

C11 - Projecteurs & Symétries vectorielles

www.matimatheque.fr

Table des matières

1	Homothéties	1
2	Projections associées à une somme directe de 2 sev	2
3	Symétries vectorielles	5



définition 1: vecteurs invariants/anti-invariants

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

- i) On dit le vecteur $\vec{x}$ est un VECTEUR INVARIANT de f lorsque $f(\vec{x}) = \vec{x}$
- ii) On dit le vecteur $\vec{x}$ est un VECTEUR ANTI-INVARIANT de f lorsque $f(\vec{x}) = -\vec{x}$
 - L'ensemble des vecteurs invariants par f est $\{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}\} = \ker(f - id_E)$
 - L'ensemble des vecteurs anti-invariants par f est $\{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}\} = \ker(f + id_E)$

En effet, on a les équivalences

$$\vec{x} \text{ vecteur invariant} \iff f(\vec{x}) = \vec{x} \iff f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}_E \iff (f - id_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E \iff \vec{x} \in \ker(f - id_E)$$

$$\vec{x} \text{ vecteur anti-invariant} \iff f(\vec{x}) = -\vec{x} \iff f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}_E \iff (f + id_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E \iff \vec{x} \in \ker(f + id_E)$$

1 Homothéties



définition 2:

Soit $k \in \mathbb{K}$.

On appelle HOMOTHÉTIE DE RAPPORT k l'application linéaire $k.id_E$.

On la note souvent h_k

proposition 1 (les vérifications sont triviales)

L'ensemble des homothéties est :

- i. stable par la loi de composition
- ii. stable par addition et multiplication externe par un scalaire

démonstration 1

Soient k_1 et k_2 deux scalaires.

- $(k_1.id_E) \circ (k_2.id_E) = (k_1.k_2).id_E$
- $k_1.id_E + k_2.id_E = (k_1 + k_2).id_E$
- $k_1.(k_2.id_E) = (k_1.k_2).id_E$

💡 théorème 1: Seules les homothéties ont cette propriété!

Dans toute base B de E , la matrice de l'homothétie $k.id_E$ est $\text{Mat}_B(k.id_E) = k.I_n = \begin{pmatrix} k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & k \end{pmatrix}$

rem: on montrera également en exercice que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tout endomorphisme de E sont les homothéties.

☀️ exemple 1: très classique

Soit f un endomorphisme de E .

Si pour tout $\vec{x} \in E$, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille liée alors f est une homothétie.

Autrement dit

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$$

2 Projections associées à une somme directe de 2 sev

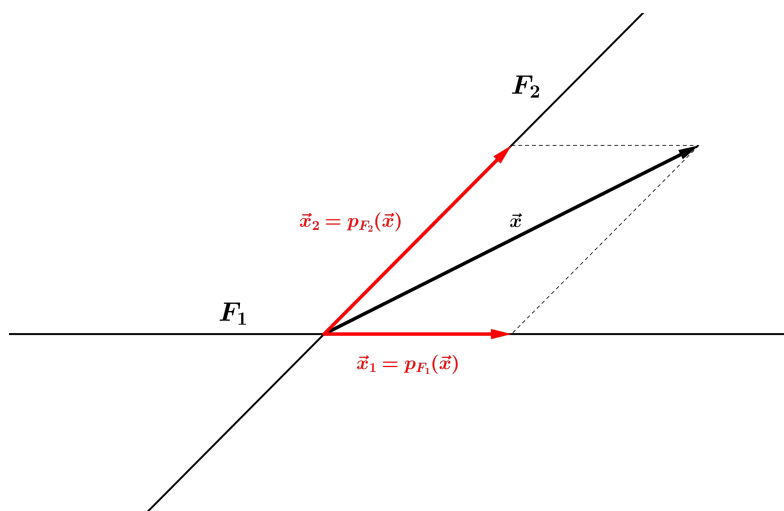
🍃 définition 3: projection

Soit $E = F_1 \oplus F_2$

LA PROJECTION VECTORIELLE SUR F_1 PARALLÈLEMENT À F_2 est l'endomorphisme de E , noté p_{F_1} , défini par

$$\begin{array}{ccc} p_{F_1} : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & p_{F_1}(\vec{x}) = \vec{x}_1 \end{array}$$

- Rappel: $E = F_1 \oplus F_2$ signifie que $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- " $p_{F_1}(\vec{x})$ est l'unique vecteur de F_1 tel que $\vec{x} - p_{F_1}(\vec{x}) \in F_2$ "
- l'endomorphisme $id_E - p_{F_1}$ n'est rien autre que la projection sur F_2 parallèlement à F_1 : il se note p_{F_2} et s'appelle LE PROJECTEUR ASSOCIÉ À p_{F_1}
- p_{F_1} est l'application qui à tout vecteur associe sa composante sur F_1 lorsque l'on considère la décomposition $F_1 \oplus F_2 = E$



remarque 1 (à propos des projecteurs associés)

On a $p_{F_1} + p_{F_2} = id_E$ et $p_{F_1} \circ p_{F_2} = p_{F_2} \circ p_{F_1} = 0$

❶	$E = \mathbb{R}^2$	$F_1 = \{(x,0) x \in \mathbb{R}\}$	$F_2 = \{(0,y) y \in \mathbb{R}\}$	$(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in F_2}$
❷	$E = \mathbb{R}^2$	$F_1 = \text{vect}((1, -1))$	$F_2 = \text{vect}((1,0))$	$(x,y) = \underbrace{(-y,y)}_{\in F_1} + \underbrace{(x+y,0)}_{\in F_2}$
❸	$E = \mathbb{R}^3$	$F_1 = \{(x,y,0) (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$	$F_2 = \{(0,0,z) z \in \mathbb{R}\}$	$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,0,z)}_{\in F_2}$
❹	$E = \mathbb{R}_2[X]$	$F_1 = \text{vect}(X+1)$	$F_2 = \text{vect}(X^2, X)$	$aX^2 + bX + c = \underbrace{c.(X+1)}_{\in F_1} + \underbrace{aX^2 + (b-c)X}_{F_2}$

❶	$\begin{array}{ccc} p_{F_1} : & E & \longrightarrow E \\ & (x,y) & \longmapsto (x,0) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} p_{F_2} : & E & \longrightarrow E \\ & (x,y) & \longmapsto (0,y) \end{array}$
❷	$\begin{array}{ccc} p_{F_1} : & E & \longrightarrow E \\ & (x,y) & \longmapsto (-y,y) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} p_{F_2} : & E & \longrightarrow E \\ & (x,y) & \longmapsto (x+y,0) \end{array}$
❸	$\begin{array}{ccc} p_{F_1} : & E & \longrightarrow E \\ & (x,y,z) & \longmapsto (x,y,0) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} p_{F_2} : & E & \longrightarrow E \\ & (x,y,z) & \longmapsto (0,0,z) \end{array}$
❹	$\begin{array}{ccc} p_{F_1} : & E & \longrightarrow E \\ & aX^2 + bX + c & \longmapsto c.(X+1) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} p_{F_2} : & E & \longrightarrow E \\ & aX^2 + bX + c & \longmapsto aX^2 + (b-c)X \end{array}$

❷ On a
$$\begin{cases} \vec{x}_1 &= \lambda(1, -1) \\ \vec{x}_2 &= \mu(1, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{x} = (x,y) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \iff \begin{cases} x &= \lambda + \mu \\ y &= -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \mu &= x + y \\ \lambda &= -y \end{cases}$$



définition 4: projecteur

Soit p un endomorphisme de E .

On dit que p est UN PROJECTEUR DE E lorsque $p \circ p = p$ (càd $p^2 = p$)



théorème 2: noyau et image d'une projection

Soit p_{F_1} la projection sur F_1 parallèlement à F_2 (notations de la définition 3), on a :

- i.) $\ker p_{F_1} = F_2$
- ii.) $\text{Im } p_{F_1} = F_1 = \ker(p_{F_1} - id_E)$
- iii.) p_{F_1} est un projecteur, càd $p_{F_1}^2 = p_{F_1}$

- "le noyau est l'espace parallèlement auquel on projette"
- "l'ensemble image est l'espace sur lequel on projette, c' est aussi l'ensemble des VECTEURS INVARIANTS par p_{F_1} "

💡 théorème 3: un projecteur est une projection

Soit p un projecteur de E . (càd p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$)

On a alors :

- i) $\text{Im } p \oplus \ker p = E$
- ii) $\text{Im } p = \ker(p - id)$
- iii) p est LA projection sur $\text{Im } p = \ker(p - id) = E_1(p)$ parallèlement à $\ker p = E_0(p)$

rem: on prouve dans la démonstration que

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{(\vec{x} - p(\vec{x}))}_{\in \ker(p)}$$

remarque 2

Bref, projecteur et projection c'est la même chose; et on projette sur l'image parallèlement au noyau

remarque 3 (éléments propres d'un projecteur (lien avec la réduction))

- les valeurs propres d'un projecteur sont 0 et 1
- $E_0(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1})$ est l'espace parallèlement auquel on projette
- $E_1(p_{F_1}) = \text{Im}(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1} - id_E)$ est l'espace sur lequel on projette
- Si E est de dimension finie, un projecteur de E est toujours diagonalisable

💡 théorème 4: caractérisation matricielle d'un projecteur

Soit f un endomorphisme de E , avec $\dim E = n < \infty$.

Il y a équivalence entre :

- i.) f est un projecteur
- ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

et dans ce cas, on a alors $\boxed{\text{tr } f = \text{rg } f = r = \dim \ker(f - id_E)}$

A retenir: un endomorphisme est un projecteur ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 0 et des 1 sur la diagonale

démonstration 2

Soit E un ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E .

- Montrons que i) $\Rightarrow$ ii)

On suppose que f est un projecteur.

On sait alors que $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E , et que f est la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\ker f$.

Considérons une base de E adaptée à la décomposition $\text{Im } f \oplus \ker f$, c'est à dire obtenue par la concaténation d'une base de $\text{Im } f$ et d'une base de $\ker f$.

Comme les vecteurs de $\text{Im } f$ sont des vecteurs invariants par f , on a bien la matrice de la projection dans cette base qui est $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$ avec $r = \dim \text{Im } f = \text{rg } f$

- Montrons que ii) $\Rightarrow$ i)

On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$

On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2 = (\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}))^2 = \text{diag}(\underbrace{1^2, \dots, 1^2}_r, \underbrace{0^2, \dots, 0^2}_{n-r}) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

On trouve que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, ce qui permet d'affirmer que $f^2 = f$!

remarque 4 (cas d'un espace euclidien où F_1 et F_2 sont orthogonaux)

Lorsque F_1 et F_2 sont orthogonaux, on a des formules assez simples pour connaître l'expression du projeté orthogonal

- Si F_1 est une droite vectorielle dirigée par le vecteur e_1 .

$$\forall x \in E, p_{F_1}(x) = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} \cdot e_1$$

- Si F_1 est un plan vectoriel dont (e_1, e_2) est **une base orthogonale**.

$$\forall x \in E, p_{F_1}(x) = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} \cdot e_1 + \frac{\langle x, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} \cdot e_2$$

☀ exemple 2: Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel

Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite F_1 dirigée par le vecteur $(3, 4)$

Soit $\vec{x} = (x, y)$ et notons $\vec{d} = (3, 4)$

D'après la formule précédente, on a

$$p_{F_1}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d} = \frac{3x + 4y}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3 Symétries vectorielles

🍃 définition 5: automorphisme involutif

Soit f un endomorphisme de E .

On dit que f est un AUTOMORPHISME INVOLUTIF DE E lorsque $f \circ f = id_E$

un automorphisme involutif est donc un automorphisme de E (endomorphisme bijectif) qui est égal à son propre inverse, càd $f^{-1} = f$

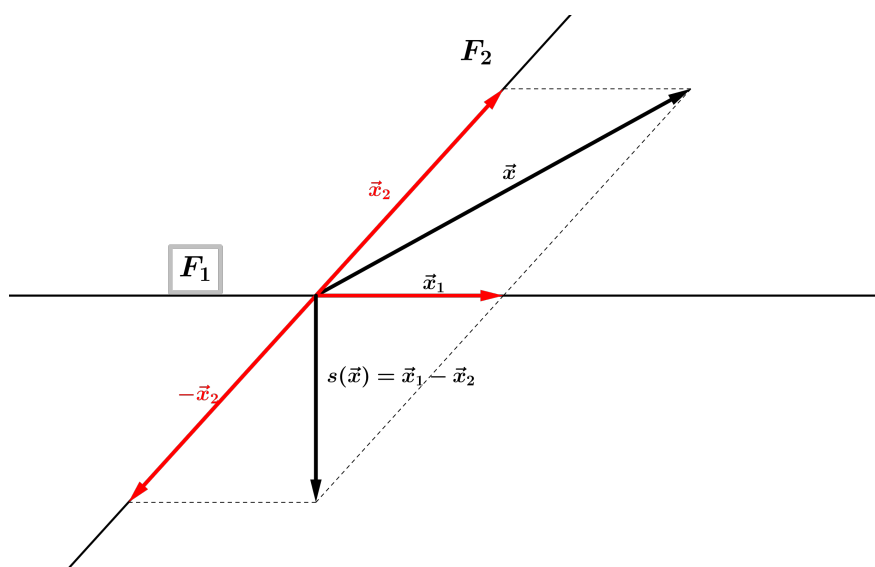
🍃 définition 6: symétrie vectorielle

Soit $E = F_1 \oplus F_2$

LA SYMÉTRIE VECTORIELLE PAR RAPPORT À F_1 PARALLÈLEMENT À F_2 est l'endomorphisme de E , noté s , défini par

$$\begin{array}{lcl} s : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}$$

- Rappel: $E = F_1 \oplus F_2$ signifie que $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$



❶	$E = \mathbb{R}^2$	$(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in F_2}$	$s : E \longrightarrow E$ $(x,y) \longmapsto (x, -y)$
❷	$E = \mathbb{R}^2$	$(x,y) = \underbrace{(-y,y)}_{\in F_1} + \underbrace{(x+y,0)}_{\in F_2}$	$s : E \longrightarrow E$ $(x,y) \longmapsto (-x - 2y, y)$
❸	$E = \mathbb{R}^3$	$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,0,z)}_{\in F_2}$	$s : E \longrightarrow E$ $(x,y,z) \longmapsto (x,y, -z)$
❹	$E = \mathbb{R}_2[X]$	$aX^2 + bX + c = \underbrace{c(X+1)}_{\in F_1} + \underbrace{aX^2 + (b-c)X}_{\in F_2}$	$s : E \longrightarrow E$ $aX^2 + bX + c \longmapsto -aX^2 + (2c-b)X + c$

💡 théorème 5: propriétés d'une symétrie vectorielle

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 (notations de la déf. 6), on a :

- i.) $\ker s = \{\vec{0}\}$
- ii.) $\text{Im } s = E$
- iii.) $s \circ s = \text{id}_E$
- iv.) F_1 est l'ensemble des VECTEURS INVARIANTS par s
- v.) F_2 est l'ensemble des VECTEURS ANTI-INVARIANTS par s

remarque 5 (lien entre projection et symétrie)

On a $s = 2.p_{F_1} - \text{id}_E$

en effet, pour tout $x \in E$ on a

$$s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 2\vec{x}_1 - (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = 2p_{F_1}(\vec{x}) - \vec{x} = (2p_{F_1} - \text{id}_E)(x)$$

remarque 6 (cas des symétries orthogonales dans un espace euclidien)

Lorsque F_1 et F_2 sont orthogonaux, on parle de *symétrie orthogonale* par rapport à F_1 .

Il existe alors des formules plus simples pour écrire l'expression analytique du symétrique orthogonal grâce aux produits scalaires

💡 théorème 6: un automorphisme involutif est une symétrie vectorielle

Soit f est un automorphisme involutif de E . (càd f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = \text{id}_E$)

On a alors:

- i) $\ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f + \text{id}_E) = E$
- ii) f est LA symétrie vectorielle par rapport à $\ker(f - \text{id}_E) = E_1(f)$ parallèlement à $\ker(f + \text{id}_E) = E_{-1}(f)$

rem:

- L'espace des vecteurs invariants et l'espace des vecteurs anti-invariants sont supplémentaires dans E
- Dans la démonstration on montre que

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \underbrace{\frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}}_{\in E_1(f)} + \underbrace{\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}}_{\in E_{-1}(f)}$$

remarque 7

Bref, on a montré que automorphisme involutif et symétrie vectorielle, c'est la même chose...

remarque 8 (éléments propres d'une symétrie vectorielle s , (lien avec la réduction))

- les valeurs propres d'une symétrie sont -1 et 1
- $E_1(s)$ est l'espace par rapport auquel on effectue la symétrie
- $E_{-1}(s)$ est l'espace parallèlement auquel on effectue la symétrie
- Si E est de dimension finie, une symétrie est toujours diagonalisable



théorème 7: caractérisation matricielle d'une symétrie vectorielle

Soit f un endomorphisme de E , avec $\dim E = n < \infty$.

Il y a équivalence entre :

- f est une symétrie vectorielle
- il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-p})$

et dans ce cas on a alors : $\text{tr } f = \dim E_1 - \dim E_{-1}$ avec $p = \dim \ker(f - id_E)$

un endomorphisme est une symétrie vectorielle ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale

Tableaux récapitulatifs

	projecteur	automorphisme involutif
définition	$p \circ p = p$	$s \circ s = id_E$
	$E = \ker(p - id_E) \oplus \ker(p)$	$E = \ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E)$
valeurs propres	0, 1	-1, 1
	projection sur $\ker(p - id_E)$ parallèlement à $\ker(p)$	symétrie par rapport à $\ker(s - id_E)$ parallèlement à $\ker(s + id_E)$
	$\text{Im}(p) = \ker(p - id_E)$	$\text{Im}(s) = E$
matrice réduite	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

	projection sur F_1 parallèlement à F_2	symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2
définition	$p_{F_1} : E = F_1 \oplus F_2 \longrightarrow E$ $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \longmapsto p_{F_1}(\vec{x}) = \vec{x}_1$	$s : E = F_1 \oplus F_2 \longrightarrow E$ $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \longmapsto s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$
	$F_1 = \ker(p - id_E) = E_1(p)$ $F_2 = \ker(p) = E_0(p)$	$F_1 = \ker(s - id_E) = E_1(s)$ $F_2 = \ker(s + id_E) = E_{-1}(s)$
valeurs propres	0, 1	-1, 1

démonstration 3 (bel exemple de raisonnement par analyse synthèse)

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = id_E$
Nous noterons plus simplement $E_1 = \ker(f - id_E) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ (ENS. DES VECTEURS INVARIANTS)
et $E_{-1} = \ker(f + id_E) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ (ENS. DES VECTEURS ANTI-INVARIANTS)

1. Montrons que $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = E$

• Partie Analyse:

Soit $\vec{x}$ un vecteur fixé quelconque de E

On suppose qu'il existe $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ (1)

On a alors $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ (2)

En faisant (1)+(2) on trouve que $\vec{x}_1 = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$

et en considérant (1)-(2) on trouve que $\vec{x}_2 = \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$

On vient de prouver que: SI la décomposition du vecteur $\vec{x}$ existe comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_{-1} ALORS cette décomposition est unique et que l'on a forcément

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left(\frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}, \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} \right)$$

(REMARQUONS QU'À CE NIVEAU NOUS N'AVONS PAS UTILISÉ L'HYPOTHÈSE $f^2 = id_E$ ET L'ON A PAS PROUVÉ QUE LA DÉCOMPOSITION EXISTAIT!)

• Partie Synthèse:

CETTE PARTIE CONSISTE À VÉRIFIER QUE LES CONDITIONS NÉCESSAIRES TROUVÉES CI-DESSUS SONT ÉGALEMENT SUFFISANTES.

Soit $\vec{x}$ un vecteur fixé quelconque de E

On note $\vec{x}_1 = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$ et $\vec{x}_2 = \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$

i) on a $\vec{x}_1 \in E_1$. En effet $f(\vec{x}_1) = f\left(\frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}\right) = \frac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2}$.

Or $f^2 = id_E$ donc $\frac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2} = \frac{f(\vec{x}) + \vec{x}}{2} = \vec{x}_1$

ii) on a $\vec{x}_2 \in E_{-1}$. En effet, $f(\vec{x}_2) = f\left(\frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}\right) = \frac{f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})}{2} = \frac{f(\vec{x}) - \vec{x}}{2} = -\vec{x}_2$

iii) on a $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = \vec{x}$

Ceci prouve que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ il existe (un unique) couple $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ (cqfd!)

• L'unicité, si la première partie analyse est bien rédigée, est prouvée dans cette dite partie.

On peut aussi montrer que $E_1 \cap E_{-1} = \{\vec{0}\}$ (ce n'est pas très compliqué)

2. Maintenant que l'on sait que E_1 et E_{-1} sont supplémentaires dans E , on peut considérer la symétrie vectorielle par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1} , notons s cette symétrie.

• On a donc $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et alors $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

• ainsi $\forall \vec{x} \in E, s(\vec{x}) = \frac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} - \frac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = f(\vec{x})$.

On vient de prouver que $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = s(\vec{x})$, c'est à dire que $f = s$.

f est donc bien la symétrie vectorielle par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}



définition 7: sous-espace propre, notation $E_\lambda(f)$

Soit f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre.

On appelle SOUS-ESPACE PROPRE DE f ASSOCIÉ À λ , et on note $E_\lambda(f)$ le sev suivant

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \cdot id_E) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}\}$$

rem: on bien sûr aussi $E_\lambda(f) = \ker(\lambda \cdot id_E - f)$