une propriété locale: c'est le comportement de la fonction au voisinage de b , et uniquement au voisinage de b , qui va déterminer la nature de l'intégrale généralisée. C'est pour cela que l'on peut préciser que "l'intégrale est convergente en b " ou que "l'intégrale est divergente en b "

Cette remarque est à rapprocher de celle vue sur les séries numériques:

"LA NATURE D'UNE SÉRIE N'EST PAS CHANGÉE SI ON EN MODIFIE UN NOMBRE FINI DE TERMES"



💡 théorème 3: produit d'une intégrale généralisée par un scalaire non nul

Soit $f \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$.

Soit λ un scalaire **non nul** fixé.

1. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b \lambda f(t)dt$ converge, et l'on a

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b \lambda f(t)dt$ diverge

"multiplier l'intégrande par un scalaire non nul ne change pas la nature de l'intégrale"

démonstration

- Notons $h = \lambda.f$
- Comme les fonctions f et h sont continues sur $[a, b[$, elles admettent des primitives sur cet intervalle.

Pour tout $x \in [a, b[$ on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $H(x) = \int_a^x h(t)dt$

- On a par linéarité de l'intégrale (de sup!) pour tout $x \in [a, b[$

$$H(x) = \int_a^x h(t)dt = \int_a^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt = \lambda F(x)$$

- Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge

Par définition, ceci signifie que la fonction F possède une limite finie l lorsque $x \rightarrow b^-$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow b^-} H(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \lambda.F(x) = \lambda.l$ (limite finie)

Ceci prouve que $\int_a^b \lambda f(t)dt$ est une intégrale CV, et que l'on a

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} H(x) = \lambda.l = \lambda. \int_a^b f(t)dt$$

• **Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ diverge**

Ceci signifie que la fonction F ne possède pas de limite finie en b^- .

Comme $H = \lambda.F$ avec $\lambda \neq 0$, les théorèmes généraux sur les limites indiquent que H ne peut posséder de limite finie en b^- .

Ce qui signifie que $\int_a^b \lambda f(t)dt$ est une intégrale DV.

 théorème 4: conséquence directe des théorèmes généraux sur les limites

Soient $f, g \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$.

1. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors $\int_a^b f(t) + g(t)dt$ diverge
2. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t) + g(t)dt$ converge,
et l'on a

$$\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

3. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge et si $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors on ne peut conclure quant à la nature de $\int_a^b f(t) + g(t)dt$

démonstration du théorème 3

- Notons $h = f + g$
- Comme les fonctions f, g et h sont continues sur $[a, b[$, elles admettent des primitives sur cet intervalle.

Pour tout $x \in [a, b[$ on note

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt \quad H(x) = \int_a^x h(t)dt$$

- On a par linéarité de l'intégrale (de sup!) pour tout $x \in [a, b[$

$$H(x) = \int_a^x f(t) + g(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt = F(x) + G(x)$$

- Les théorèmes généraux sur les limites donnent alors directement les résultats du théorème.

Plus précisément dans le cas où F et G possèdent des limites finies en b^-

On a alors H qui admet une limite finie en b^-

(et ceci prouve déjà que l'intégrale $\int_a^b h(t)dt$ est convergente)

et l'on a

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} H(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) + G(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

💡 théorème 5: linéarité en cas de convergence

Soient $f, g \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent.

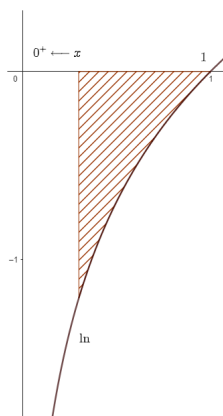
On a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\int_a^b \lambda \cdot f(t) + g(t)dt$ converge
2. **linéarité:** $\int_a^b \lambda \cdot f(t) + g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

4 Intégrales de référence (V075)

💡 théorème 6: une intégrale de référence

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale convergente (en 0)



démonstration

- La fonction $\ln$ est continue sur $]0, 1]$, l'intégrale est généralisée en 0.

- Soit $x > 0$.

On a

$$F(x) = \int_x^1 \ln(t)dt = [t \cdot \ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = -x \ln x - 1 + x$$

D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$

On a ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -1$ (limite finie).

On a prouvé que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge (et vaut -1)

- remarque: en prouvant ceci, on a aussi prouvé que la convergence des intégrales suivantes:

$$\int_0^1 3 \ln(t)dt, \int_0^2 \ln(t)dt \text{ et } \int_0^{10^{10}} 3 \ln(t)dt \text{ mais évidemment pas celle-ci } \int_0^{+\infty} \ln(t)dt$$

💡 théorème 7: une intégrale de référence (identique à celle-ci-dessus)

Soit $b > 0$ et $k \neq 0$

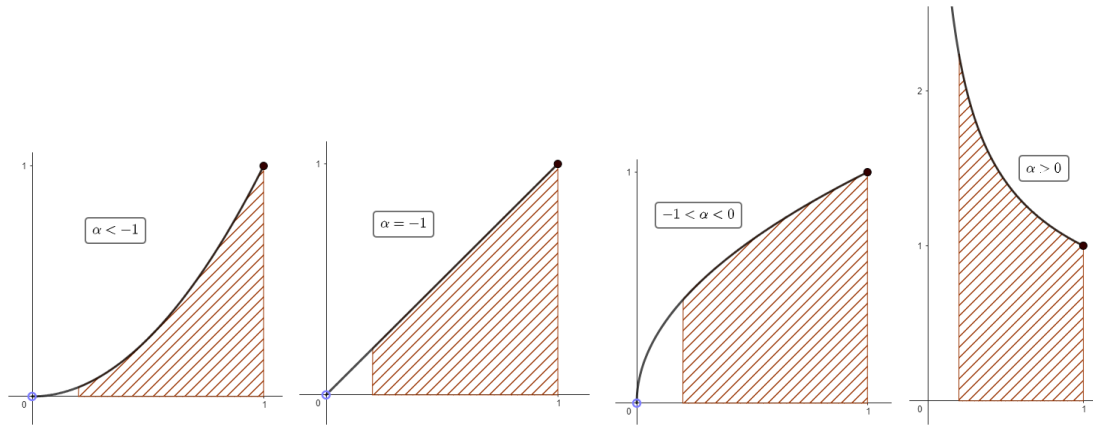
L'intégrale $\int_0^b k \cdot \ln(t)dt$ est une intégrale convergente (en 0)

rem: ce théorème n'est pas à retenir

💡 théorème 8: intégrale de Riemann en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

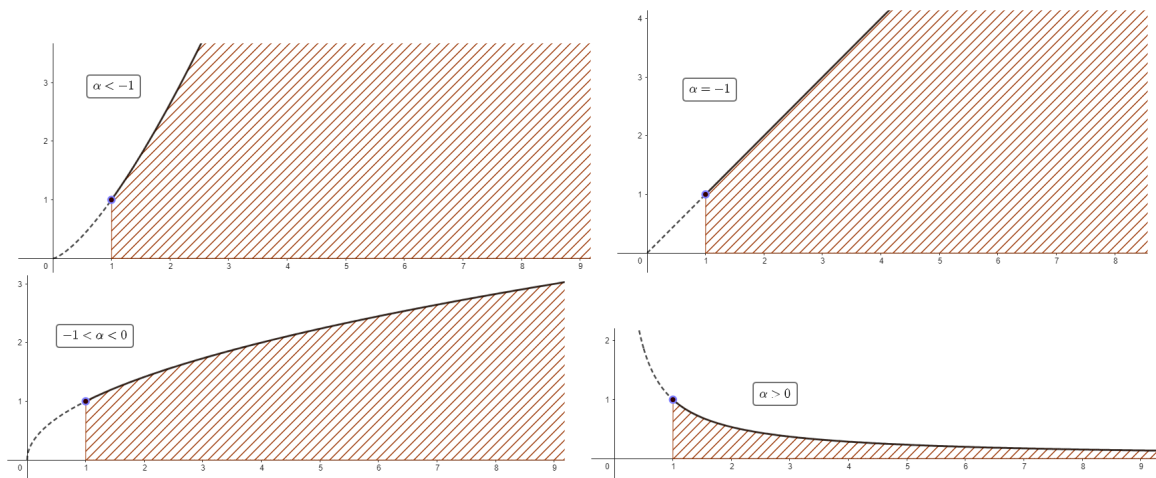
L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente (en 0) ssi $\alpha < 1$



💡 théorème 9: intégrale de Riemann en $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

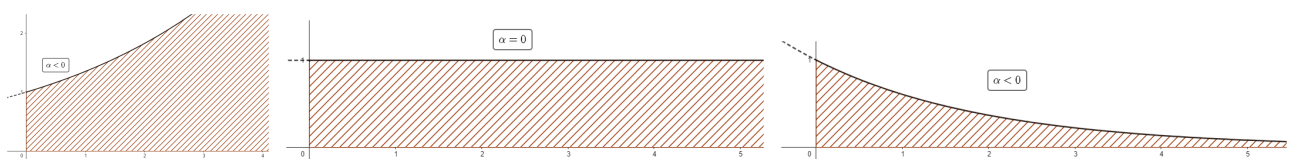
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente (en $+\infty$) ssi $\alpha > 1$



💡 théorème 10: une quatrième intégrale de référence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge (en $+\infty$) ssi $\alpha > 0$



5 Des théorèmes que l'on semble déjà connaître (V076)

💡 théorème 11:

Soit $f \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$ **positive**. On a l'équivalence:

l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge (en b) ssi la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée

rem: dans le chapitre sur les séries numériques, nous avons vu un théorème similaire: si le terme général est positif alors la suite des sommes partielles est croissante et donc elle converge ssi elle est majorée

démo: Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$.

Notons pour tout $x \in [a, b[, F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que F est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a .

On a donc $F' = f \geq 0$. Ce qui prouve que la fonction F est une fonction croissante.

D'après le **théorème de la limite monotone**, on sait que F possèdera une limite finie en b ssi F est majoré

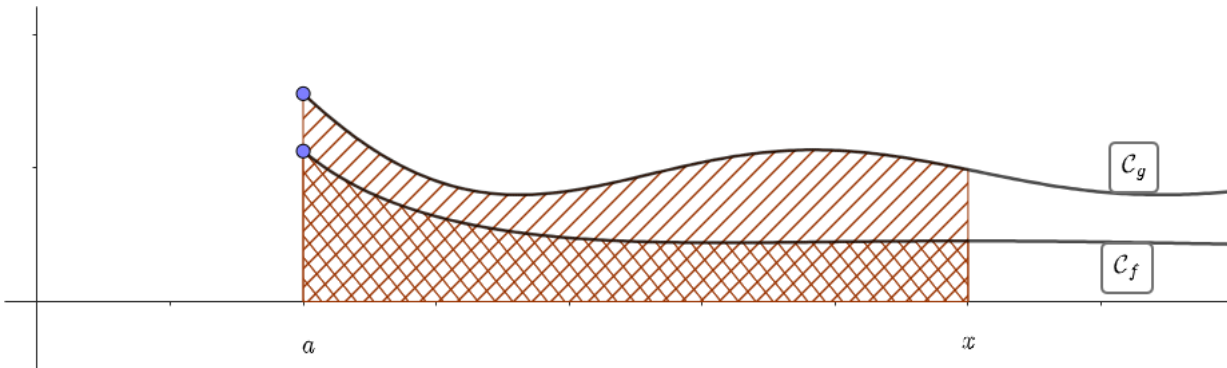
💡 théorème 12: théorème de comparaison des fonctions positives

Soient $f, g \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$ telles que $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$

- i) Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
- ii) Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

rem: on pourrait dire aussi "si l'intégrale de g converge en b alors l'intégrale de f converge en b "

rem: il suffit d'avoir l'inégalité $0 \leq f(t) \leq g(t)$ sur un voisinage de b^- pour avoir les mêmes implications



☀ exemple 8:

⚡ Déterminer la nature de $I = \int_1^\infty \frac{dt}{t^{3+\cos t}}$

- Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t^{3+\cos t}} = \exp(-(3 + \cos t) \cdot \ln t)$.

La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.

- Soit $g : t \mapsto \frac{1}{t^2}$.

La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$.

- On a $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ (preuve en classe)

- Comme $\int_1^\infty g(t)dt$ est une intégrale de référence convergente, on peut affirmer par théorème de comparaison que l'intégrale I est convergente

exemple 9:

 Déterminer la nature de $I = \int_1^\infty \frac{dt}{t^{\cos t}}$

théorème 13: règle des équivalents

Soient $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ et **si** g est de signe stable au voisinage de b^- **alors** :

les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

rem: comme pour les séries numériques on précisera bien que le signe est stable (quand c'est effectivement le cas!)

exemple 10:

 Nature des intégrales $I = \int_1^\infty \frac{5t+4}{t^3+t^2+1} dt$, $J = \int_0^3 \frac{dt}{\sin t}$ et $K = \int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1}$

théorème 14: analogue du théorème 11

Soient $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{K})$ telles que $\forall t \in [a, b], 0 \leq f(t) \leq g(t)$

i) Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.

ii) Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

rem: on pourrait dire aussi "si l'intégrale de g converge en a alors l'intégrale de f converge en a "

rem: il suffit d'avoir l'inégalité $0 \leq f(t) \leq g(t)$ sur un voisinage de a^+ pour avoir les mêmes implications

théorème 15: analogue du théorème 12

Soient $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Si $f \underset{a^+}{\sim} g$ et **si** g est de signe stable au voisinage de a^+ **alors** :

les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

rem: comme pour les séries numériques on précisera bien que le signe est stable (quand c'est effectivement le cas!)

théorème 16: croissance, positivité

Soient $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b$ convergent.

1. **positivité**: si $\forall t \in [a, b], 0 \leq f(t)$ alors $0 \leq \int_a^b f(t)dt$

2. **croissance**: si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

6 Intégrale généralisée en ses deux bornes



définition 6: intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

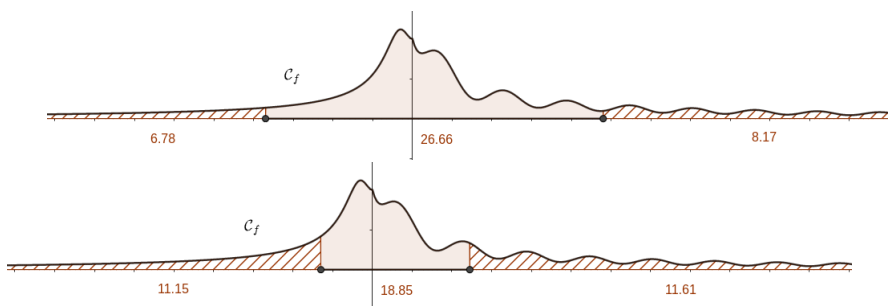
Soit $f \in C^0([a, b[)$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On dit que L'INTÉGRALE (DOUBLEMENT GÉNÉRALISÉE) $\int_a^b f(t)dt$ EST CONVERGENTE s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ **ET** $\int_c^b f(t)dt$ convergent.
On pose alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
2. Dans le cas contraire, on dit que L'INTÉGRALE $\int_a^b f(t)dt$ DIVERGE.

rem: en cas de convergence, la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas du réel c

rem: "une intégrale généralisée en ses 2 bornes est convergente ssi elle converge en ses 2 bornes"

rem: grâce à cette définition, on pourra utiliser la relation de Chasles et la linéarité pour les intégrales impropres convergentes.



exemple 11:

Nature de $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et de $J = \int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^3 \cdot \ln(t+2)} dt$

remarque 1 (cas où l'intervalle d'intégration est $\mathbb{R}$)

Pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée du type $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$, il faut et il suffit donc d'étudier séparément la convergence en $+\infty$ et en $-\infty$. Si l'une des deux diverge, on peut directement affirmer que $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ est divergente.

Attention! Il ne faut surtout pas s'intéresser à $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t)dt$!

En revanche, on peut s'intéresser à la limite de $\int_x^y f(t)dt$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $y \rightarrow +\infty$ (l'idée est de "séparer" les 2 problèmes de convergence)



exemple 12:

Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot dt$

- On sait que $\int_0^{+\infty} t \cdot dt$ est une intégrale divergente, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot dt$ DV
- Il n'en est pas moins clair que $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x t \cdot dt = \lim_{x \rightarrow \infty} [t^2/2]_{-x}^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$

7 Des théorèmes pas vraiment indispensables



théorème 17: changement de variable strictement croissant

Soit $]a, b[$ et $]\alpha, \beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$

Soit f une fonction continue de $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit φ une fonction de classe C^1 , strictement croissante et bijective de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$.

Alors :

les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

dans la pratique, cela revient

- à poser $t = \varphi(u)$ et ainsi à remplacer dt par $\varphi'(u)du$
- à préciser que φ est C^1 et bijective de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$
- puis à dire que $t \rightarrow a$ [resp. $t \rightarrow b$] équivaut à $u \rightarrow \alpha$ [resp. $u \rightarrow \beta$] par croissance de φ

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à retenir



théorème 18: changement de variable strictement décroissant

Soit $]a, b[$ et $]\alpha, \beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$

Soit f une fonction continue de $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit φ une fonction de classe C^1 , strictement décroissante et bijective de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$.

Alors :

les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\beta^\alpha f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

dans la pratique, cela revient

- à poser $t = \varphi(u)$ et ainsi à remplacer dt par $\varphi'(u)du$
- à préciser que φ est C^1 et bijective de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$
- puis à dire que $t \rightarrow a$ [resp. $t \rightarrow b$] équivaut à $u \rightarrow \beta$ [resp. $u \rightarrow \alpha$] par décroissance de φ

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à retenir

Le programme précise qu'on appliquera ces résultats sans vérifier les hypothèses dans les cas de changements de variables classiques (càd la plupart du temps affines)



exemple 13:



Convergence et valeur de $\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ (on posera $t = \tan \theta$)



exemple 14: intégrale généralisée en $-\infty$



Nature de $I = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^3}$

- L'intégrale est généralisée en sa borne inférieure uniquement.
- On effectue le changement de variable affine $t = -u$.
Ce changement de variable est C^1 , strictement monotone et bijectif.

On peut donc affirmer que les intégrales I et $\int_{+\infty}^1 \frac{-du}{(-u)^3} = - \int_1^\infty \frac{du}{u^3}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

- Comme $\int_1^\infty \frac{du}{u^3}$ est une intégrale de référence convergente,

on peut en déduire que I converge, et l'on a $I = - \int_1^\infty \frac{du}{u^3}$

exemple 15: intégrale généralisée en une borne finie autre que zéro

 Nature de $I = \int_2^4 \frac{dt}{(4-t)^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
rem: on verra plus tard un théorème qui donne directement ce résultat

- L'intégrale est généralisée en sa borne supérieure
- On effectue le changement de variable affine $u = 4 - t$.
Ce changement de variable est C^1 , strictement monotone et bijectif.

On peut donc affirmer que les intégrales I et $\int_2^0 \frac{-du}{u^\alpha} = \int_0^2 \frac{du}{u^\alpha}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

- Or on sait que $\int_0^2 \frac{du}{u^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$
- Conclusion: I converge ssi $\alpha < 1$

exemple 16:

 A l'aide du changement de variable $u = t - 2$ étudier la convergence $I_\alpha = \int_2^4 \frac{dt}{(4-t^2)^\alpha}$

théorème 19: intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 de $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
telles que le produit $f.g$ possède une limite finie en a^+ et en b^- .

Alors:

- Les intégrales $\int_a^b f.g'$ et $\int_a^b f'.g$ sont de même nature.
- En cas de convergence, on a de plus

$$\int_a^b f.g' = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t) - \int_a^b f'.g = [f.g]_a^b - \int_a^b f'.g$$

rem: il est toujours possible de se passer de ce théorème en effectuant une IPP sur un segment $[x, y] \subset]a, b[$
puis faire tendre x vers a^+ et y vers b^-
rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à mémoriser

exemple 17:

 Convergence et éventuellement valeur de $I = \int_0^\infty t.e^{-t}.dt$ et $J = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$

exemple 18:

 Montrer que les intégrales $I = \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ et $J = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt$ sont de même nature

8 Absolue convergence, fonction intégrable sur un intervalle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors aussi notée $\int_I f(t)$ ou $\int_I f$



définition 7: intégrale absolument convergente

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{K})$

On dit que L'INTÉGRALE $\int_I f$ EST ABSOLUMENT CONVERGENTE lorsque l'intégrale $\int_I |f|$ converge.



définition 8: fonction intégrable sur un intervalle

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{K})$

On dit que LA FONCTION f EST INTÉGRABLE SUR L'INTERVALLE I lorsque l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente.

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

remarque 2 (vocabulaire)

- une fonction intégrable sur $[a, b[$ est dite INTÉGRABLE EN b
- une fonction intégrable sur $]a, b]$ est dite INTÉGRABLE EN a

remarque 3

- pour une fonction positive sur I il n'y a pas de différence entre CV et ACV
- pour une fonction négative sur I il n'y a pas de différence entre CV et ACV
- de manière plus générale, si la fonction est de signe constant au voisinage de la borne qui pose problème, il n'y a pas de différence entre CV et ACV
- la notion d'ACV n'est vraiment intéressante que pour les fonctions à valeurs complexes ou de signe non stable au voisinage de la borne qui pose problème
- "une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment" (au sens de la définition 8)

En effet:

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$.

On sait alors que $|f|$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et donc que par théorème (voir rappel

première page) l'intégrale $\int_a^b |f|$ existe.

- si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle inclus dans I .
ceci signifie par exemple que

$$f \text{ intégrable sur } \mathbb{R} \iff \begin{cases} f \text{ intégrable sur } [0, +\infty[\\ f \text{ intégrable sur }]0, +\infty[\\ f \text{ intégrable sur } [\pi, +\infty[\\ f \text{ intégrable sur }]-\infty, 0] \\ f \text{ intégrable sur }]-3, 6[\\ f \text{ intégrable sur } [-3, 6] \\ \vdots \end{cases}$$

**théorème 20:**

$L^1(I, \mathbb{K})$ est un sev de $C^0(I, \mathbb{K})$

"toute combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est encore une fonction intégrable sur I "

**théorème 21: l'absolue convergence implique la convergence**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{K})$

Si f est intégrable sur I alors $\int_I f = \int_I f(t)dt$ est convergente, et

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

rem: comme pour les séries, on a ACV $\implies$ CV mais la réciproque est fausse

**exemple 19:**

On montrera en exercice que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente mais pas absolument convergente.

Autrement dit, la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ mais l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ converge

**théorème 22: exemples de référence énoncés en terme d'intégrabilité**

1. la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0,1]$ (en 0)
2. la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (en $+\infty$) ssi $\alpha > 1$
3. la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$ (en 0) ssi $\alpha < 1$
4. la fonction $t \mapsto \exp(-\alpha t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (en $+\infty$) ssi $\alpha > 0$

rem: il est également précisé au programme que l'on pourra utiliser directement le résultat suivant (a réel fixé)

la fonction $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$

**exemple 20: reprendre aussi l'exemple 16**

α étant un réel fixé, donner la nature de $I_\alpha = \int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^\alpha}$ et de $J_\alpha = \int_1^2 \frac{dt}{(2-t)^\alpha}$

remarque 4 (rappel de définitions)

- On dit que $f =_{b^-} o(g)$ lorsque $\lim_{b^-} \frac{f}{g} = 0$
càd lorsqu'il existe une fonction h telle que $f = h.g$ avec $\lim_{b^-} h = 0$
- On dit que $f =_{b^-} O(g)$ lorsque la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de b^-
càd lorsqu'il existe une fonction h telle que $f = h.g$ avec h bornée au voisinage de b^-

théorème 23: théorèmes de comparaison

Soient $f, g \in C^0([a, b[, \mathbb{K})$

1. comparaison avec les inégalités:

Si $\begin{cases} |f| \leq |g| \\ g \text{ intégrable sur } [a, b[\text{ (en } b) \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ (en b)

2. comparaison avec les O :

Si $\begin{cases} f(t) =_{b-} O(g(t)) \\ g \text{ intégrable sur } [a, b[\text{ (en } b) \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ (en b)

3. comparaison avec les o :

Si $\begin{cases} f(t) =_{b-} o(g(t)) \\ g \text{ intégrable sur } [a, b[\text{ (en } b) \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ (en b)

4. comparaison avec les équivalents:

Si $f \underset{b-}{\sim} g$ alors l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ équivaut à celle de g

rem: on ne l'écrit pas, mais il y aurait un théorème analogue pour l'intervalle $]a, b]$

exemple 21: très classiques

1. Montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^2}$ est une intégrale convergente.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t} \cdot \ln t}$ est convergente.

exemple 22: new!!

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Montrer que si $x \mapsto x^2 \cdot f^2(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors f^2 l'est aussi

exemple 23: un exemple d'intégrale de Bertrand

Montrer que $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^3} dt$ est une intégrale convergente.

exemple 24: surprising, isn't it?

Montrons que la fonction $t \mapsto \cos(\frac{1}{t})$ est intégrable sur $]0, 1]$

remarque 5 (utile pour comparer à des intégrales de Riemann)

- si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \cdot f(t) = l \in \mathbb{R}$ alors $f(t) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right)$
- si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \cdot f(t) = +\infty$ alors $\frac{1}{t^\alpha} = o_{+\infty}(f(t))$

💡 théorème 24: théorème de l'intégrale nulle

Si f est continue, positive, intégrable sur I et si $\int_I f = 0$ alors f est nulle sur I

☀ exemple 25:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^\infty |P(t)| \cdot e^{-t} dt = \int_{[0, +\infty[} |P(t)| \cdot e^{-t} = 0$.
Montrer que P est le polynôme constant nul.

9 Fonctions à valeurs complexes

LORSQUE $f \in C^0(I, \mathbb{C})$ LA PLUPART DU TEMPS ON ÉTUDIE L'ACV, CEPENDANT LE RÉSULTAT SUIVANT EST À CONNAÎTRE.

💡 théorème 25: fonctions à valeurs complexes

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{C})$

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge ssi $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent.
et dans ce cas $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$

Le théorème résulte directement de la proposition ci-dessous

proposition 1 (limite d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $\boxed{\begin{array}{ccc} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t) \end{array}}$ et $t_0 \in \bar{I}$.

On a l'équivalence:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a + ib \in \mathbb{C} \iff \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = b$$

tout se passe comme si $\mathbb{C}$ était identifié à $\mathbb{R}^2$, on sait alors que la limite de la fonction vectorielle est à considérer composante par composante

pour la démonstration de ce résultat, on utilise l'égalité $|f(t) - (a + ib)| = \sqrt{(f_1(t) - a)^2 + (f_2(t) - b)^2}$

☀ exemple 26:

§ Nature et valeur de $I_n = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \cos(nt)$

10 Comparaison série-intégrale

théorème 26:

Soit n_0 un entier positif.

Soit f une fonction continue et DÉCROISSANTE sur $[n_0, +\infty[$.

La série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

remarque 6 (à savoir retrouver impérativement)

- on a pour tout $k > n_0$, $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$ et aussi $\int_{n_0}^{n_0+1} f(t)dt \leq f(n_0)$
- par sommation et la relation de Chasles

$$\forall n \geq n_0, \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t)dt$$

- en cas de convergence, par sommation et la relation de Chasles

$$\forall n \geq n_0, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

exemple 27: La preuve des séries de Riemann: enfin!

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

exemple 28:

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}$ dans le cas $\alpha = 1$ puis dans le cas général

11 Annexe

théorème 27: théorème de la limite monotone (rappel)

Soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ (éventuellement $]a, b[= \mathbb{R}$ tout entier)

Soit F une fonction **croissante** sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors:

- i) F possède une limite finie en b^- ssi F est majorée sur $]a, b[$.

Plus précisément:

- si F est majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{b^-} F = \sup_{]a, b[} (F) \in \mathbb{R}$
- si F n'est pas majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{b^-} F = +\infty$

- ii) F possède une limite finie en a^+ ssi F est minorée sur $]a, b[$.

Plus précisément:

- si F est minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{a^+} F = \inf_{]a, b[} (F) \in \mathbb{R}$
- si F n'est pas minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{a^+} F = -\infty$

démonstration du théorème 20

- par définition on a $\mathcal{I}(I, \mathbb{K}) \subset C^0(I, \mathbb{K})$
- la fonction constante nulle appartient à $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$ car $\int_I |0|$ converge (et vaut 0)
- Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$, ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notons $f_3 = \lambda.f_1 + f_2$ et $f_4 = |\lambda|.f_1 + |f_2|$

D'après l'inégalité triangulaire, on sait que On a

$$0 \leq |f_3| = |\lambda.f_1 + f_2| \leq |\lambda|.f_1 + |f_2| = f_4 \quad (*)$$

Comme f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$, on sait que $\int_I |f_1|$ et $\int_I |f_2|$ sont deux intégrales convergentes.

On sait alors par théorème que $\int_I |\lambda|.f_1 + |f_2| = \int_I f_4$ sera une intégrale convergente.

(comme somme d'intégrales convergentes(théorème 4)).

puis, d'après (*), par application du théorème de comparaison des fonctions positives(théorème 12), on peut affirmer que $\int_I |f_3|$ converge.

Ce qui prouve que $\lambda.f_1 + f_2 \in \mathcal{I}(I, \mathbb{K})$

et l'on vient ainsi de prouver la stabilité par combinaison linéaire