

C13 - VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES SOUS-ESPACES PROPRES

Table des matières

1	Polynômes caractéristiques	2
2	Elements propres d'un endomorphisme (dimension quelconque)	3
2.1	Définitions et méthode (V060)	3
2.2	exemples (V061)	6
3	Eléments propres d'une matrice (V062)	8
3.1	endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée(rappel)	8
3.2	définitions et méthodes	9
4	Propriétés des éléments propres (V063)	11
5	Annexe: rappels sur les polynômes	14
6	Polynômes matriciels(HP) (V032)	15
7	Polynômes d'endomorphismes (HP) (V033)	16
8	Complément: matrice réelle vue comme une matrice complexe	17
9	Rappels sur les systèmes linéaires	18
9.1	systèmes homogènes	18
9.2	systèmes avec second membre	18

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes, E désignera un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel (le plus souvent, de dimension finie n) et f un endomorphisme de E

- On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de $E \rightarrow E$
- On rappelle aussi que



définition 1: sev stable par un endomorphisme

Soit F un sev de E .

On dit que F EST UN SEV STABLE PAR f lorsque $f(F) \subset F$, c'est à dire lorsque $\forall \vec{x} \in F, f(\vec{x}) \in F$
remarque: $\{\vec{0}\}$ et E sont toujours des sev stables par f lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$ (trivial)

1 Polynômes caractéristiques



définition 2: polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE LA MATRICE A le déterminant de la matrice $X.I_n - A$.

On le note χ_A . On a donc

$$\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)$$

La fonction $x \mapsto \chi_A(x)$ est polynomiale, unitaire, de degré n

rem (HP): $\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A).X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$



exemple 1: Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\pi \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



théorème 1:

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique
2. A et A^T ont le même polynôme caractéristique.

Deux matrices peuvent avoir même polynôme caractéristique sans toutefois être semblables.



définition 3: polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE L'ENDOMORPHISME f , et on note χ_f le déterminant de l'endomorphisme $X \text{id}_E - f$.

On a donc

$$\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f)$$

Le polynôme $\chi_f(X)$ est un polynôme unitaire de degré n où $n = \dim E$

rem (HP): $\chi_f(X) = X^n - \text{tr}(f).X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(X \text{id}_E - f) = X \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = X.I_n - A$$

et ainsi

$$\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f) = \det(X.I_n - A) = \chi_A(X)$$

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal au polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice qui lui est associée!



exemple 2:



Déterminer le polynôme caractéristique des endomorphismes suivants:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (x, y) &\longmapsto (2x + y, x - y) & P &\longmapsto X.P' + P'' \end{aligned}$$

 exemple 3: homothétie

↗ Déterminer le polynôme caractéristique de l'homothétie de rapport k .

2 Elements propres d'un endomorphisme (dimension quelconque)

E désigne un $\mathbb{K}$ -ev de dimension quelconque, et f un endomorphisme de E

2.1 Définitions et méthode (V060)

 définition 4:

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et f un endomorphisme de E .

- On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est UNE VALEUR PROPRE (v.p) DE f lorsque il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ NON NUL tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
- Dans ce cas, le vecteur $\vec{x}$ s'appelle UN VECTEUR PROPRE ($\vec{v}.p$) ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle LE SPECTRE DE f , et se note $sp(f)$

 exemple 4:

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x + y, 2x)$$

1. Vérifier que $\vec{u} = (1, 1)$ est un vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée?
2. $\vec{v} = (1, 3)$ est-il vecteur propre de f ?

 exemple 5: éléments propres de l'endomorphisme identité

↗ Déterminer les valeurs et vecteurs propre de $f = id_E$

 exemple 6: dans un espace de polynômes

Soit $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$

$$P \mapsto (X - 1).P'$$

On note pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_\lambda = (X - 1)^\lambda$

1. X^2 est-il vecteur propre de f ?
2. P_λ est-il vecteur propre de f ? Si oui, quelle est la vp associée?

 méthode 1: comment déterminer les éléments propres en dim quelconque

↗ On détermine les solutions NON TRIVIALES de l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ (càd avec $\vec{x} \neq \vec{0}$)

rem: cette équation s'appelle "ÉQUATION AUX ÉLÉMENTS PROPRES"

 exemple 7: dans un espace de matrices

Soit $\varphi: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \mapsto A^T + 2A$$

1. Montrer que si λ est une valeur propre de φ alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$
2. 3 est-il valeur propre? 1 est-il valeur propre?
3. Conclure sur les éléments propres de φ

💡 théorème 2: droite vectorielle stable

Soit $\vec{a}$ un vecteur non nul de E . Il y a équivalence entre:

- i) la droite $D = \text{vect } \vec{a}$ est stable par f
- ii) $\vec{a}$ est un vecteur propre de f

Ainsi déterminer les droites vectorielles stables par f revient à déterminer les vecteurs propres de f

🍃 définition 5: sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et f un endomorphisme de E .

Soit $\lambda \in \text{sp}(f)$.

Le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda \cdot \text{id}_E$ est appelé SOUS-ESPACE PROPRE(SEP) DE f ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ .

On le note

$$E_\lambda \text{ ou } E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_E) = \{\vec{x} \in E \mid (f - \lambda \cdot \text{id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}\}$$

rem: $E_\lambda(f)$ est égal à l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la vp λ union le singleton vecteur nul.

rem: on rappelle que si g est une application linéaire alors $g(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\ker(g)$ est un sev

remarque 1

- on appelle ÉLÉMENTS PROPRES de l'endomorphisme f les valeurs propres et les vecteurs propres de f
- L'ENSEMBLE DES VECTEURS PROPRES ASSOCIÉS À UNE MÊME VALEUR PROPRE λ N'EST PAS UN SEV car cet ensemble ne possède pas le vecteur nul!

remarque 2 (Rappel sur l'injectivité et la bijectivité)

Soit g un endomorphisme de E . On a vu que

- g injective $\iff \ker(g) = \{\vec{0}\}$
- Si de plus E est de dimension finie on a

$$g \text{ bijective} \iff g \text{ injective} \iff g \text{ surjective} \iff \ker(g) = \{\vec{0}\} \iff \text{rg}(g) = \dim E \iff \dots$$

proposition 1 (intéressant un dimension infinie seulement)

On a l'équivalence:

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \text{l'endomorphisme } f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas injectif}$$

En particulier:

$$0 \text{ est valeur propre de } f \text{ si et seulement si } f \text{ n'est pas injectif}$$

démonstration:

en effet, on a les équivalences:

$$\lambda \text{ est vp de } f \iff \exists \vec{x} \neq \vec{0}, f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \iff \exists \vec{x} \neq \vec{0}, (f - \lambda \text{id}_E)(\vec{x}) = \vec{0} \iff \ker(f - \lambda \text{id}_E) \text{ n'est pas réduit au vecteur nul}$$

💡 théorème 3:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace vectoriel DE DIMENSION FINIE.

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- i) λ est une valeur propre de f
- ii) λ est une racine du polynôme caractéristique χ_f
- iii) l'endomorphisme $f - \lambda id_E$ n'est pas bijectif

Lorsque $\dim E$ est finie, les valeurs propres de f sont LES racines de son polynôme caractéristique

démonstration:

On a les équivalences

$$\lambda \text{ vp de } f \iff f - \lambda id_E \text{ n'est pas injectif} \iff f - \lambda id_E \text{ n'est pas bijectif} \iff \det(f - \lambda id_E) = 0$$

or

$$\det(f - \lambda id_E) = \det(-(\lambda id_E - f)) = (-1)^n \cdot \det(\lambda id_E - f) = (-1)^n \cdot \chi_f(\lambda)$$

on a bien montré l'équivalence

$$\lambda \text{ vp de } f \iff \chi_f(\lambda) = 0$$

📎 méthode 2: déterminer les éléments propres en dimension finie.

On détermine le polynôme caractéristique puis ses racines.

Pour chaque vp trouvée on détermine le sep correspondant en résolvant l'équation aux éléments propres $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ ou $(f - \lambda id_E)(\vec{x}) = \vec{0}$

Exemple:

Déterminer les éléments propres de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + y, 3x - y)$

dim E quelconque

dim E finie

dim E finie

(cas particulier)

$$\begin{array}{c} \lambda \text{ vp de } f \\ \Updownarrow \\ \ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\} \\ \Updownarrow \\ f - \lambda id_E \text{ NON injectif} \end{array}$$

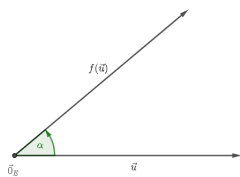
$$\begin{array}{c} \lambda \text{ vp de } f \\ \Updownarrow \\ \ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\} \\ \Updownarrow \\ f - \lambda id_E \text{ NON bijectif} \\ \Updownarrow \\ \text{rg}(f - \lambda id_E) < \dim E \\ \Updownarrow \\ \lambda \text{ racine de } \chi_f \\ \Updownarrow \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \text{ vp de } f \\ \Updownarrow \\ \ker(f) \neq \{0\} \\ \Updownarrow \\ f \text{ NON bijectif} \\ \Updownarrow \\ \text{im}(f) \neq E \\ \Updownarrow \\ \vdots \end{array}$$

2.2 exemples (V061)

☀ exemple 8: éléments propres d'une rotation vectorielle du plan

Soit f la rotation vectorielle d'angle α . Donner les éléments propres de f .



☀ exemple 9: dans un espace de polynômes

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\begin{matrix} f : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{matrix}$ dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$

Solution:

1. On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation aux éléments propres $f(P) = \lambda.P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$
2. On commence par remarquer que 0 est valeur propre évidente:
en effet on a $P' = 0$ pour tout polynôme constant.
Les vecteurs propres associés à la vp zéro sont les polynômes constants non nuls.
On a $E_0(f) = \mathbb{R}_0[X]$
3. Soit λ un réel non nul et P un polynôme.
Si $P' = \lambda.P$ alors P et P' ont le même degré! Ce qui n'est possible que si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Ceci prouve que l'équation $f(P) = \lambda.P$ ne possède que la solution triviale $P = 0$,
et donc que λ n'est pas valeur propre.
4. Conclusion: on a montré que $sp(f) = \{0\}$

☀ exemple 10: dans un espace de fonctions

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\begin{matrix} f : E & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & g' \end{matrix}$

dans le cas où $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Quelques remarques:

- On a $f(\sin) = \cos (\neq \lambda \sin)$ donc $\sin$ n'est pas vecteur propre de f
- On a $f(\exp) = \exp = 1.\exp$ donc la fonction $\exp$ est v.p de f associée la v.p un
- Notons h_0 la fonction constante égale à un, on a $f(h_0) = 0 = 0.h_0$
ceci prouve que 0 est v.p de f et que h_0 est un $\vec{v}.p$ associé

Solution:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in E$.

- On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation aux éléments propres $f(g) = \lambda.g$
- L'équation $f(g) = \lambda.g$ n'est rien d'autre que l'équation différentielle $g' - \lambda.g = 0$
- Le cours sur les équations différentielles nous indique que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, la solution générale est $\begin{matrix} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\exp(\lambda.x) \end{matrix}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
- On en déduit que tout réel λ est valeur propre de f et que $E_\lambda(f) = \{K.h_\lambda | K \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(h_\lambda)$
où h_λ est la fonction définie par $\begin{matrix} h_\lambda : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\lambda x) \end{matrix}$

Conclusion: $sp(f) = \mathbb{R}$ et chaque sep est de dimension un

 exemple 11:

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de l'application

$$f : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \end{matrix}$$

dans le cas où $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis dans le cas où $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solution:

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation aux éléments propres $f(M) = \lambda.M$.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f(M) = \lambda M &\iff \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} a &= \lambda a \\ c &= \lambda b \\ d &= \lambda c \\ b &= \lambda d \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (1 - \lambda)a &= 0 \\ c &= \lambda b \\ d &= \lambda^2 b \\ b &= \lambda^3 b \end{cases} &\iff \begin{cases} (1 - \lambda)a &= 0 \\ (1 - \lambda^3)b &= 0 \\ c &= \lambda b \\ d &= \lambda^2 b \end{cases} \quad (S) \end{aligned}$$

Puis on effectue une discussion sur les solutions de $1 - \lambda = 0$ et $1 - \lambda^3 = 0$, ce qui nécessite une discussion $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$!

• **cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

- si $\lambda \neq 1$, on a $1 - \lambda \neq 0$ et $1 - \lambda^3 \neq 0$ et donc $(S) \iff a = b = c = d = 0$
- si $\lambda = 1$, on a $(S) \iff c = b = d$

Conclusion : $sp_{\mathbb{R}}(f) = \{1\}$

et $E_1(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b = c = d \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• **cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

- si $\lambda = 1$ on a $(S) \iff c = b = d$
- si $\lambda = \exp(2i\pi/3) = j$ on a $(S) \iff (a = 0, c = jb, d = j^2b)$
- si $\lambda = \exp(4i\pi/3) = j^2$ on a $(S) \iff (a = 0, c = j^2b, d = j^4b = jb)$
- sinon on a $(S) \iff a = b = c = d = 0$

Conclusion : $sp_{\mathbb{C}}(f) = \{1, j, j^2\}$ et

$$E_1(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_j(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ jb & j^2b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{j^2}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ j^2b & jb \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j^2 & j \end{pmatrix} \right)$$

☀ exemple 12: éléments propres des endomorphismes de référence

f	v.p.	s.e.p.
homothétie de rapport k	k	$E_k(f) = E$
projection sur F_1 parallèlement à F_2	$0, 1$	$\begin{cases} E_0(f) = F_2 \\ E_1(f) = F_1 \end{cases}$
symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2	$-1, 1$	$\begin{cases} E_{-1}(f) = F_2 \\ E_1(f) = F_1 \end{cases}$

3 Éléments propres d'une matrice (V062)

3.1 endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée(rappel)

🍃 définition 6: application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À A est l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de leur respective base canonique.

Autrement dit, c'est l'application

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ aux matrices unicolonnes rem: on a déjà vu qu'à une matrice donnée on pouvait associer une infinité d'applications linéaires, il y en a une que l'on distingue c'est l'endomorphisme canoniquement associé.

🍃 définition 7: endomorphisme canoniquement associé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'ENDOMORPHISME CANONIQUEMENT ASSOCIÉ À A est l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique.

Autrement dit, c'est l'application

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ aux matrices unicolonnes

☀ exemple 13:

déterminer l'endomorphisme canoniquement associé aux matrices suivantes et préciser image et noyau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et celui associé à } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 définitions et méthodes



définition 8:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, SPECTRE ET SOUS-ESPACES PROPRES DE LA MATRICE A les valeurs propres, vecteurs propres, spectre et sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A , c'est à dire:

1. λ EST VALEUR PROPRE DE A ssi $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.
Dans ce cas, X EST UN VECTEUR PROPRE DE A ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ
2. LE SEP DE A ASSOCIÉ À LA VP λ est le noyau de $A - \lambda.I_n$
ainsi

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda.I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda.I_n)X = 0\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda.X\}$$

rem: le sep $E_\lambda(A)$ correspond à l'ensemble des $\vec{v}.p$ de A auquel on ajoute la matrice unicolonne nulle

rem: on notera que LES VECTEURS PROPRES D'UNE MATRICE SONT DES MATRICES UNICOLONNES

rem: 0 est valeur propre d'une matrice ssi cette matrice n'est pas inversible



exemple 14: très classique

1. La matrice I_n possède 1 comme unique valeur propre et toute matrice unicolonne autre que la matrice nulle est vecteur propre.
2. Soit A une matrice. On note λ une de ses valeurs propres et X un vecteur propre associé
 - (a) Montrer que X est vecteur propre de la matrice A^2
 - (b) Montrer que $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ est valeur propre de la matrice $A^3 - 3A^2 + 4I_n$



exemple 15: valeurs propres et vecteurs propres évidents

Déterminer les vp et $\vec{v}.p$ évidents de $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

 théorème 4:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- i) λ est une valeur propre de A
- ii) λ est une racine du polynôme caractéristique χ_A
- iii) la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

en particulier: 0 est valeur propre de A ssi A n'est pas inversible

démonstration: **méthode 3: comment déterminer les éléments propres d'une matrice A**

1. On calcule le polynôme caractéristique de A , en calculant le déterminant de $X.I_n - A$.
(ce qui revient à changer tous les signes de A et à ajouter un X sur la diagonale)
2. On détermine les racines de χ_A : on a ainsi les valeurs propres de A
3. Pour chacune de ses valeurs propres, on détermine le sous-espace propre associé $E_\lambda(A)$ en résolvant l'équation $A.X = \lambda.X$ ou $(A - \lambda.I_n).X = 0$ ou $(\lambda.I_n - A).X = 0$ d'inconnue la matrice unicolonne X

voir les nombreux exemples corrigés cachés sur le site

rem: on peut aussi revenir à la définition et raisonner sur l'équation aux éléments propres

 exemple 16: valeurs propres d'une matrice triangulaire

Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On retiendra que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

4 Propriétés des éléments propres (V063)



définition 9:

Soit $\lambda \in sp(f)$.

On dit que λ est UNE VALEUR PROPRE D'ORDRE r DE L'ENDOMORPHISME f [DE LA MATRICE A] lorsque λ est une racine de multiplicité r de χ_f [de χ_A]

On note $m(\lambda)$ la multiplicité de λ

remarque 3

- dans le cas où λ est une racine de multiplicité un du polynôme caractéristique, la valeur propre λ est dite SIMPLE.
- dans le cas où λ est une racine de multiplicité deux du polynôme caractéristique, la valeur propre λ est dite DOUBLE.
- les valeurs propres d'une matrice triangulaire, a fortiori diagonale, sont ses coefficients diagonaux de la matrice (comptés avec leur multiplicité)
- DEUX MATRICES SEMBLABLES ONT LES MÊMES VALEURS PROPRES AVEC MÊMES MULTIPLICITÉS, car on a déjà vu qu'elles avaient même polynôme caractéristique.



théorème 5: pour la démo, se placer dans une base judicieuse

Si λ est une valeur propre d'ordre $m(\lambda)$ de f [de A] alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda)$

En particulier, Si λ est une valeur propre simple alors E_λ est une droite vectorielle



exemple 17:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_f = (X - 1)^2(X + 3)^3(X + 1)$.

On peut dire que

- i)
- ii)
- iii)
- iv)
- v)

exemple 18: important à avoir en tête

Montrer que

1. la somme des dimensions des sep d'un endomorphisme de E est toujours inférieure ou égale à $\dim E$
2. f possède au plus $n = \dim E$ valeurs propres distinctes
3. **dans $\mathbb{C}$, f possède exactement $n = \dim E$ valeurs propres comptées avec leur multiplicité**

théorème 6:

| Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

démonstration:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$: "une famille de n $\vec{v}.p$ de f associés à des valeurs propres distinctes est libre"

- **initialisation:** $\mathcal{P}_1$ est vraie.

En effet, soit $\vec{v}_1$ un $\vec{v}.p$ de f .

Comme $\vec{v}_1 \neq 0$, on sait que la famille $(\vec{v}_1)$ est libre.

- **initialisation:** $\mathcal{P}_2$ est vraie.

En effet, soient $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ une famille de $\vec{v}.p$ associés à des valeurs propres distinctes

Notons $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les vp respectives.

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\mu_1 \cdot \vec{v}_1 + \mu_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$ (*)

En composant par f , qui est linéaire, on a

$$\mu_1 \cdot f(\vec{v}_1) + \mu_2 \cdot f(\vec{v}_2) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

càd

$$\mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (**)$$

Considérons $(**) - \lambda_2(*)$, on obtient $\mu_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$

comme $\vec{v}_1 \neq 0$ car c'est un vecteur propre et que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ par hypothèse, on a forcément

$$\mu_1 = 0$$

en reportant dans (*), cela donne

$$\mu_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$$

comme $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre, on a $\mu_2 = 0$

ainsi $\mu_1 = \mu_2 = 0$

On a bien montré que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une famille libre

- **hérédité:** on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geq 1$ quelconque fixé.

Soient $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1})$ $n+1$ $\vec{v}.p$ de f associés à des vp distinctes notées respectivement $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$

Nous allons montrer que $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1})$ est une famille libre.

Soit $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$ (*)

En composant par f (application linéaire) cela donne

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \cdot f(\vec{v}_k) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

or $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\vec{v}_k) = \lambda_k \cdot \vec{v}_k$ d'après ...

d'où $\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \cdot \lambda_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$ (**)

En considérant $(**) - \lambda_{n+1} (*)$ cela donne

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \cdot \lambda_k \cdot \vec{v}_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$$

càd

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \cdot (\lambda_k - \lambda_{n+1}) \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$$

soit

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \cdot (\lambda_k - \lambda_{n+1}) \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \quad (***)$$

or par hypothèse de récurrence, à savoir $\mathcal{P}_n$ est vraie, on peut donc affirmer que $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une famille libre!

D'après $(***)$, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_k \cdot (\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$$

or $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \neq \lambda_{n+1}$ (car les vp sont distinctes par hypothèse)

d'où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_k = 0$$

on reporte dans $(*)$, cela donne $\mu_{n+1} \cdot \vec{v}_{n+1} = \vec{0}$

or $\vec{v}_{n+1} \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre!

D'où

$$\mu_{n+1} = 0$$

On a bien montré que $\mu_1 = \dots = \mu_n = \mu_{n+1} = 0$

💡 théorème 7: c'est le corollaire

1. Si $\dim E = n$ alors tout endomorphisme de E possède au plus n valeurs propres distinctes
2. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes

💡 théorème 8: un autre corollaire que l'on démontrera plus tard

| La somme d'une famille finie de sous-espaces propres (d'un même endomorphisme) est directe

5 Annexe: rappels sur les polynômes



définition 10:

On dit que le scalaire α EST RACINE DE MULTIPLICITÉ r DU POLYNÔME P lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)^r \cdot Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$,
on note alors souvent $m(\alpha) = r$



exemple 19:

Soit $P = (X + 1)^2(X - 2)^3(X - 1)(X^2 + 1)$

- Les racines réelles de P sont $-1, 2, 1$
- $m(-1) = 2, m(2) = 3$ et $m(1) = 1$
- Les racines réelles de P comptées avec leurs multiplicités sont $-1, -1, 2, 2, 2, 1$
- Les racines complexes de P sont $-1, 2, 1, i$ et $-i$
- Les racines complexes de P comptées avec leurs multiplicités sont $-1, -1, 2, 2, 2, 1, i$ et $-i$



théorème 9: caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées

Soit P un polynôme et α un scalaire.

Il y a équivalence entre:

- α est racine d'ordre r de P
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$



définition 11:

On dit qu' UN POLYNÔME $P(X)$ EST SCINDÉ SUR LE CORPS $\mathbb{K}$ lorsqu'il peut s'écrire comme le produit de polynômes de degré un à coefficients dans $\mathbb{K}$

- $X^2 - 1$ et $X^2 - 2X + 1$ sont des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$.
- $X^2 + 1$ n'est pas un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.



théorème 10: théorème de Gauss

- Tout polynôme de degré supérieur ou égal à un est scindé sur $\mathbb{C}$
- Tout polynôme de degré supérieur ou égal à un possède exactement n racines comptées avec leurs multiplicités

rem: les racines complexes d'un polynômes à COEFFICIENTS RÉELS sont conjuguées deux à deux.



théorème 11: degré d'un polynôme dérivé

Soit P un polynôme.

- si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$ sinon $\deg(P') = -\infty$

💡 théorème 12: théorème de la division euclidienne

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = B.Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$

☀ exemple 20:

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^5 par $(X - 2)^3(X + 1)$.

- d'après le théorème ci-dessus, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et un polynôme $Q(X)$ tels que $X^5 = (X - 2)^3(X + 1)Q(X) + aX^3 + bX^2 + cX + d$
- Pour $X = -1$ cela donne $1 = -a + b - c + d$
- Pour $X = 2$ cela donne $2^5 = 8a + 4b + 2c + d$
- En dérivant en prenant $X = 2$ cela donne $5.2^4 = 3a.2^2 + 2b.2 + c$
- En dérivant de nouveau et en prenant $X = 2$ cela donne $5.4.2^3 = 6a.2 + 2b$
- On résout le système constitué de ces 4 équations
- On trouve que le reste est égal à $19X^3 - 34X^2 - 12X + 40$

6 Polynômes matriciels(HP) (V032)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $p \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Par convention, on pose $A^0 = I_p$ et pour tout $k \geq 1$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Pour tout $P = P(X) = \sum_{k=0}^d a_k.X^k = a_d.X^d + \cdots + a_1.X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

On pose $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k.A^k = a_d.A^d + \cdots + a_1.A + a_0.A^0 = a_d.A^d + \cdots + a_1.A + a_0.I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

proposition 2 (propriétés)

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- i) $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$
- ii) $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$
- iii) $(\lambda.P)(A) = \lambda.P(A)$

proposition 3 (différence notable)

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

- i) $P.Q = 0 \implies P = 0$ ou $Q = 0$
- ii) $P(X).Q(X) = 0 \implies P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$
- iii) mais $P(A).Q(A) = 0 \not\implies P(A) = 0$ ou $Q(A) = 0$

exemple: si $A.(A - I_n) = 0$ on n'a pas forcément $A = 0$ ou $A = I_n$

☀ exemple 21:

Notons $P = X^2 - 3X + 1$ et $Q = X - 2$

- On a alors $P(A) = A^2 - 3A + I_n$ et $Q(A) = A - 2I_n$
- $S = P + Q = X^2 - 2X - 1$ et $P(A) + Q(A) = A^2 - 2A - I_n = S(A)$
- $R = PQ = X^3 - 5X^2 + 7X - 2$
- et
- $P(A) \circ Q(A) = (A^2 - 2A - I_n) \circ (A - 2I_n) = A^3 - 5A^2 + 7A - 2I_n = R(A)$

théorème 13: théorème de Cayley-Hamilton- HP

| Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A .

7 Polynômes d'endomorphismes (HP) (V033)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Soit f un endomorphisme de E .

Par convention, on pose $f^0 = id_E$ et pour tout $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Pour tout $P = P(X) = \sum_{k=0}^d a_k.X^k = a_d.X^d + \dots + a_1.X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

On note $P(f) = \sum_{k=0}^d a_k.f^k = a_d.f^d + \dots + a_1.f + a_0.f^0 = a_d.f^d + \dots + a_1.f + a_0.id_E \in \mathcal{L}(E)$

proposition 4 (propriétés:)

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

i) $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$

ii) $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$

iii) $(\lambda.P)(f) = \lambda.P(f)$

proposition 5 (différence notable)

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

i) $P.Q = 0 \implies P = 0$ ou $Q = 0$

ii) $P(X).Q(X) = 0 \implies P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$

iii) mais $P(f) \circ Q(f) = 0 \not\implies P(f) = 0$ ou $Q(f) = 0$

exemple: si $f^2 = f \circ f = 0$ on n'a pas forcément $f = 0$

exemple 22:

Notons $P = X - 1$ et $Q = X + 3$

• On a alors $P(f) = f - id_E$ et $Q(f) = f + 3id_E$

• $S = P + Q = 2X + 2$ et $P(f) + Q(f) = 2f + 2id_E = S(f)$

• $T = PQ = X^2 + 2X - 3$ et $P(f) \circ Q(f) = (f - id_E) \circ (f + 3id_E) = f^2 + 2f - 3id_E = T(f)$

exemple 23:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Montrer que $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$

8 Complément: matrice réelle vue comme une matrice complexe



définition 12:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de coefficient générique $\overline{a_{i,j}}$.

proposition 6

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

- i.) $\overline{\overline{A}} = A$
- ii.) $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
- iii.) $\overline{\lambda.A} = \overline{\lambda}.\overline{A}$

démonstration:

Nous allons utiliser le fait que pour LES SCALAIRES COMPLEXES on a $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ et $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

i) trivial car $\overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij}$ pour tout (i,j)

ii) Notons $C = \overline{A}.\overline{B} = (c_{ij})$ et $D = AB = (d_{ij})$.

- $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}.b_{kj}$ d'après la formule du produit matriciel,

$$\text{et donc } \overline{d_{ij}} = \overline{\sum_{k=1}^n a_{ik}.b_{kj}} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ik}.b_{kj}} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ik}}.\overline{b_{kj}}$$

- $c_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ik}}.\overline{b_{kj}}$ d'après la formule du produit matriciel,

- On a bien prouvé que pour tout (i,j) on a $c_{ij} = \overline{d_{ij}}$, c'est à dire $C = \overline{D}$ (cqfd)

iii) Notons $E = \lambda.A = (e_{ij})$ et $F = \overline{\lambda}.\overline{A} = (f_{ij})$

- on a $e_{ij} = \lambda.a_{ij}$ et donc $\overline{e_{ij}} = \overline{\lambda.a_{ij}} = \overline{\lambda}.\overline{a_{ij}}$
- on a aussi $f_{ij} = \overline{\lambda}.\overline{a_{ij}}$
- on a bien prouvé que pour tout (i,j) on a $\overline{e_{ij}} = f_{ij}$, c'est à dire que $\overline{E} = F$

proposition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si λ est une vp complexe non réelle de A alors $\overline{\lambda}$ est aussi une vp de A , et de plus les sep sont conjuguées: $E_{\overline{\lambda}} = \overline{E_{\lambda}}$

démonstration:

elle repose sur l'équivalence

$$AX = \lambda.X \iff \overline{AX} = \overline{\lambda.X} \iff \overline{A}.\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X} \iff A.\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$$

(comme A est à coefficients réels, on a $\overline{A} = A$)

9 Rappels sur les systèmes linéaires

9.1 systèmes homogènes

théorème 14: structure et dimension de l'ensemble des solutions

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note $r = \text{rg}(A)$.

L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ est un espace vectoriel de dimension $p - r$.

- Le système est alors un système de n équations à p inconnues
- r s'appelle aussi le RANG DU SYSTÈME
- le nombre d'équations n'intervient pas dans la dimension de l'ensemble des solutions: ce qui compte c'est le nombre d'équations indépendantes (càd le rang du système)
- L'ensemble des solutions du système $AX = 0$ n'est rien d'autre que le noyau de A .

démonstration:

Il s'agit simplement d'appliquer le théorème du rang à la matrice A .

On rappelle que l'application linéaire canoniquement associée à A est définie de $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$

9.2 systèmes avec second membre

théorème 15: condition de compatibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Le système linéaire $AX = B$ est compatible ssi $B \in \text{Im}(A)$
(càd ssi B est combinaison linéaire des colonnes de A)
- et dans ce cas,
les solutions du système $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
cela revient à dire que LA SOLUTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME $AX = B$ EST LA SOMME D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME HOMOGÈNE ASSOCIÉ.

rem: on rappelle qu'un système est dit COMPATIBLE lorsqu'il possède au moins une solution

théorème 16: système de Cramer

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Le système linéaire carré $AX = B$ possède une unique solution ssi A est inversible,
- et dans ce cas $X = A^{-1}.B$

rem: c'est souvent à l'aide d'un pivot de Gauss que l'on résout un système: le résultat ci-dessus est surtout intéressant d'un point de vue théorique

remarque 4

On retiendra qu'un système linéaire possède

- ou aucune solution
- ou une unique solution
- ou une infinité de solutions

☀ exemple 24: écriture vectorielle, écriture matricielle d'un système

Considérons le système $(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

- La matrice augmentée du système est $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$
- (S) s'écrit vectoriellement $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
- (S) s'écrit matriciellement $A.X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

☀ exemple 25: un exemple avec un paramètre

On considère le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = a \end{cases}$ avec a paramètre réel.

- La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & a \end{array} \right)$
- Par transformations élémentaires on arrive à la matrice réduite $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$
- Le système est de rang deux: x et y sont les inconnues principales, z est inconnue secondaire
- La condition de compatibilité est $a - 3 = 0$
 - si $a \neq 3$ le système est incompatible
 - si $a = 3$ le système est compatible et possède une infinité de solutions:

$$(x, y, z) = (-z, 1, z) = (0, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

- Interprétation géométrique:
chaque équation est l'équation d'un plan affine dans l'espace; le système caractérise l'intersection des 3 plans.
 - si $a \neq 3$ les 3 plans sont deux à deux sécants. Mais ils ne sont pas concourants en un même point
 - si $a = 3$ l'intersection des 3 plans est une droite
- *remarque: comme le système est un système carré, et qu'il n'y a pas unicité de la solution (que $a = 3$ ou $a \neq 3$), on peut en déduire alors que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible et que son déterminant vaut zéro!*
- *remarque: si au lieu de travailler avec des transformations élémentaires, on avait calculer $\det(A)$, on aurait évidemment trouver qu'il était nul. On pouvait alors seulement affirmer que le système n'était pas un système de Cramer, c-à-d que son ensemble de solutions était soit vide, soit infini.*