

C7 - GEOMETRIE PLANE: ETUDE METRIQUE

Table des matières

1	Propriétés métriques des courbes planes paramétrées	2
1.1	Changement de paramètre	2
1.2	Abscisse curviligne	3
1.3	Repère de Frenet, paramètre angulaire	4
1.4	Courbure	6
1.5	Développée	7
2	Enveloppe d'une famille de droites	9
3	Annexe	11

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- On note x et y les fonctions coordonnées de f .

- En résumé, on a donc
$$\begin{array}{ccc} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}.$$

On notera $M(t)$ ou M_t le point du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$.

- On dit que (I, f) est un arc paramétré de classe C^k lorsque f est une fonction de classe C^k sur I .

- On appelle support de la courbe paramétrée et on note Γ l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in I$:

$$\Gamma = \{M(t) = (x(t), y(t)) | t \in I\}$$

- On munira le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ainsi $\overrightarrow{OM(t)} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$ et $M(t) = O + x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$

méthode 1: notation différentielle

- très souvent en géométrie, on préférera utiliser **la notation différentielle**: elle a l'avantage de limiter le nombre de fonctions et de rendre plus "intuitive" les formules de dérivations.

- dans l'exemple 1, suivant que Γ est paramétré par t, θ ou u ,

on note le point courant $M(t), M(\theta)$ ou $M(u)$,

et donc les dérivées premières sont notées respectivement

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t), \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) \text{ et } \frac{d\vec{M}}{du}(u) \text{ ou plus simplement } \frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d\vec{M}}{d\theta} \text{ et } \frac{d\vec{M}}{du}$$

- on a vu qu'en posant $t = u^2$ on avait $f(t) = f(u^2) = h(u)$.

En dérivant par rapport à u cela donne $h'(u) = 2u.f'(u^2) = 2u.f'(t)$

La notation différentielle permet d'écrire:

$$\frac{d\vec{M}}{du}(u) = \frac{dt}{du}(u) \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t) = 2u \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \quad \text{ou plus simplement} \quad \frac{d\vec{M}}{du} = \frac{dt}{du} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = 2u \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}$$

1 Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

On considère (I, f) un arc paramétré régulier de classe C^k , où $k \geq 1$. On note Γ son support.

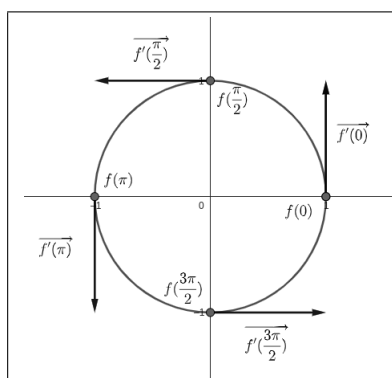
1.1 Changement de paramètre

- Une même courbe (plus précisément, un même support) peut être paramétré de différentes manières, càd à l'aide de différentes fonctions vectorielles.
- Ces paramétrisations ne sont pas toutes "équivalentes"
 - certaines orientent la courbe dans un sens et d'autres dans celui opposé
 - certaines peuvent faire apparaître des points singuliers alors que d'autres non
 - en un point, la droite tangente si elle existe sera toujours la même; en revanche, le premier vecteur dérivé a une norme qui dépend de la paramétrisation

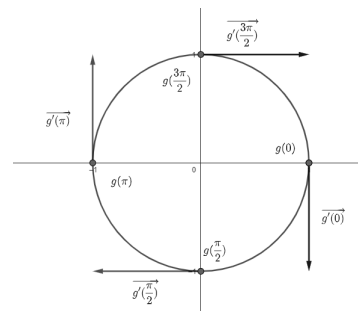
exemple 1: apparition de points singuliers

- Considérons 3 paramétrisations du cercle trigonométrique

$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$	$g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\theta \longmapsto (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$	$h : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $u \longmapsto (\cos(u^2), \sin(u^2))$
--	---	--



aucun point singulier, orientation sens trigo
chaque vecteur dérivé est unitaire

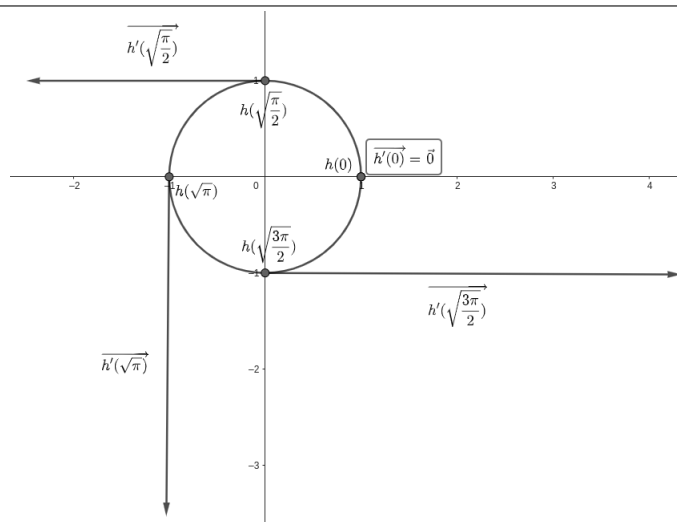


aucun point singulier, sens horaire
chaque vecteur dérivé est unitaire

- La notation différentielle donne

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = \frac{dt}{d\theta}(\theta) \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t) = -\frac{d\vec{M}}{dt}(t)$$

$$\frac{d\vec{M}}{du}(u) = \frac{dt}{du}(u) \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t) = 2u \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t)$$



il y a UN point singulier
les vecteurs dérivés sont de normes différentes

1.2 Abscisse curviligne



définition 1:

Soit (I, f) une courbe paramétrée, et $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne d'origine $t_0 \in I$ la fonction

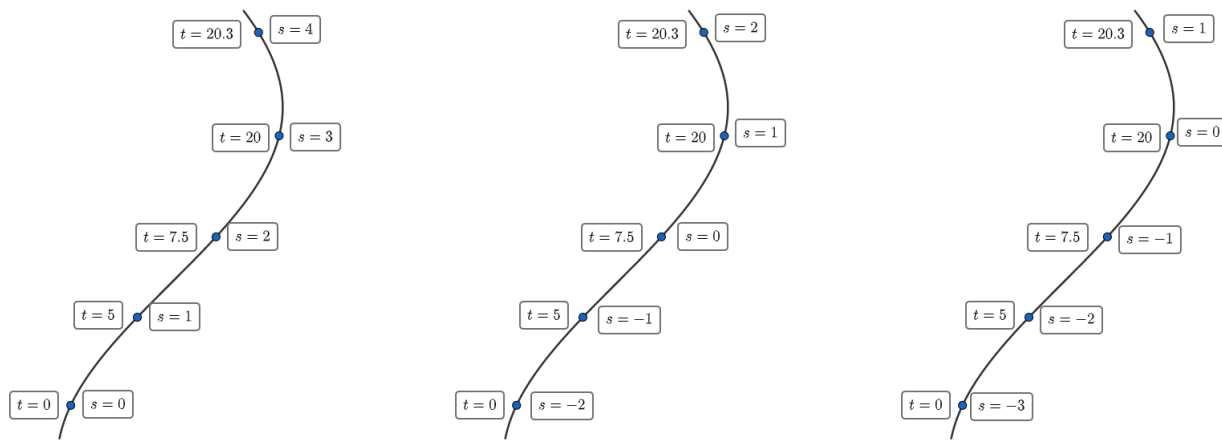
$$\begin{aligned} s : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du \end{aligned}$$

interprétation cinématique: $s(t)$ correspond à la distance algébrique parcourue sur la courbe depuis l'instant t_0

remarque 1

- On a $\forall t \in I, s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du$
- Les fonctions x et y étant (au moins) C^1 sur I par hypothèse, on a les fonctions dérivées x' et y' qui sont continues sur I . Par composition de fonctions continues on peut donc affirmer que la fonction $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ est continue sur I : cette fonction admet donc une primitive sur I et elle est intégrable sur tout segment inclus dans I
- Comme $\|f'\|$ est continue sur I et que $t_0 \in I$, on peut affirmer que s est l'unique primitive de la fonction $t \mapsto \|f'(t)\|$ qui s'annule en t_0 , c'est à dire c'est l'unique primitive de la fonction vitesse qui s'annule en t_0 (elle correspond à la distance parcourue sur la courbe si on se fixe comme point de départ le point $M(t_0)$)
- quelle que soit l'origine t_0 choisie, on a toujours

$$\forall t \in I, s'(t) = \|f'(t)\| \text{ soit encore } \frac{ds}{dt} = \|f'\| = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$$



théorème 1: longueur d'un arc

Soit (I, f) une courbe paramétrée régulière, et $t_1 \leq t_2$ deux réels appartenant à I .

La longueur que décrit le point $M(t)$ quand t parcourt l'intervalle $[t_1, t_2]$ est donnée par

$$l(M_{t_1} M_{t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$



exemple 2:

Montrer qu'une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ a pour périmètre $p = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$
 rem: il n'y a pas de formule simple pour le périmètre d'une ellipse!... contrairement à son aire

💡 théorème 2:

Soit (I, f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1 , et $t_0 \in I$.

1. Une abscisse curviligne fournit une nouvelle paramétrisation de classe C^1 de la courbe paramétrée
2. Pour cette paramétrisation, on a $\frac{d\vec{M}}{ds}$ qui est un vecteur de norme un, c'est à dire $\left\| \frac{d\vec{M}}{ds} \right\| = 1$

la paramétrisation de la courbe par l'abscisse curviligne correspond à son parcours à la vitesse unitaire

pseudo-démonstration avec la notation différentielle

- On sait que $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| > 0$ car la courbe est régulière
ce qui permet de dire que

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| \quad (*)$$

- On a

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} \quad (\text{de la forme } \lambda \cdot \vec{u})$$

en passant à la norme cela donne donc (car $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$)

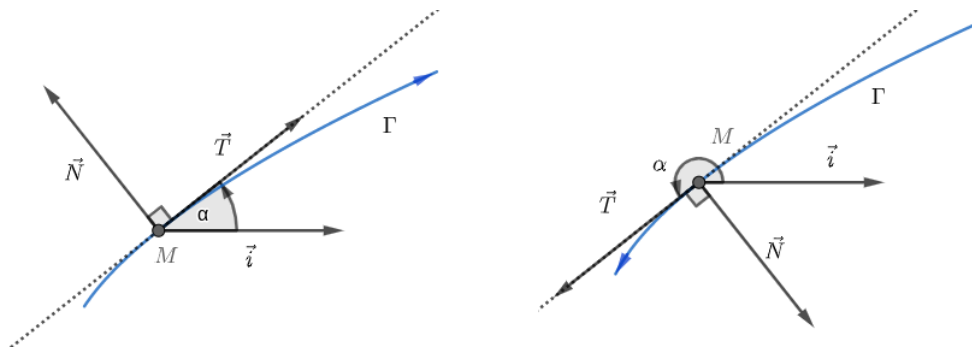
$$\left\| \frac{d\vec{M}}{ds} \right\| = \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} \cdot \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = 1 \quad \text{d'après } (*)$$

1.3 Repère de Frenet, paramètre angulaire

🍃 définition 2:

Soit (I, f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1 (au moins), et $t \in I$
On appelle:

- vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ le vecteur $\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$
- vecteur unitaire normal au point $M(t)$ le vecteur $\vec{N}(t)$, qui est l'image de $\vec{T}(t)$ par la rotation d'angle $+\pi/2$
- repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$
- paramètre angulaire au point $M(t)$ le réel $\alpha(t)$ tel que $\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha(t)) \cdot \vec{j}$



Le repère de Frenet au point $M(t)$ dépend de l'orientation de la courbe

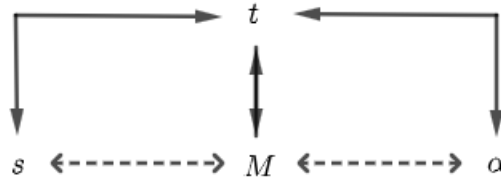
Un arc paramétré régulier de classe au moins C^1 est orienté par les directions des vecteurs unitaires tangents, c'est à dire par le sens de parcours de la courbe.

💡 théorème 3: théorème de relèvement(HP)

Si f est de classe C^n sur I alors il existe une fonction α de classe C^{n-1} sur I telle que

$$\forall t \in I, \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha(t)) \cdot \vec{j}$$

- Sous certaines conditions (qui sont généralement remplies), on a le schéma suivant



- une courbe peut ainsi être paramétrée par une de ses abscisses curvilignes, son paramètre angulaire ou un paramètre quelconque

$t = 0.4$	$t = 1.1$	$t = 1.8$	$t = 2.5$
$\alpha = 5.2$	$\alpha = 67.5$	$\alpha = 98.1$	$\alpha = 112.7$
$s = 0$	$s = 0.72$	$s = 1.69$	$s = 2.99$
$s_1 = -0.60$	$s_1 = 0.12$	$s_1 = 1.09$	$s_1 = 2.39$

Dans le tableau ci-dessus

- t désigne un paramètre quelconque (celui de départ)
- α désigne le paramètre angulaire
- s désigne l'abscisse curviligne d'origine $t = 0.4$
- s_1 désigne l'abscisse curviligne d'origine $t = 1$

remarque 2

- Comme $\vec{T} = T_x \cdot \vec{i} + T_y \cdot \vec{j}$ et que $\vec{T}$ est un vecteur unitaire, on sait que $T_x^2 + T_y^2 = 1$
un théorème de sup nous permet alors d'affirmer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} T_x = \cos \alpha \\ T_y = \sin \alpha \end{cases}$
- Géométriquement** $\alpha(t)$ correspond à l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{T}(t)$;
on l'appelle LE PARAMÈTRE ANGULAIRE
- Le point important du théorème précédent est que la fonction α peut être choisie de classe C^{n-1} sur I (lorsque f est C^n sur I)
- La fonction α n'est pas unique. Mais deux fonctions α_1 et α_2 qui vérifieraient le théorème 3 seraient égales sur I modulo 2π
- En notant $(0, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ le repère polaire usuel, on a que $\vec{T}(t) = \vec{u}(\alpha(t))$
rappel: $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j}$

1.4 Courbure

💡 théorème 4: et définition de la courbure

Soit (I, f) une courbe paramétrée de classe C^2 au moins.

- i) Il existe un unique réel γ tel que $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$.
- ii) Ce réel est appelé la courbure de Γ au point M
- iii) Lorsque $\gamma \neq 0$, le réel $R = \frac{1}{\gamma}$ est appelé le rayon de courbure au point M

remarque 3

Si le vecteur tangent $\vec{T}$ est facile à dériver alors on peut aussi calculer le rayon à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \vec{N}$$

💡 théorème 5: relations de Frenet

1. $\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}$ $\sin \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{s'}$
2. $\vec{T} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$ $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = -\sin \alpha \cdot \vec{i} + \cos \alpha \cdot \vec{j}$
3. $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{s'}$
4. en un point birégulier $\gamma \neq 0$ et $R = \frac{1}{\gamma} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{s'}{\alpha'}$
5. Relations de Frenet : $\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{T}$ $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \cdot \vec{N} = \frac{1}{R} \cdot \vec{N}$ $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T} = -\frac{1}{R} \cdot \vec{T}$
6. (HP) vitesse et accélération dans le repère de Frenet
 $f'(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right) \vec{T}$ $f''(t) = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \gamma \vec{N}$
7. (HP): $\gamma = \frac{x' \cdot y'' - y' \cdot x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\det(f', f'')}{\|f'\|^3}$

remarque 4

- En tout point d'une droite la courbure est nulle
- La courbure est la même en tout point d'un cercle

1.5 Développée



définition 3:

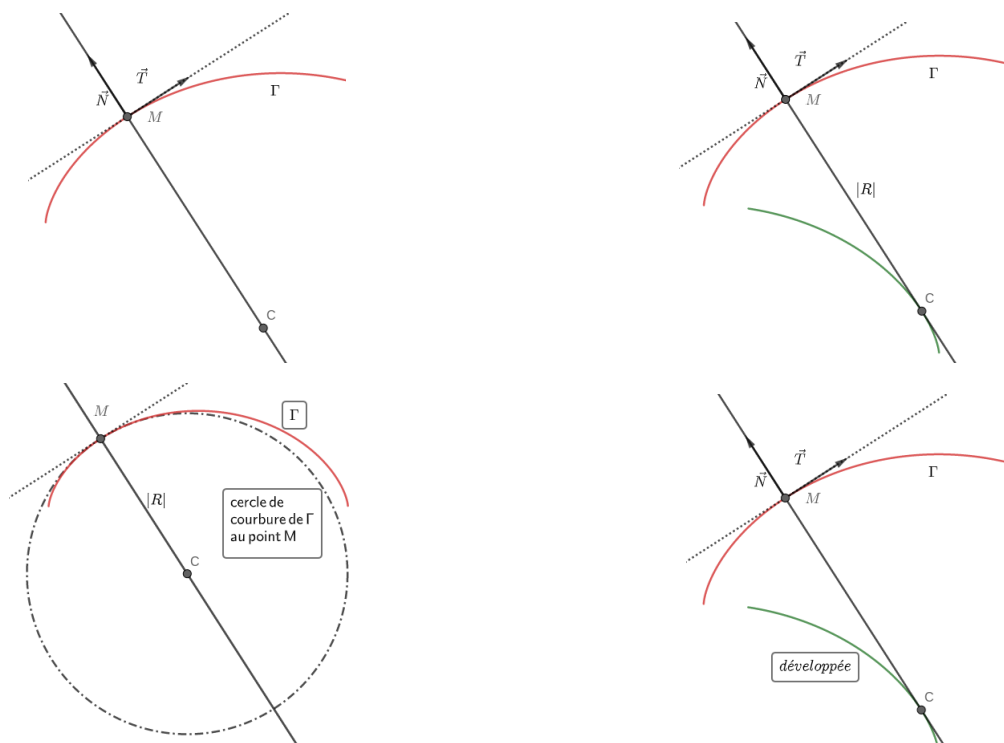
Soit (I, f) un arc paramétré birégulier de classe C^2 et Γ son support.

On appelle :

- centre de courbure de Γ au point M le point C défini par $\overrightarrow{MC} = R \cdot \vec{N}$ c'ad $C = M + R\vec{N}$
- cercle de courbure de Γ au point M le cercle de centre C et de rayon $|R|$
- développée de l'arc Γ le lieu(=l'ensemble) des centres de courbure de Γ .

rem: le cercle de courbure est le cercle tangent en M à la courbe qui "approche le mieux" la courbe en M

rem: de même que la droite tangente en M est la droite qui "approche le mieux" la courbe en M

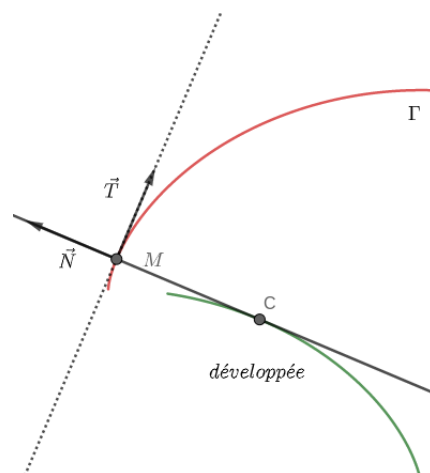


A chaque point de Γ est associé un centre de courbure

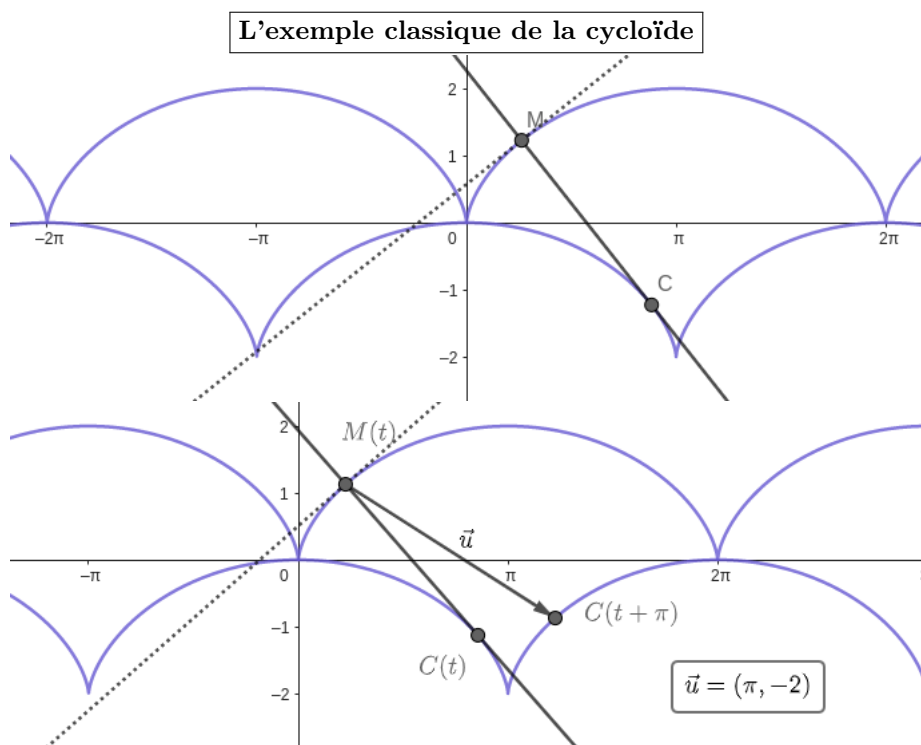
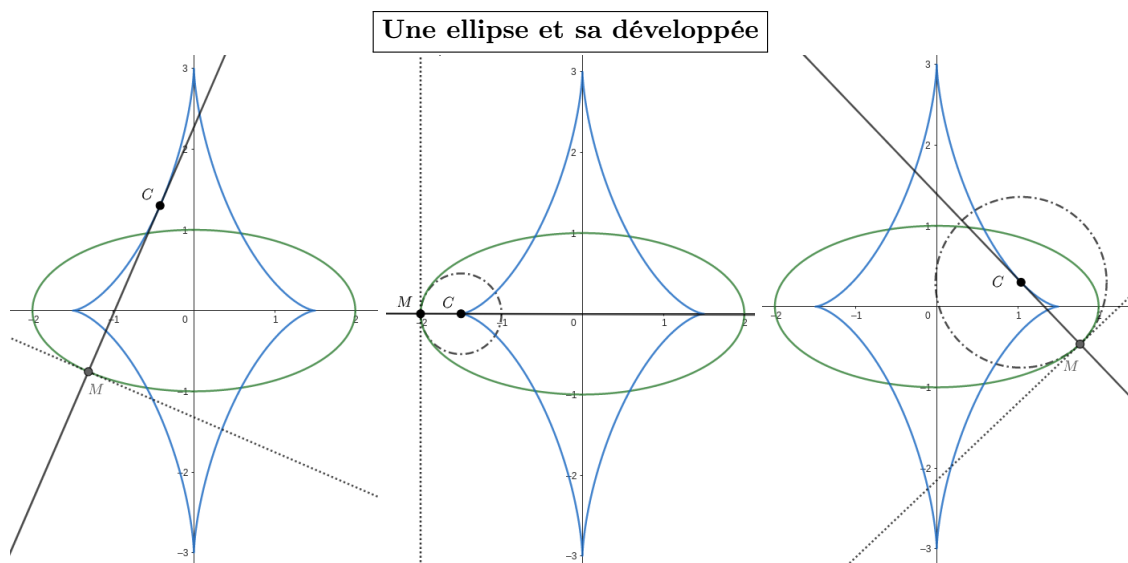
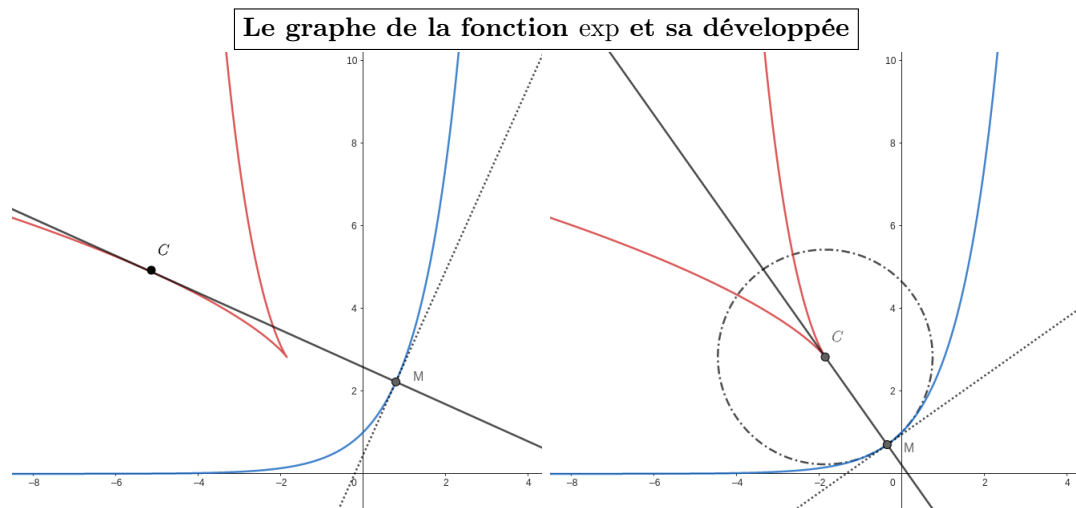
la développée est le lieu des centres de courbure



théorème 6:



La droite normale en M à Γ est tangente en C à la développée. (on verra plus tard que " la développée de Γ est l'enveloppe des normales à Γ ")



*La développée de la cycloïde est l'image d'elle-même par une translation
ce qui ne signifie pas que $C(t)$ est l'image de $M(t)$ par cette translation*

2 Enveloppe d'une famille de droites



définition 4:

- On appelle famille de droites, et on note $(D_t)_{t \in J}$, un ensemble de droites indexées par un réel t appartenant à un certain intervalle réel J
- On appelle enveloppe de la famille $(D_t)_{t \in J}$ tout courbe Γ telle que
 - i) chaque droite D_t soit une tangente à Γ
 - ii) Γ ne possède pas d'autres tangentes que les droites $(D_t)_{t \in J}$

Pour $t \in J$ fixé, le point de Γ en lequel la droite tangente est la droite (D_t) s'appelle le point caractéristique de la droite (D_t)



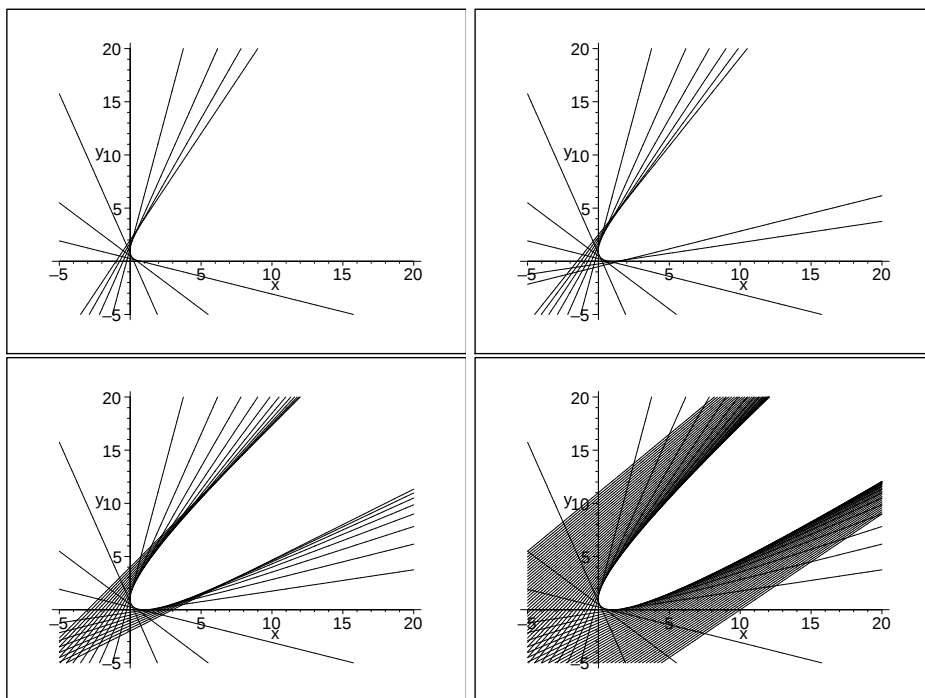
exemple 3:

Soit un réel $a > 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $A = (t, 0)$ et $B = (0, a - t)$.

On note D_t la droite (AB)

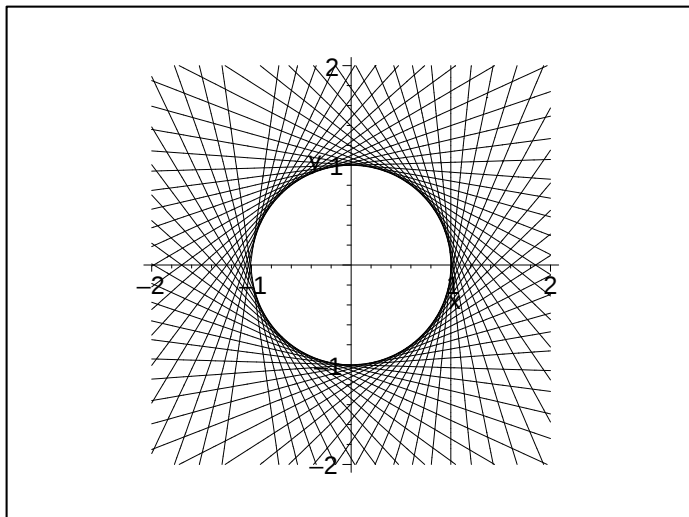
1. Donner une représentation paramétrique de D_t
2. Déterminer $\mathcal{E}$ l'enveloppe de la famille de droite $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$
3. Donner les équations paramétriques de $\mathcal{E}$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{I}, \vec{J})$ où $\vec{I}$ est un vecteur qui dirige la première bissectrice
4. En déduire la nature de $\mathcal{E}$



remarque 5

La famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ peut être représentée par

1. une famille d'équations cartésiennes de droites : $D(t) : a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où a, b et c sont des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$
exemple: $D(t) : \cos(t).x + \sin(t).y - 1 = 0$
2. une famille de représentations paramétriques de droites : $D(t) : \lambda \mapsto A(t) + \lambda \vec{u}(t)$ où A et u sont des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$
exemple: $D(t) : \lambda \mapsto (\cos t, \sin t) + \lambda(-\sin t, \cos t)$



- On pourra remarquer qu'il s'agit de la même famille de droites... la voici représenter ci-contre!
- La famille de droites est la famille des tangentes au cercle de centre O et de rayon un.
- Autrement dit: l'enveloppe de la famille de droites est le cercle $\mathcal{C}(O,1)$!

méthode 2: comment déterminer l'enveloppe d'une famille de droites

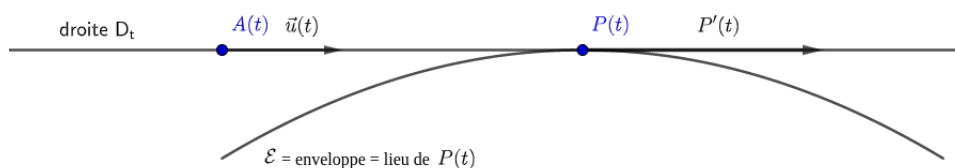
Soit $(D_t)_{t \in J}$ une famille de droites de représentation paramétrique $\lambda \mapsto A(t) + \lambda \cdot \vec{u}(t)$.

Notons $\mathcal{E}$ l'enveloppe de cette famille.

On cherche une fonction λ de classe C^1 telle que $t \mapsto A(t) + \lambda(t) \cdot \vec{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée par $\vec{u}(t)$

On a donc les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \text{le point } P(t) \in \mathcal{E} &\iff \begin{cases} P(t) \text{ est un point de } D_t \\ D_t \text{ est la tangente à } \mathcal{E} \text{ en } P(t) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \text{ tel que } P(t) = A(t) + \lambda(t) \cdot \vec{u}(t) \\ P'(t) \text{ et } \vec{u}(t) \text{ sont colinéaires} \end{cases} \end{aligned}$$



or $P' = A' + \lambda' \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{u}'$ et ainsi:

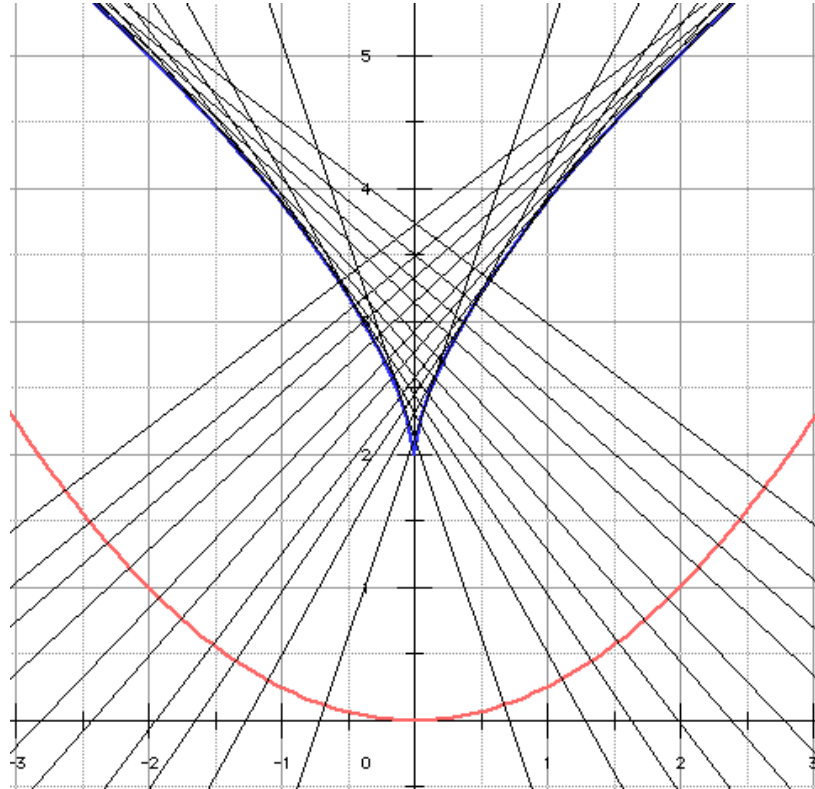
$$\begin{aligned} P'(t) \text{ et } \vec{u}(t) \text{ sont colinéaires} &\iff \det(A' + \lambda' \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{u}', \vec{u}) = 0 \\ &\iff \det(A', \vec{u}) + \lambda' \cdot \det(\vec{u}, \vec{u}) + \lambda \cdot \det(\vec{u}', \vec{u}) = 0 \\ &\iff \lambda = -\frac{\det(A', \vec{u})}{\det(\vec{u}', \vec{u})} \end{aligned}$$



théorème 7: enveloppes des normales: 2nde méthode pour trouver la développée!

Soit (I, f) une courbe paramétrée de classe C^2 (au moins) de support Γ .

L'enveloppe des droites normales à Γ est la développée de Γ



3 Annexe

Démonstration théorème 2

notons s une abscisse curviligne de (I, f) .

- Remarquons que $s'(t) > 0$ car on a supposé Γ régulière et de ce fait $s'(t) = \|f'(t)\| \neq 0$ (et donc > 0).
- Ainsi s est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle I . Par le théorème de la bijection on sait que $J := s(I)$ est un intervalle et que, s réalise une bijection de I sur $J = s(I)$.

- On a d'une part
$$\begin{array}{ccc} s : I & \longrightarrow & J = s(I) \\ t & \longmapsto & s(t) \end{array} \quad \text{et donc} \quad \begin{array}{ccc} s^{-1} : J & \longrightarrow & I \\ u & \longmapsto & s^{-1}(u) \end{array}$$

- D'autre part
$$\begin{array}{ccc} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}.$$

On peut donc paramétrer Γ de la manière suivante
$$\begin{array}{ccc} g : J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & f(s^{-1}(u)) \end{array}$$

- Calculons maintenant g' . On se rappelle déjà que $(s^{-1})' = \frac{1}{s' \circ s^{-1}}$ D'où :

$$g'(u) = (s^{-1})'(u) f'(s^{-1}(u)) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))} f'(s^{-1}(u)) = \frac{f'(s^{-1}(u))}{\|f'(s^{-1}(u))\|} \text{ qui est un vecteur unitaire !}$$

- La notation différentielle "écrit" ce qui a été dit plus haut par

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|} \frac{d\vec{M}}{dt} \text{ qui est un vecteur unitaire !}$$