

C15 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Dans tout ce chapitre, on adoptera les notations suivantes :

- I désignera un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes
- a, b, c et d désigneront quatre fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$

Table des matières

1	Equations différentielles linéaires du premier ordre	2
1.1	équation homogène	2
1.2	équations avec second membre	4
1.3	cas des équations différentielles avec un coefficient en facteur de y'	7
2	Equations différentielles linéaires du second ordre	8
2.1	au programme de spé: seulement deux théorèmes et une méthode	8
2.2	équations différentielles du second ordre à COEFFICIENTS CONSTANTS (cours de sup)	10
3	Des exemples de recollement	11
4	Retour sur un théorème d'algèbre linéaire	14

exemple 1:

Résoudre l'équation différentielle $x.y' + \sin(x).y = 1$ sur $\mathbb{R}$

- Il s'agit de déterminer toutes les fonctions y , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, x.y'(x) + \sin(x).y(x) = 1$
- On peut remarquer de suite que cette équation différentielle ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$! En effet, si une solution existait elle devrait vérifier en particulier $0.y'(0) + \sin(0).y(0) = 1$, càd $0 = 1$ ce qui est impossible!
- En revanche, si on souhaite résoudre cette équa. diff. sur $]0, +\infty[$, un théorème nous permettra d'affirmer qu'une infinité de solutions existent!
- On retiendra de cet exemple que l'intervalle de résolution de l'équation différentielle est une hypothèse très importante dont il faut tenir compte!

On résout toujours une équation différentielle sur un INTERVALLE

théorème 1: caractérisation des fxs constantes sur un INTERVALLE

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I .

On a l'équivalence

$$f \text{ est constante sur } I \iff f' \text{ est nulle sur } I$$

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 équation homogène



théorème 2: structure de l'ensemble des solutions, solution générale

Soit l'équation $y' + a(x)y = 0$ où $a \in C^0(I, \mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$

1. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un espace vectoriel de dimension 1

2. LA SOLUTION GÉNÉRALE est $\begin{matrix} y : I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto K \cdot \exp(-A(x)) \end{matrix}$ où A désigne une primitive de a et $K \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque

rem: ceci signifie qu'il y a une infinité de solutions, à savoir toutes les fonctions de la forme $\begin{matrix} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto K \cdot \exp(-A(x)) \end{matrix}$

rem: ainsi en notant $f_1 : x \mapsto e^{-A(x)}$ et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions, on a

$$\mathcal{S}_H = \{K.f_1 \mid K \in \mathbb{K}\} = \text{vect}(f_1) = \{x \mapsto K.e^{-A(x)} \mid K \in \mathbb{K}\} = \text{vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$$

démonstration:

Comme sur I la fonction e^A ne s'annule pas, on a les équivalences

$$y' + a.y = 0 \iff (y' + a.y).e^A = 0 \iff (y' + A'.y)e^A = 0 \iff (y.e^A)' = 0$$

Comme I est un intervalle, ceci équivaut à dire que la fonction $y.e^A$ [càd la fonction $x \mapsto y(x)e^{A(x)}$] est constante sur I . On a ainsi les équivalences

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation différentielle sur } I &\iff \exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = K \\ &\iff \exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) = Ke^{-A(x)} \end{aligned}$$



méthode 1: résolution d'une EDLH du premier ordre (rédaction type)

La résolution consiste à déterminer une primitive de la fonction a puis à écrire la solution générale. exemple:

Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$ sur $] -\infty, 1[= I$

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
- La fonction $a : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie et continue sur $] -\infty, 1[= I$, elle possède donc des primitives sur cet intervalle.
- Une primitive de la fonction a sur I est $A : \begin{matrix}] -\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -2\sqrt{1-x} \end{matrix}$
- La solution générale est ainsi $\begin{matrix} y :] -\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \cdot \exp(2\sqrt{1-x}) \end{matrix}$ avec K constante arbitraire.



exemple 2:

1. Déterminer une fonction $a \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que la fonction $x \mapsto x^x$ soit solution de l'équation $(E) : y' + a(x).y = 0$
2. Donner la solution générale de (E)

☀ exemple 3: résolution de $(1+x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.

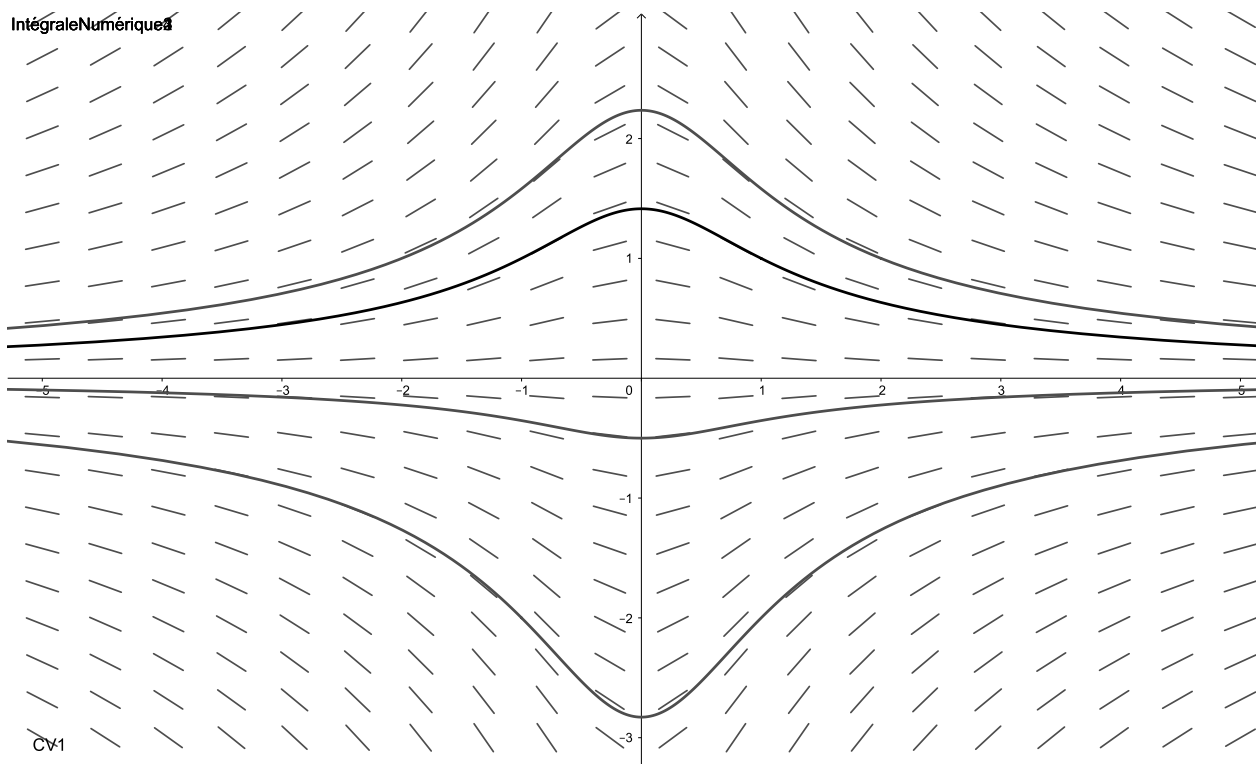
- On commence par remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$, et donc

résoudre $(1+x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ équivalent à résoudre $y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Cette démarche préalable est indispensable à faire, car elle nous permet de nous placer dans les hypothèses exactes du théorème.

Si à la place de $1+x^2$ nous avions eu $1-x^2$ la situation aurait été bien différente et beaucoup plus complexe (problème de recollement en ± 1 ... voir l'exemple 13 en particulier)

- Avant de passer à la résolution de cette modeste équation différentielle, donnons-en une interprétation géométrique :



- On a représenté ci-dessus le champ des tangentes associé à cette équation différentielle (càd au point de coordonnées (x,y) on a tracé un segment de pente $-\frac{x}{1+x^2} \cdot y$) ainsi que le graphe de plusieurs solutions

Résolvons maintenant l'équation différentielle.

- La fonction $a : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est continue sur $I = \mathbb{R}$ donc possède des primitives sur I
- Une primitive de la fonction a sur I est $A : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
- La solution générale est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}}$$

remarque 1 (définition de courbe intégrale)

On appelle courbe intégrale d'une équation différentielle la courbe représentative d'une solution de cette équation différentielle.

Dans l'exemple ci-dessus, **les courbes intégrales** de l'équation différentielle $(1+x^2)y' + xy = 0$ sont les représentations graphiques des fonctions du type $f_K : x \mapsto \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $K \in \mathbb{R}$

1.2 équations avec second membre

théorème 3: solution générale de l'équation avec second membre

Soit l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ (ED1) où a et $b \in C^0(I, \mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation avec second membre s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

rem: en notant f_p une solution particulière et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (ED1)

$$\mathcal{S} = \{f_p + K.f_1 \mid K \in \mathbb{K}\} = \{x \mapsto f_p(x) + K.e^{-A(x)} \mid K \in \mathbb{K}\} = f_p + \text{vect}(x \mapsto e^{-A(x)}) = f_p + \mathcal{S}_H$$

démonstration:

Notons f_p une solution particulière de (ED1)

Soit y une fonction dérivable sur I et posons $z = y - f_p$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (ED1)} &\iff y' + a.y = b \\ &\iff y' + a.y = f_p' + a.f_p \\ &\iff y' - f_p' + a.(y - f_p) = 0 \\ &\iff (y - f_p)' + a.(y - f_p) = 0 \quad \text{linéarité de la dérivation} \\ &\iff z' + a.z = 0 \\ &\iff z \text{ est solution de l'éq.homogène associée} \end{aligned}$$

théorème 4: Hors-Programme (à démontrer en exercice)

Soit l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ (ED1) où a et $b \in C^0(I, \mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation différentielle est

$$x \mapsto \left(K + \int^x b(t)e^{A(t)} dt \right) . e^{-A(x)} = \underbrace{\left(\int^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{K e^{-A(x)}}_{\text{sol. gén.}}$$

où K désigne une constante arbitraire et $x \mapsto \int^x b(t).e^{A(t)} dt$ une primitive de la fonction $b.e^A$

remarque 2

- On appelle solution de l'équa.diff $y' + a(x)y = b(x)$ sur I toute fonction f définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$
- Résoudre l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ c'est trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$

remarque 3

- Si f est solution de (ED1) alors f est nécessairement dérivable (et donc continue)
 - vu que $f' = b - af$ avec a, b et f fonctions continues, on en déduit que f' est aussi une fonction continue, c'est à dire que f est nécessairement de classe C^1 sur I
- Ceci justifie que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est toujours inclus dans } C^1(I, \mathbb{K})}$

exemple 4: la difficulté réside en la recherche de la primitive...

↯ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + \exp(x^2).y = 2.\exp(x^2)$

méthode 2: variation de la constante

On détermine souvent (c'est à dire pas toujours...), en l'absence de solution évidente, une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante : si f_1 est une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I , alors on cherche une solution particulière sous la forme $f_p : x \mapsto K(x)f_1(x)$ où K est une fonction inconnue dérivable sur I . En remplaçant dans l'équation différentielle (ED1), on obtient l'équation $K'(x) = \frac{b(x)}{f_1(x)}$.

Par primitivation, on trouve une fonction K et donc une solution particulière.

démonstration

On a

$$\begin{aligned} y' + a.y &= b \iff (K.f_1)' + a.K.f_1 = b \\ &\iff K'.f_1 + K.f_1 + a.K.f_1 = b \\ &\iff K'.f_1 + K.\underbrace{(f_1' + a.f_1)}_{=0} = b \\ &\iff K' = \frac{b}{f_1} \end{aligned}$$

exemple 5: variation de la constante (rédaction type)

Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x} \ln x$ (E) sur $]0, +\infty[$.

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre
- On commence par résoudre l'équation homogène associée, c-à-d $y' - \frac{y}{2x} = 0$.

La fonction $\boxed{a : I \longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto \frac{1}{2x}}$ est continue sur $]0, +\infty[= I$

Une primitive de cette fonction sur I est $\boxed{A : I \longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto \frac{1}{2} \ln x}$

La solution générale de l'équation homogène est donc $\boxed{y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto K.\sqrt{x}}$ avec K constante réelle arbitraire

- En l'absence de solution évidente, on utilise la méthode de la variation de la constante.
On cherche une solution particulière sous la forme $f_p : x \mapsto K(x).\sqrt{x}$ avec K fonction dérivable sur I .
En reportant dans (E), on obtient pour tout $x \in I$

$$f_p' - \frac{1}{2x}.f_p = \sqrt{x} \ln x \iff K'(x).\sqrt{x} + K(x).0 = \sqrt{x} \ln x \iff K'(x) = \ln x$$

Ainsi $K : x \mapsto x \ln x - x$ par exemple.

donc $f_p : x \mapsto \sqrt{x}(x \ln x - x)$ est une solution particulière

- La solution générale de l'équation avec second membre étant égale à la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène, on trouve ici comme solution générale de (E)

$$\boxed{y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto \sqrt{x}(x \ln x - x) + K.\sqrt{x}}$$
 avec K constante réelle arbitraire

exemple 6:

Résoudre $y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{x} + e^x - \frac{e^x}{2x}$ sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$

remarque 4 (principe de superposition)

On peut déterminer une solution particulière grâce au PRINCIPE DE SUPERPOSITION lorsque le second membre s'écrit comme une somme:

$$\text{si } \begin{cases} y_1 \text{ est sol. part. de } y' + a(x)y = b_1(x) \\ y_2 \text{ est sol. part. de } y' + a(x)y = b_2(x) \\ \lambda \text{ une constante scalaire} \end{cases} \quad \text{alors } \lambda.y_1 + y_2 \text{ est sol. part. de } y' + a(x)y = \lambda.b_1(x) + b_2(x)$$

démonstration:

On a

$$\begin{aligned} (\lambda.y_1 + y_2)' + a.(\lambda.y_1 + y_2) &= (\lambda.y_1' + y_2') + \lambda.a.y_1 + a.y_2 \\ &= \lambda.(\underbrace{y_1' + a.y_1}_{=b_1}) + \underbrace{y_2' + a.y_2}_{=b_2} \\ &= \lambda.b_1 + b_2 \end{aligned}$$

remarque 5

Dans le cas d'une équation du type: $y' + ay = P(x)e^{mx}$ où a et m sont des CONSTANTES réelles ou complexes, et P un polynôme, par la méthode des coefficients indéterminés, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = Q(x)e^{mx}$ avec Q polynôme tel que

- si $m = -a$, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$
- si $m \neq -a$, $\deg(Q) = \deg(P)$

💡 théorème 5: problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz I

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et a et b deux fonctions de $C^0(I, \mathbb{K})$

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixé.

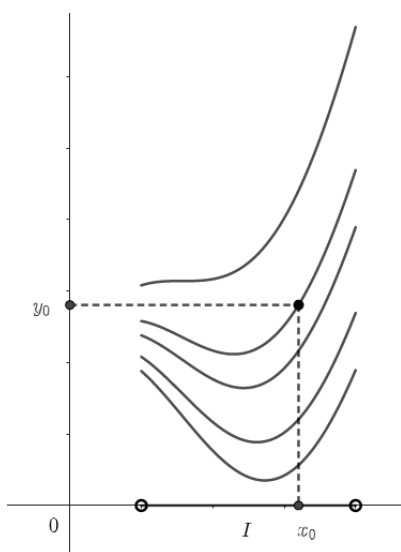
Alors :

IL EXISTE UNE UNIQUE fonction f définie sur I telle que $\begin{cases} \forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ \text{et } f(x_0) = y_0 \end{cases}$

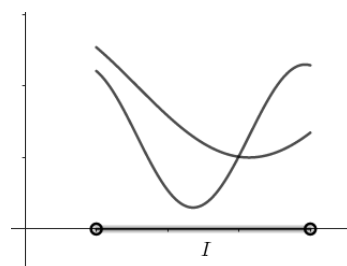
autrement dit

IL EXISTE UNE UNIQUE SOLUTION sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ tel que $y(x_0) = y_0$

rem: On dit qu'il y a existence et unicité à un problème de Cauchy linéaire du premier ordre



SITUATION EN MILLE-FEUILLES
PAR TOUT POINT $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$
PASSE UNE ET UNE SEULE COURBE INTÉGRALE
POUR UNE ÉQ. $y' + a.y = b$



SITUATION IMPOSSIBLE!!
DEUX COURBES INTÉGRALES
NE PEUVENT S'INTERSECTER
POUR UNE ÉQ. $y' + a.y = b$

exemple 7: sans aucun calcul!

 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{x}$ avec la condition $y(\pi) = 2$

remarque 6 (important)

Dans le théorème précédent, la condition initiale est du type $f(x_0) = y_0$. Si l'on considère une condition initiale du type $f'(x_0) = y_0$ ou encore $\lim_{\infty} f = y_0$, il n'y a aucune raison pour qu'il y ait existence et unicité de la solution.

remarque 7 (A savoir retrouver)

Il est facile de montrer que la fonction f définie sur I par $x \mapsto \left(y_0 \cdot e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^x b(t) e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}$ est l'unique solution du problème de Cauchy cité en théorème

1.3 cas des équations différentielles avec un coefficient en facteur de y'

définition 1: à ne pas retenir forcément

α, β et γ désignant 3 fonctions continues sur un intervalle I

1. on appelle ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE toute équation du type

$$\alpha(x).y' + \beta(x).y = \gamma(x)$$

2. on appelle ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE HOMOGÈNE ou sans second membre toute équation du type $\alpha(x).y' + \beta(x).y = 0$
3. lorsque la fonction α est la fonction constante égale à un, on dit parfois que c'est UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE *résolue*.

remarque 8

1. Une équations différentielles linéaires du premier ordre homogène possède toujours au moins une solution définie sur I , à savoir la fonction constante nulle. (l'ensemble des solutions n'est jamais vide)
2. Une équations différentielles linéaires du premier ordre non résolue avec second membre peut ne pas posséder de solution sur I . (cf. exemple de la première page)
3. **L'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaires du premier ordre homogène est un espace vectoriel (démonstration facile), mais on ne peut prédire sa dimension (contrairement aux équations différentielles linéaires résolues)** comme le montre l'exemple 11

Notons $\mathcal{S}_H = \{y \in C^1(I, \mathbb{K}) \mid a.y' + b.y = 0\}$

- $\mathcal{S}_H \subset C^1(I, \mathbb{K})$
- $\mathcal{S}_H$ est non vide car contient la fonction constante nulle
- $\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $y_1 \in \mathcal{S}_H$, $y_2 \in \mathcal{S}_H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a

$$\begin{aligned} a.(\lambda y_1 + y_2)' + b.(\lambda y_1 + y_2) &= a.(\lambda y_1' + y_2') + b.(\lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda \underbrace{(a.y_1' + b.y_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in \mathcal{S}_H} + \underbrace{(a.y_2' + b.y_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in \mathcal{S}_H} = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda.y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_H$

4. **Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur I** , résoudre l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur I équivaut à résoudre l'équation $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$ sur I . (et donc tous les résultats des paragraphes précédents s'appliquent)
5. Dans la pratique, on détermine les valeurs où a s'annule, on résout sur chacun des intervalles ne contenant pas les racines précédentes, puis on traite les recollements(=raccordements)

2 Equations différentielles linéaires du second ordre

2.1 au programme de spé : seulement deux théorèmes et une méthode

théorème 6: admis

a, b et c désignent trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (EDH2) est un espace vectoriel de dimension 2
2. La solution générale de l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (ED2) s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (EDH2).

ceci signifie que:

- La solution générale de (EDH2) est de la forme $y = A.f_1 + B.f_2$
- La solution générale de (ED2) est de la forme $y = f_p + A.f_1 + B.f_2$

où

- f_1 et f_2 sont deux fonctions linéairement indépendantes
- A et B sont deux constantes scalaires quelconques.

On écrit encore:

$$\mathcal{S}_H = \text{vect}(f_1, f_2) \text{ et } \mathcal{S} = \{f_p + A.f_1 + B.f_2 \mid (A, B) \in \mathbb{K}^2\} = f_p + \text{vect}(f_1, f_2)$$

remarque 9

1. On appelle solution de (ED2) sur I toute fonction f définie et deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I, f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$
2. Si f est solution alors f est nécessairement deux fois dérivable ce qui implique que f' et f sont continues. Vu que $f'' = c - af' - bf$ avec a, b, c, f et f' fonctions continues on en déduit que f'' est aussi une fonction continue, c'est à dire que f est nécessairement de classe C^2 sur I . Ceci justifie que l'ensemble des solutions est toujours inclus dans $C^2(I, \mathbb{K})$
3. Le PRINCIPE DE SUPERPOSITION est également applicable pour ce type d'équations.
4. ATTENTION!!! LA TECHNIQUE DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE VUE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS NE MARCHE PAS POUR LES ÉQUA.DIFF. À COEFFS. NON CONSTANTS!

méthode 3: si l'on dispose d'un point de départ...

On considère l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et

on suppose que l'on connaît une solution, notée f_1 , de l'équation homogène associée, et que de plus f_1 ne s'annule pas sur l'intervalle I .

La méthode consiste à chercher les solutions de l'équation complète sous la forme $y : x \mapsto f_1(x).z(x)$.

On est alors ramené à une équation différentielle linéaire du premier ordre en z' .

En effet

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = c &\iff (f_1 z)'' + a(f_1 z)' + b(f_1 z) = c \\ &\iff (f_1'' z + 2f_1' z' + f_1 z'') + a(f_1' z + f_1 z') + b f_1 z = c \\ &\iff f_1 z'' + (2f_1' + a f_1) z' + \underbrace{(f_1'' + a f_1' + b f_1)}_{=0} z = c \\ &\iff z'' + \frac{2f_1' + a f_1}{f_1} z' = \frac{c}{f_1} \end{aligned}$$

On résout alors cette équation différentielle puis, par primitivation, on détermine z , et en multipliant par f_1 on a y !

Cette méthode consiste à faire un changement de fonction inconnue

☀ exemple 8:

Soit $(E) : (x^2 - 6x - 1)y'' - 2(x - 3)y' + 2y = 0$

1. Déterminer les polynômes de degré inférieur ou égal à deux solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Soit I un intervalle sur lequel $x^2 - 6x - 1$ ne s'annule pas. Résoudre (E) sur I ... sans calcul!

L'exemple qui suit est classique: comme vous ne pouvez deviner une solution de l'équation homogène associée (la fameuse fonction notée f_1 de la méthode), on vous fournit une indication qui a pour but de vous permettre de commencer (... puis de finir...) la résolution.

☀ exemple 9:

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$ sachant qu'il existe une solution polynomiale à l'équation homogène associée.

☀ exemple 10:

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = 3x^2$

(on pourra chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$)

💡 théorème 7: problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz II

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et a, b et c trois fonctions de $C^0(I, \mathbb{K})$

Soit $x_0 \in I$ et, y_0 et y_1 deux réels ou complexes fixés.

Alors:

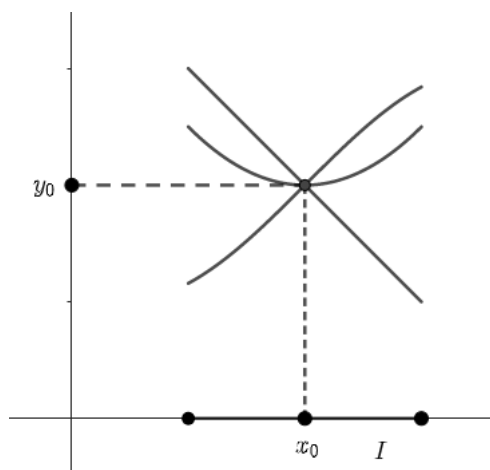
IL EXISTE UNE UNIQUE fonction f définie sur I telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I, f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x) \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

autrement dit

IL EXISTE UNE UNIQUE SOLUTION sur I de l'équa.diff. $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ tel que $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$

rem: on dit qu'il y a existence et unicité à un problème de Cauchy linéaire du second ordre



2.2 équations différentielles du second ordre à coefficients constants (cours de sup)

Voir RDM et formulaire!

théorème 8: Hors programme

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = P(x).e^{mx}$ où $\begin{cases} P \text{ est un polynôme} \\ m \text{ est une constante réelle ou complexe} \end{cases}$

Il existe une solution particulière de (E) du type $x \mapsto e^{mx}Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et de plus :

- si m n'est pas solution de E_c alors $\deg Q = \deg P$
- si m est racine simple de E_c alors $\deg Q = \deg P + 1$
- si m est racine double de E_c alors $\deg Q = \deg P + 2$

méthode 4: changement de variable dans une équation différentielle

Dans certains exercices, on demande de résoudre une équation différentielle à l'aide d'un changement de variable. (par exemple, on demande de poser $t = \ln x$). La méthode consiste alors à définir une nouvelle fonction inconnue z qui dépendra de la nouvelle variable et qui vérifiera $z(t) = y(x)$.

Un changement de variable dans une équation différentielle entraîne toujours un changement de fonction inconnue

(Attention! on n'a pas $z'(t) = y'(x)$! ...)

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ à l'aide du changement de variable $x = e^t$.
(écrire les solutions à valeurs réelles)

- On commence par écrire que pour tout $x > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence

$$x = e^t \iff t = \ln x$$

- On considère une fonction inconnue z qui dépend de la variable t telle que

$$\forall x > 0, y(x) = z(t) = z(\ln(x))$$

- En dérivant par rapport à x chaque membre de l'égalité $y(x) = z(\ln x)$, on trouve:

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) \text{ puis } y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$$

- En reportant dans l'équation cela donne

$$\forall x > 0, x^2 \left(-\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) \right) + x \left(\frac{1}{x} z'(\ln x) \right) + 4z(\ln x) = 0$$

$$\text{Soit } \forall x > 0, z''(\ln x) + 4z(\ln x) = 0.$$

En revenant à la variable t cela donne $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z(t) = 0.}$

- La solution générale de cette équation est $\boxed{\begin{matrix} z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t) \end{matrix}}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

- La solution générale de l'équation initiale est donc

$$\boxed{\begin{matrix} y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A \cdot \cos(2 \ln x) + B \cdot \sin(2 \ln x) \end{matrix}} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

remarque: comme on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(x) = y(e^t)$$

On peut dériver par rapport à t et on obtient

$$z'(t) = e^t \cdot y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t \cdot y''(e^t) + (e^t)^2 y'(e^t)$$

ce qui donne

$$z'(t) = xy'(x) \text{ et } z''(t) = xy''(x) + x^2 y'(x)$$

3 Des exemples de recollement



exemple 11:

résoudre $(E) : xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Le champ correspondant est ci-dessous :

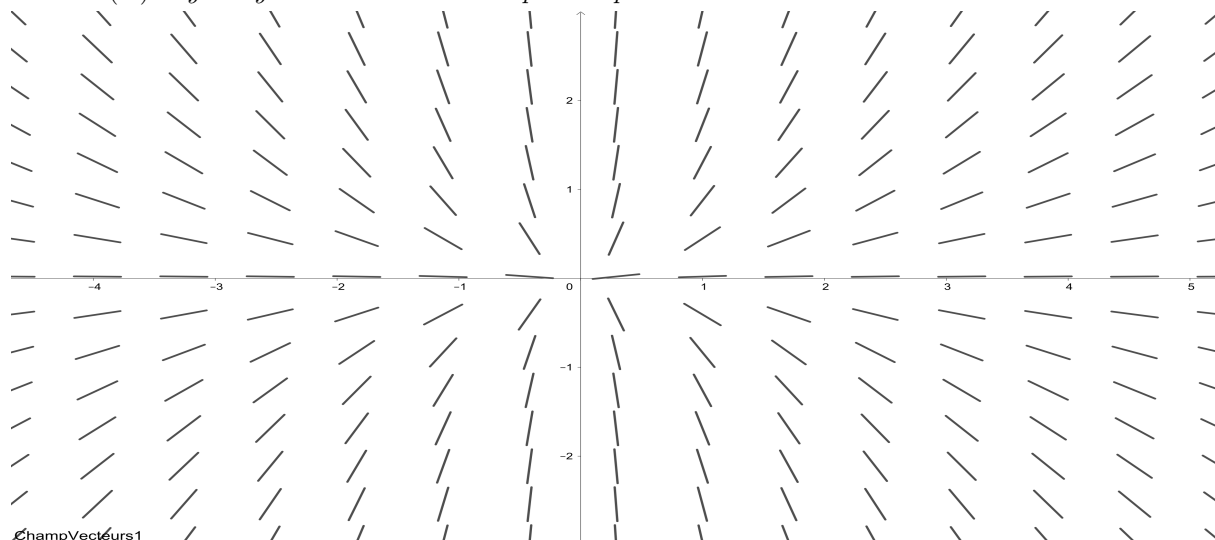


Schéma de l'étude:

1. On résout l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$, ... et l'on trouve $x \mapsto Kx^2$ comme sol.géné
2. On résout l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$, ... et l'on trouve $x \mapsto Kx^2$ comme sol.géné
3. On étudie le raccordement en 0

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} Lx^2 & \text{si } x < 0 \\ Kx^2 & \text{si } x > 0 \\ M & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i) Etude de la continuité en 0

$$\text{On a } \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x \neq 0}} f(x) = 0.$$

On en déduit que f est continue en 0 ssi $M = 0$.

Dorénavant, on considère que $M = 0$.

Etude de la dérivabilité en 0

$$\text{ii) On a } \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{Kx^2}{x} = 0. \text{ Donc, } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ avec } f'_d(0) = 0$$

$$\text{iii) On a } \lim_{0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^-} \frac{Lx^2}{x} = 0. \text{ Donc, } f \text{ est dérivable à gauche en } 0 \text{ avec } f'_g(0) = 0$$

iv) On en déduit donc que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. (ceci est remarquable : quelles que soient les valeurs de K et L , c'est à dire quelles que soient les fonctions f que l'on considère, la dérivée en 0 existe toujours et a pour valeur 0)

v) On a de plus $0.f'(0) - 2f(0) = 0 \times 0 - 2 \times 0 = 0$. Donc (E) est bien vérifiée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Conclusion : les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} Lx^2 & \text{si } x < 0 \\ Kx^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où K et L sont deux constantes réelles quelconques.

Remarque : toutes les courbes intégrales passent par $(0,0)$ avec une tangente horizontale... mais cela ne remet bien sûr pas en cause le théorème d'existence et d'unicité à un problème de Cauchy!



exemple 12: structure de l'ensemble des solutions de l'équa.précédente

- Pour tout $(K,L) \in \mathbb{R}^2$ notons
$$f_{K,L} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} Lx^2 & \text{si } x < 0 \\ Kx^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- On a montré que $\mathcal{S} = \{f_{K,L} | (K,L) \in \mathbb{R}^2\}$
- Considérons plus particulièrement

$$f_{1,0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{0,1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

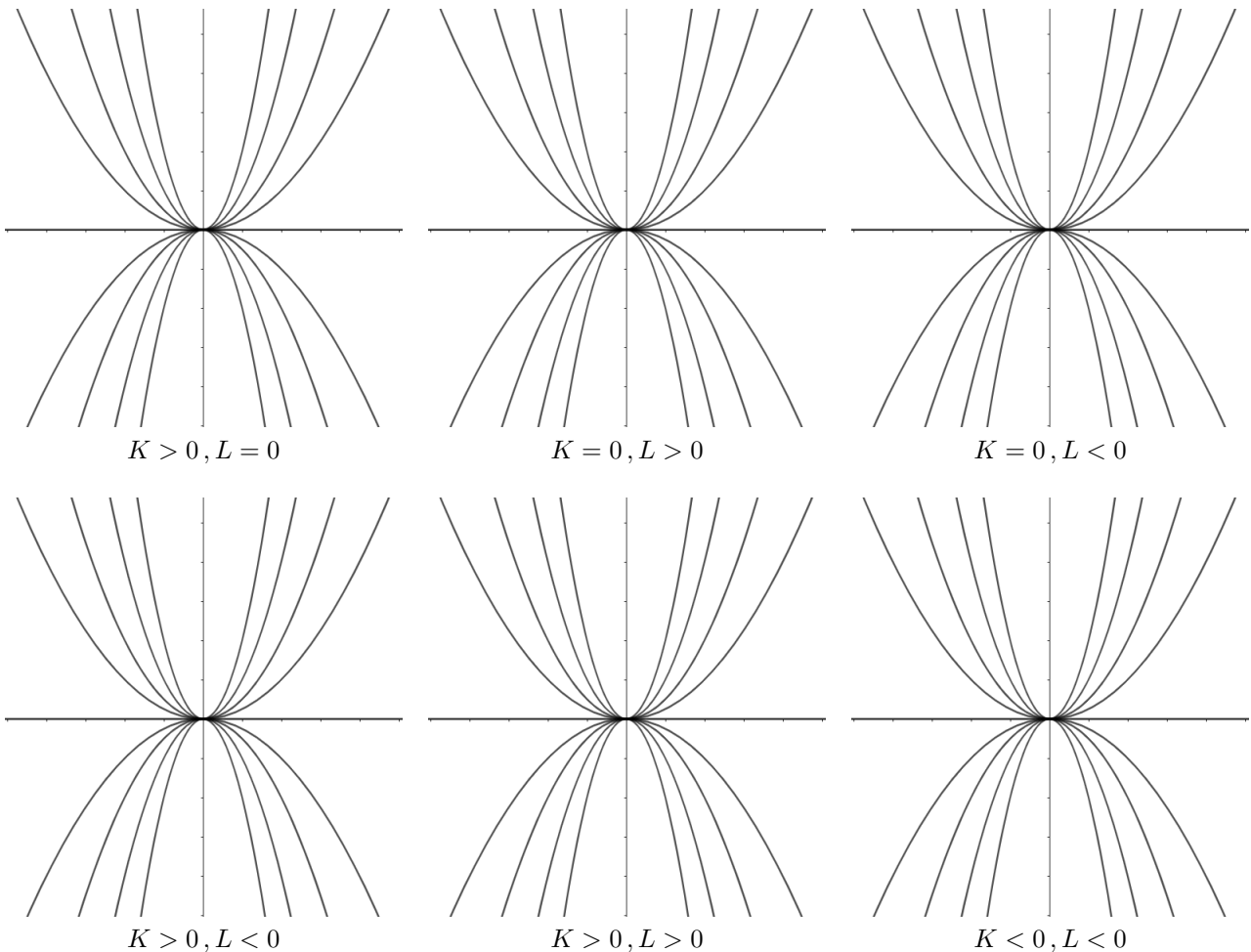
- Pour tout $(K,L) \in \mathbb{R}^2$ on a $f_{K,L} = K.f_{1,0} + L.f_{0,1}$ en effet:
 - si $x < 0$, on a $K.f_{1,0}(x) + L.f_{0,1}(x) = K.0 + L.x^2 = Lx^2 = f_{K,L}(x)$
 - si $x \geq 0$, on a $K.f_{1,0}(x) + L.f_{0,1}(x) = K.x^2 + L.0 = Kx^2 = f_{K,L}(x)$

- Ainsi $\mathcal{S} = \{K.f_{1,0} + L.f_{0,1} | (K,L) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(f_{1,0}; f_{0,1})$

- La famille $(f_{1,0}; f_{0,1})$ est une famille libre.
 En effet, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.f_{1,0} + b.f_{0,1} = 0$
 ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a.f_{1,0}(x) + b.f_{0,1}(x) = 0$
 En particulier pour $x = 1$ cela donne $a.1 + b.0 = 0$
 et pour $x = -1$ cela donne $a.0 + b.(-1) = 0$
 On a bien montré que $a = b = 0$

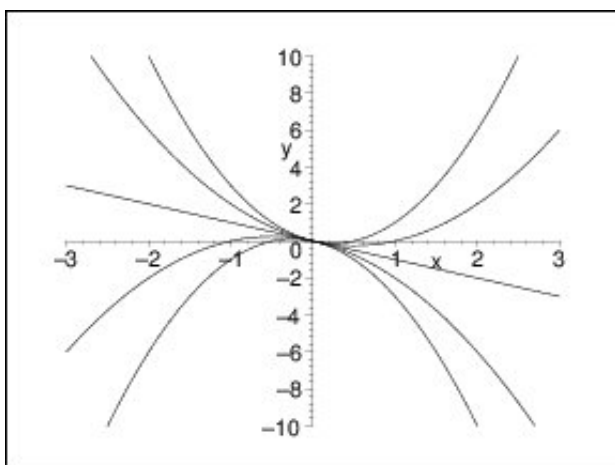
- Conclusion:** $(f_{1,0}; f_{0,1})$ est une base de $\mathcal{S}$

L'ensemble des solutions est ainsi un espace vectoriel de dimension...deux !

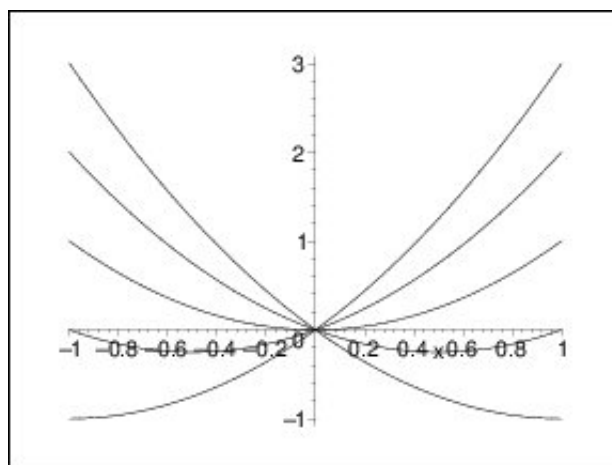


☀ exemple 13: Des exemples simples et riches de recollement

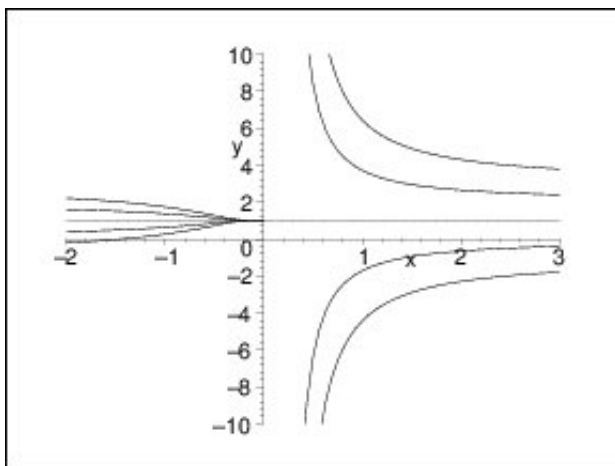
1. L'équation $xy' - 2y = x$ a pour solution générale $y : x \mapsto -x + Kx^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Sur $\mathbb{R}$, toute courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à toute courbe sur $\mathbb{R}^+$
2. L'équation $xy' - y = x^2$ a pour solution générale $y : x \mapsto x^2 + Kx$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Sur $\mathbb{R}$, chaque courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une courbe particulière sur $\mathbb{R}^+$
3. L'équation $x^2y' + y = 1$ a pour solution générale $y : x \mapsto 1 + Ke^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Sur $\mathbb{R}$, toutes les courbes sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une seule des courbes sur $\mathbb{R}^+$
4. L'équation $xy' + y = x^2$ a pour solution générale $y : x \mapsto \frac{x^2}{3} + \frac{K}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Sur $\mathbb{R}$, une seule courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une seule courbe sur $\mathbb{R}^+$



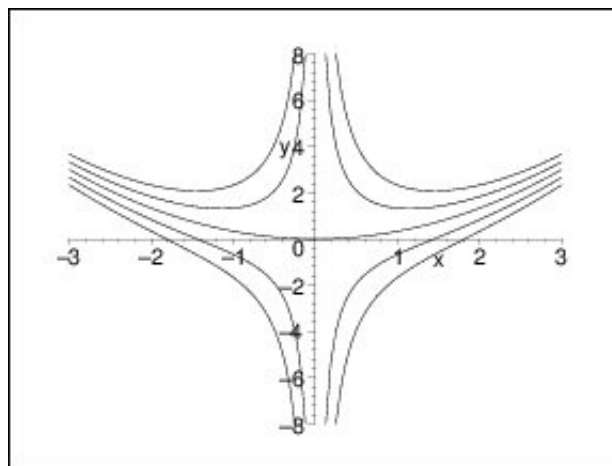
cas 1



cas 2



cas 3



cas 4

4 Retour sur un théorème d'algèbre linéaire

On revient sur le théorème ci-dessous:

théorème 9: solution d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $a \in G$.

On considère l'équation linéaire $f(u) = a$ d'inconnue u

1. L'équation a au moins une solution ssi $a \in \text{Im}(f)$
2. si u_0 est une solution particulière, alors

$$u \text{ est solution si et seulement si } u \text{ s'écrit } u = u_0 + v \text{ avec } v \in \ker(f)$$

c'est à dire que:

LA SOLUTION GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE EST DONNÉE PAR LA SOMME D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE:

on utilise parfois un abus d'écriture en écrivant que l'ensemble des solutions est

$$S = u_0 + \ker(f) = \{u_0 + v \mid v \in \ker(f)\}$$

exemple 14:

On considère

$$\begin{array}{ccc} \varphi : C^1(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & C^0(I, \mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & y' + a.y \end{array}$$

On note $S_H [S]$ l'ensemble des solutions de l'équa.diff. $y' + a.y = 0$ [$y' + a.y = b$]

- Il est clair que φ est une application linéaire: la vérification serait triviale.
- On remarque que $S_H = \ker(\varphi)$.
Or un théorème d'algèbre linéaire affirme que *le noyau d'une application linéaire est un sev*.
Nous venons de montrer que S_H est un sev! (mais nous n'avons pas justifié sa dimension)
- Le théorème 4 affirme que la solution générale de l'équa. diff. $y' + a.y = b$ s'écrit comme la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
(retenons simplement ici que pour toute fonction $b \in C^0(I, \mathbb{K})$ fixée, l'équa.diff $y' + a.y = b$ possède au moins une solution.)
- On en déduit donc que φ est une application surjective, car pour toute fonction $b \in C^0(I, \mathbb{K})$, l'équation $\varphi(y) = b$ possède au moins une solution.

En notant f_p une de ces solutions, le théo 9 ci-dessus affirme que l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(y) = b$ s'écrit $S = f_p + \ker(\varphi)$,

on retrouve bien l'égalité $S = f_p + S_H$!