

C5 - LES CONIQUES I et II

Table des matières

1	Définition géométrique des coniques	2
2	Ellipse	3
3	Hyperbole	5
4	Parabole	9
5	Réduction des coniques	10
6	Quelques démonstrations	13

Trois définitions possibles pour le terme CONIQUE

intersection d'un cône et d'un plan	foyer, directrice, excentricité	courbe du 2nd degré
hyperbole parabole ellipse coniques propres coniques dégénérées	Γ M H F (D)	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
X	✓	✓
<i>pas au programme</i>	coniques "propres" ("vraies" coniques)	"vraies" coniques & coniques "dégénérées"

Il existe 3 et seulement 3 "vraies" coniques ou coniques "propres"

ellipse $e < 1$	parabole $e = 1$	hyperbole $e > 1$
$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$	$Y^2 = 2pX$ avec $p > 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$

légende: "Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé dans lequel Γ a pour équation cartésienne $Y^2 = 2pX$ avec $p > 0$ "

1 Définition géométrique des coniques

✳️ définition 1: définition géométrique des coniques

Soient:

- D une droite
- F un point n'appartenant pas à D
- e un réel strictement positif.

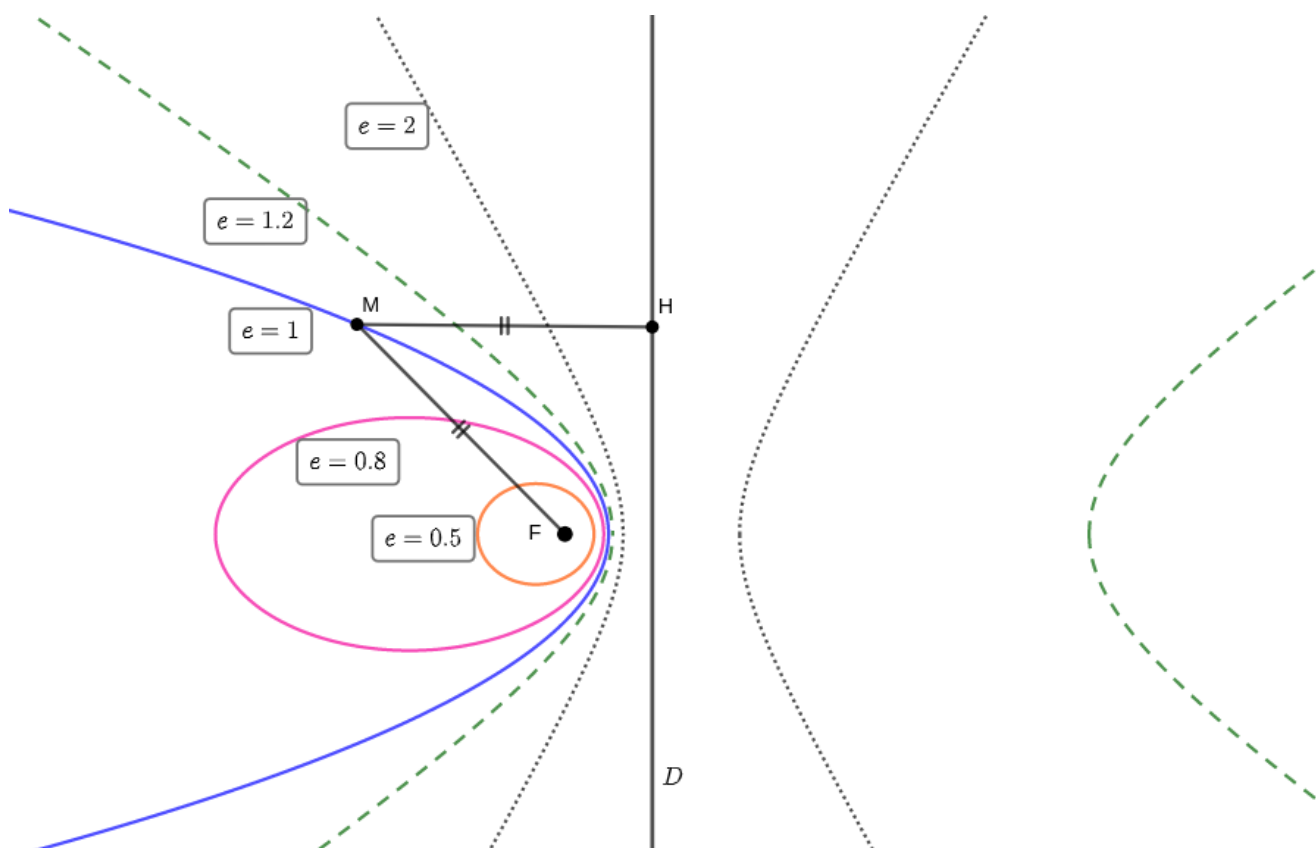
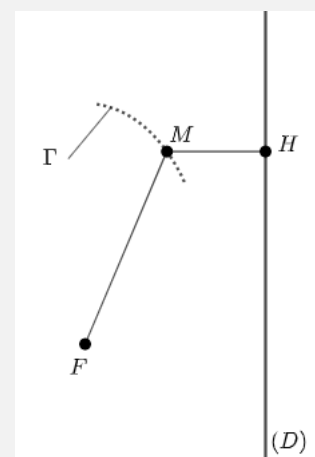
On appelle conique de directrice D , de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$

$$\Gamma = \{M \in \mathbb{R}^2, | d(M,F) = e.d(M,(D)) \}$$

Lorsque

- $e < 1$ la conique est appelée ELLIPSE
- $e = 1$ la conique est appelée PARABOLE
- $e > 1$ la conique est appelée HYPERBOLE

rem: avec cette définition géométrique, les seules coniques sont les ellipses, les hyperboles et les paraboles.



🚲 exemple 1:

- Déterminer l'équation cartésienne de la conique de foyer $F(0,1)$, de droite directrice l'axe des abscisses et d'excentricité $e > 0$.

2 Ellipse

théorème 1: équation réduite d'une ellipse

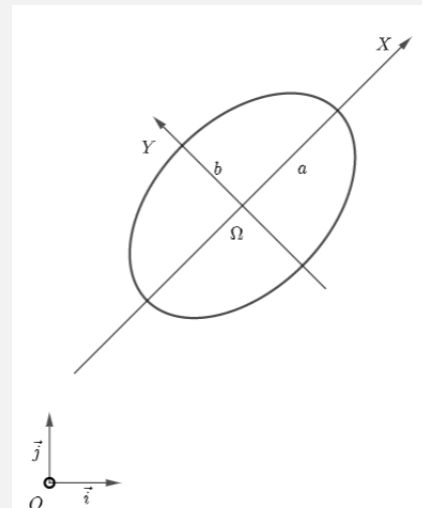
Soit Γ une courbe plane.

La courbe Γ est une ellipse lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel Γ possède comme

équation cartésienne $\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1}$ avec $a > b > 0$.

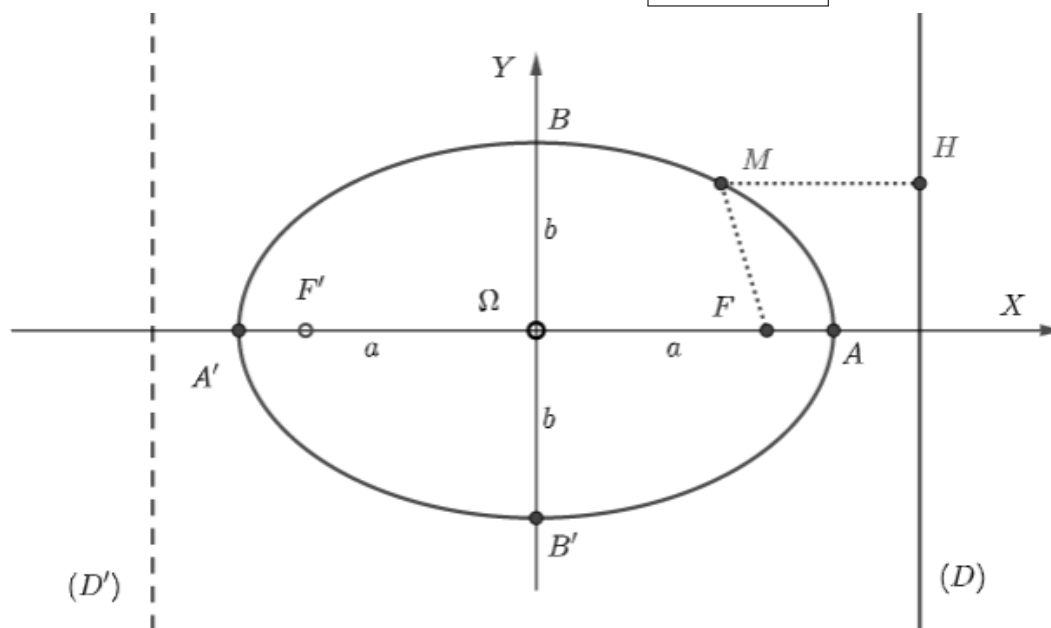
- les axes (AA') et (BB') sont les axes de symétries de l'ellipse
- Ω est le centre de symétrie de l'ellipse
- le segment $[\Omega A]$ s'appelle le demi-grand axe
- le segment $[\Omega B]$ s'appelle le demi-petit axe
- a est la longueur du demi-grand axe
- b est la longueur du demi-petit axe
- la représentation paramétrique possible de cette ellipse

est : $\boxed{\begin{cases} X = a \cos t \\ Y = b \sin t \end{cases}}$ avec $t \in [-\pi, +\pi]$ (ou $[0, 2\pi]$ ou ...)



dessin à mémoriser pour l'ellipse d'équation réduite

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1} \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$



- Les 4 sommets sont $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$
- Les résultats suivants sont HP
 - $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ s'appelle la distance focale. On a $F(c,0)$ et $e = \frac{c}{a}$
 - La directrice a pour équation $X = \frac{a^2}{c}$
 - Cette ellipse est également la conique de foyer $F'(-c,0)$, de directrice (D') d'équation $X = \frac{-a^2}{c}$ et de même excentricité e

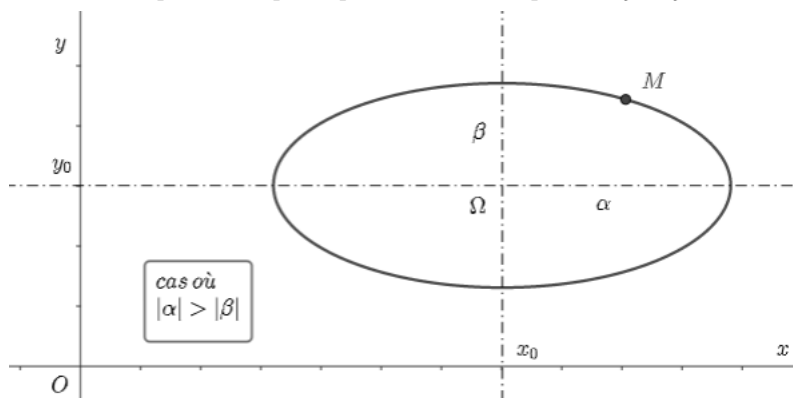
remarque 1 (des résultats immédiats par changement de repère)

1. Soit Γ courbe d'équation cartésienne $\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1}$.

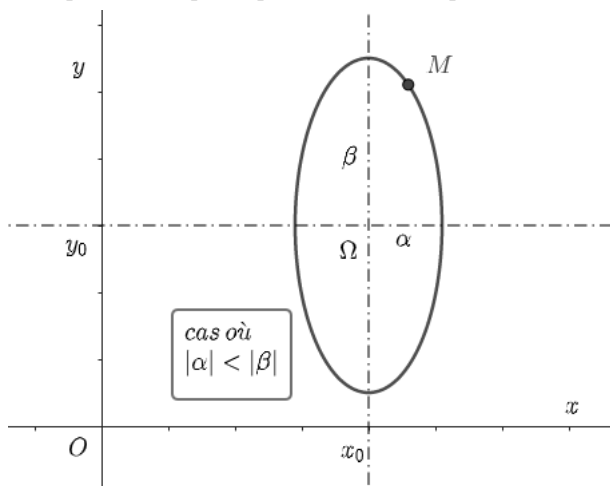
• lorsque $\boxed{\alpha^2 = \beta^2}$, Γ est le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $|\alpha|$

• lorsque $\boxed{\alpha^2 \neq \beta^2}$

i) si $|\alpha| > |\beta|$, Γ est une ellipse d'axe principal la droite d'équation $y = y_0$



ii) si $|\alpha| < |\beta|$, Γ est une ellipse d'axe principal la droite d'équation $x = x_0$



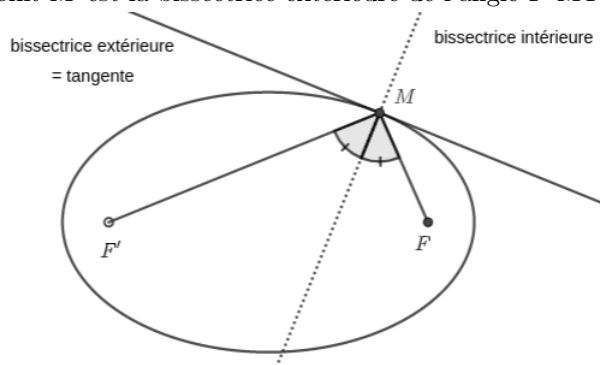
iii) dans les deux cas, le centre de l'ellipse est le point Ω de coordonnées (x_0, y_0)

2. la courbe qui possède l'équation cartésienne ci-dessus a la représentation paramétrique suivante:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cos(t) \\ y = y_0 + \beta \sin(t) \end{cases} \text{ avec } t \in [-\pi, +\pi]$$

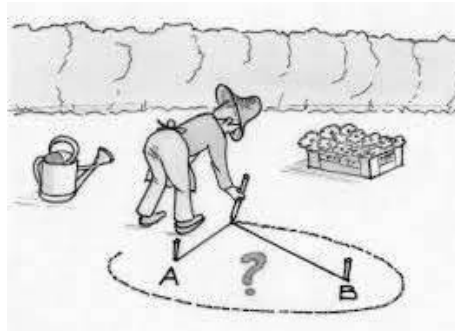
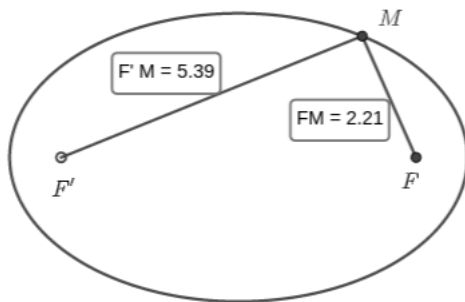
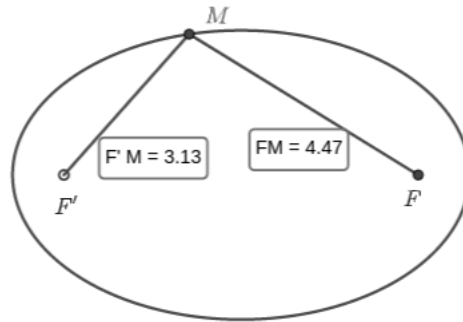
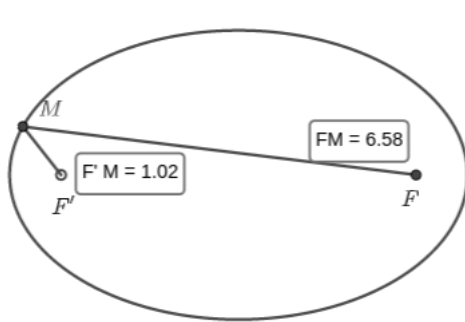
propriété géométrique de la tangente à une ellipse (HP)

• La tangente à l'ellipse au point M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$



définition bifocale de l'ellipse (HP)

- L'ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ est aussi l'ensemble des points M tels que $FM + F'M = 2a = Cste$



3 Hyperbole

définition 2: équation réduite d'une hyperbole

On dit que la courbe Γ est une hyperbole lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

- les axes (ΩX) et (ΩY) sont les axes de symétries de l'hyperbole
- Ω est le centre de symétrie de l'hyperbole
- les deux sommets de l'hyperbole sont $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$
- les droites d'équation $Y = \frac{b}{a}X$ et $Y = -\frac{b}{a}X$ sont les droites asymptotes de l'hyperbole.

une représentation paramétrique possible: $\begin{cases} X = \epsilon \cdot a \cdot \text{ch } t \\ Y = b \cdot \text{sh } t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\epsilon = \pm 1$

- Les résultats suivants sont HP
 - $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ s'appelle la distance focale. On a $F(c,0)$ et $e = \frac{c}{a}$
 - La directrice a pour équation $X = \frac{a^2}{c}$
 - Cette hyperbole est également la conique de foyer $F'(-c,0)$, de directrice (D') d'équation $X = -\frac{a^2}{c}$ et de même excentricité

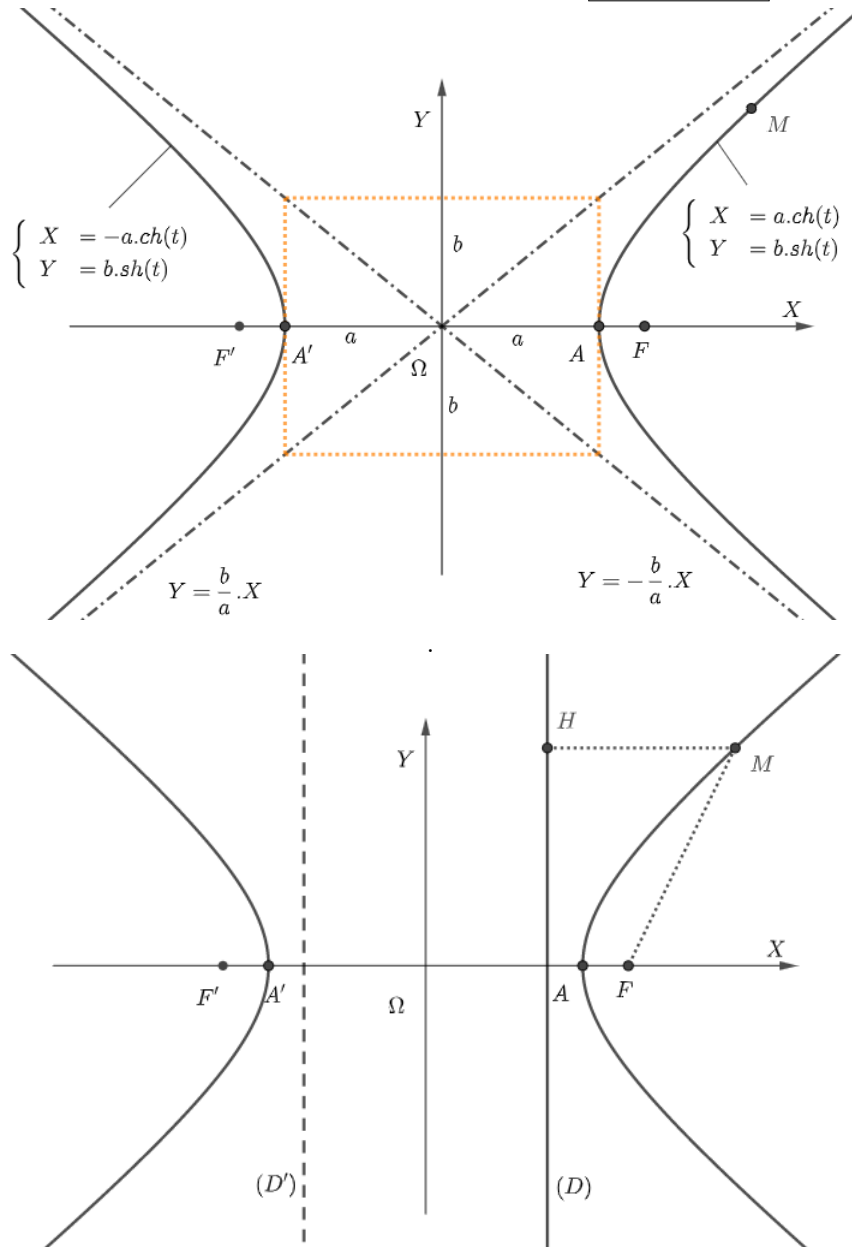
exemple 2:

Soit Γ la courbe d'équation $\frac{x^2 - 2x + 1}{4} - \frac{y^2 - 4y + 4}{9} = 1$

1. Indiquer un repère dans lequel Γ a une équation du type $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
2. Dessiner Γ

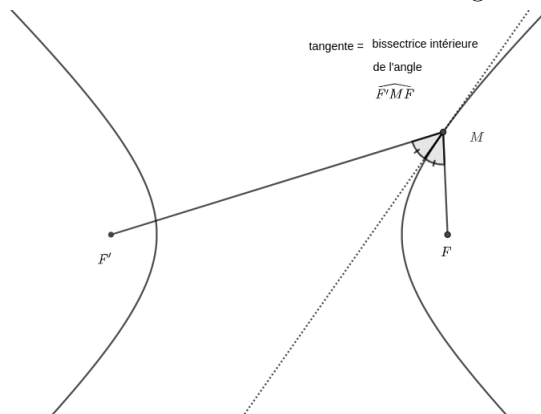
dessins à mémoriser pour l'hyperbole d'équation réduite

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$



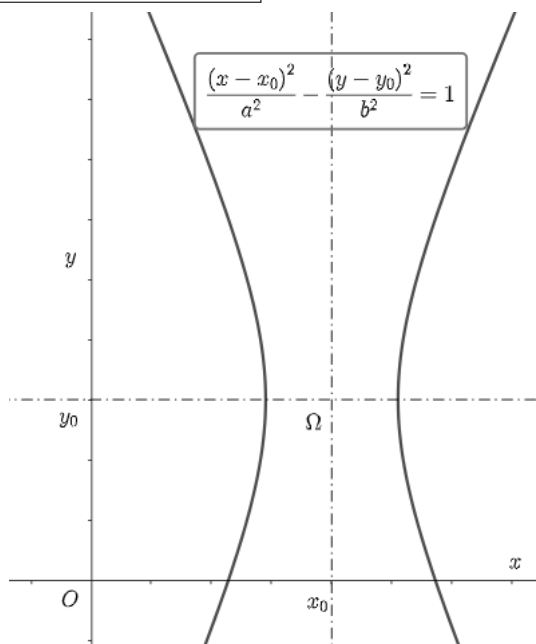
propriété géométrique de la tangente à une hyperbole (HP)

- La tangente à l'ellipse au point M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$

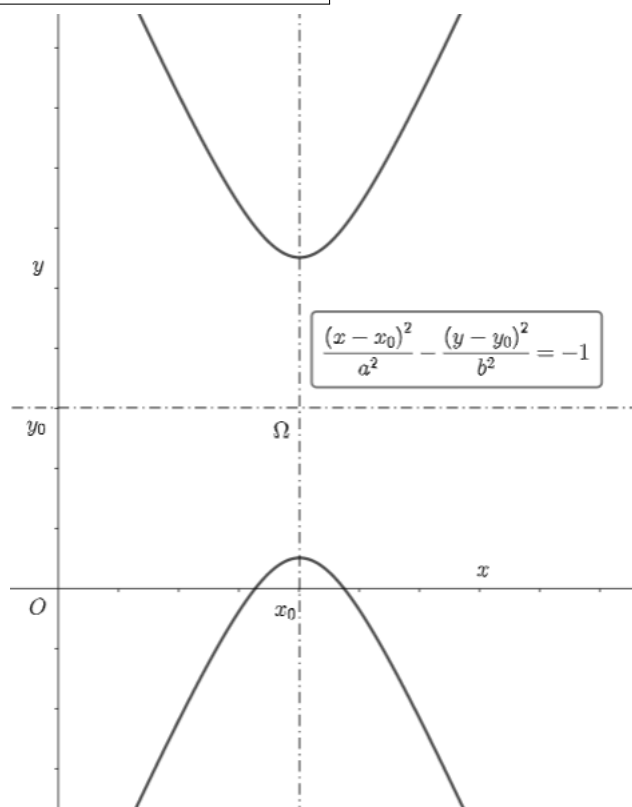


remarque 2 (des résultats immédiats par changement de repère)

- La courbe d'équation $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole



- La courbe d'équation $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ est une hyperbole

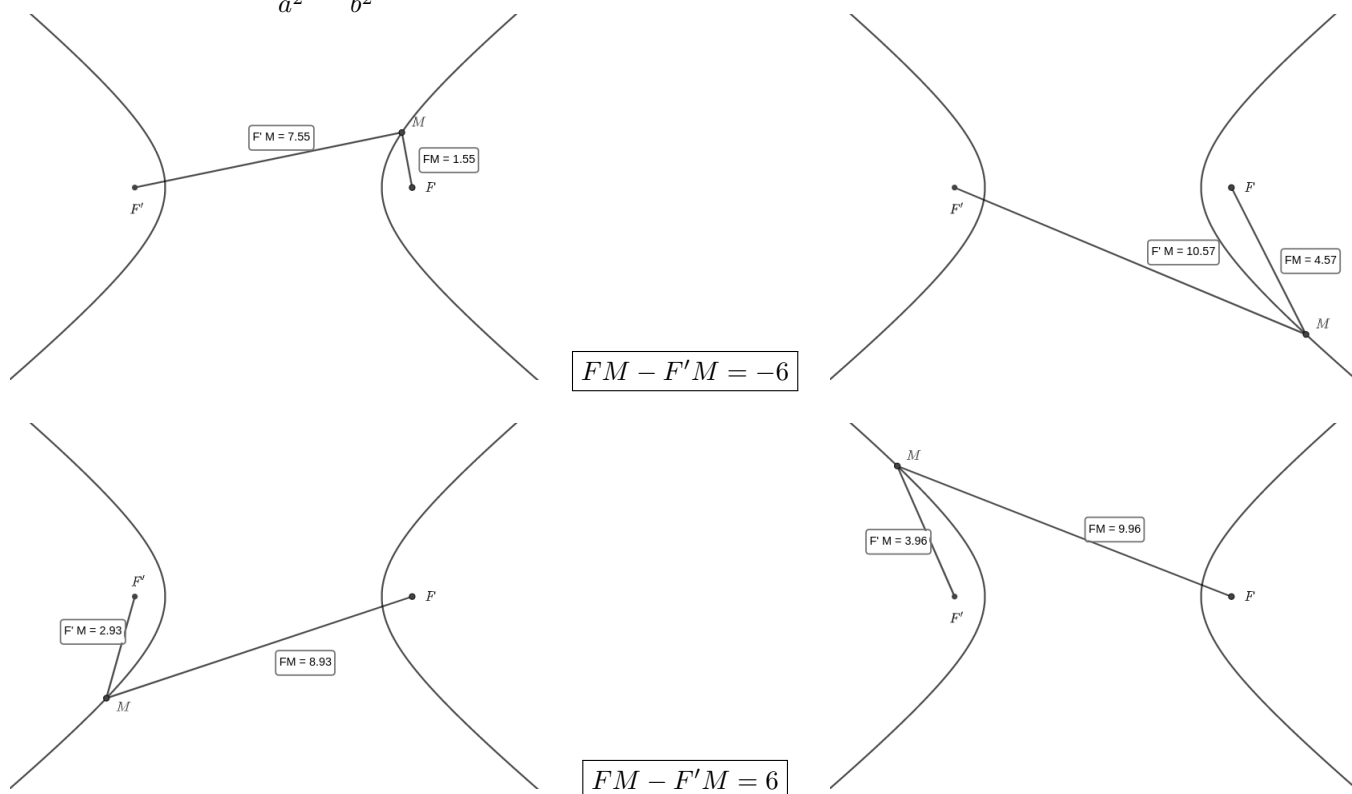


- les hyperboles ci-dessus possèdent respectivement les représentations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon \cdot a \cdot \text{ch}(t) \\ y = y_0 + b \cdot \text{sh}(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = x_0 + a \cdot \text{sh}(t) \\ y = y_0 + \varepsilon \cdot b \cdot \text{ch}(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon = \pm 1$$
- les hyperboles ci-dessus ont les mêmes droites asymptotes: $y - y_0 = \frac{\pm b}{a} \cdot (x - x_0)$

définition bifocale de l'hyperbole (HP)

- L'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ est aussi l'ensemble des point M tels que $|FM - F'M| = 2a = Cste$

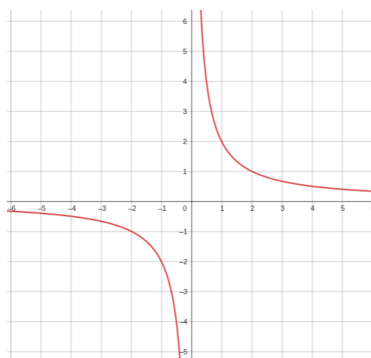


théorème 2:

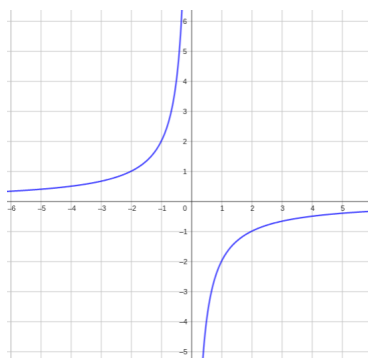
Soit k un réel NON nul.

La courbe d'équation $xy = k$ est une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repère.

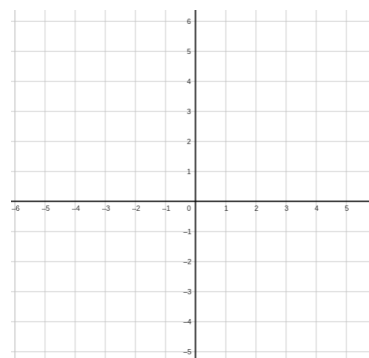
rem: dans le cas où $k = 0$, le courbe n'est pas une hyperbole mais simplement la réunion de deux droites (l'axe (Ox) et l'axe (Oy))



$k > 0$



$k < 0$



$k = 0$

exemple 3: hyperbole équilatère (HP)

On dit qu'une hyperbole est équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

1. Montrer qu'une hyperbole est équilatère ssi $a = b$ dans son équation réduite
2. Montrer que si une hyperbole est équilatère alors il existe un repère orthonormé $(\Omega_1, \vec{I}_1, \vec{J}_1)$ dans lequel son équation est du type $X_1.Y_1 = k$ avec k constante réelle non nulle.
Etablir la réciproque

4 Parabole

✳️ définition 3: équation réduite d'une parabole

On dit que la courbe Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $Y^2 = 2pX$ avec $p > 0$

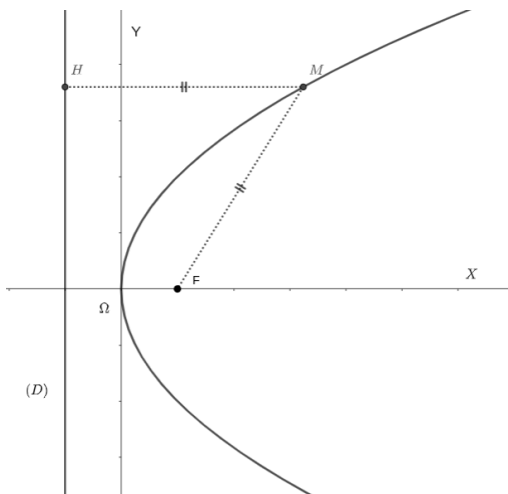
- la droite (ΩX) est l'axe de symétrie de la parabole
- $\Omega(0,0)$ est le sommet de la parabole.

- une représentation paramétrique possible est alors

$$\begin{cases} X &= \frac{t^2}{2p} \\ Y &= t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

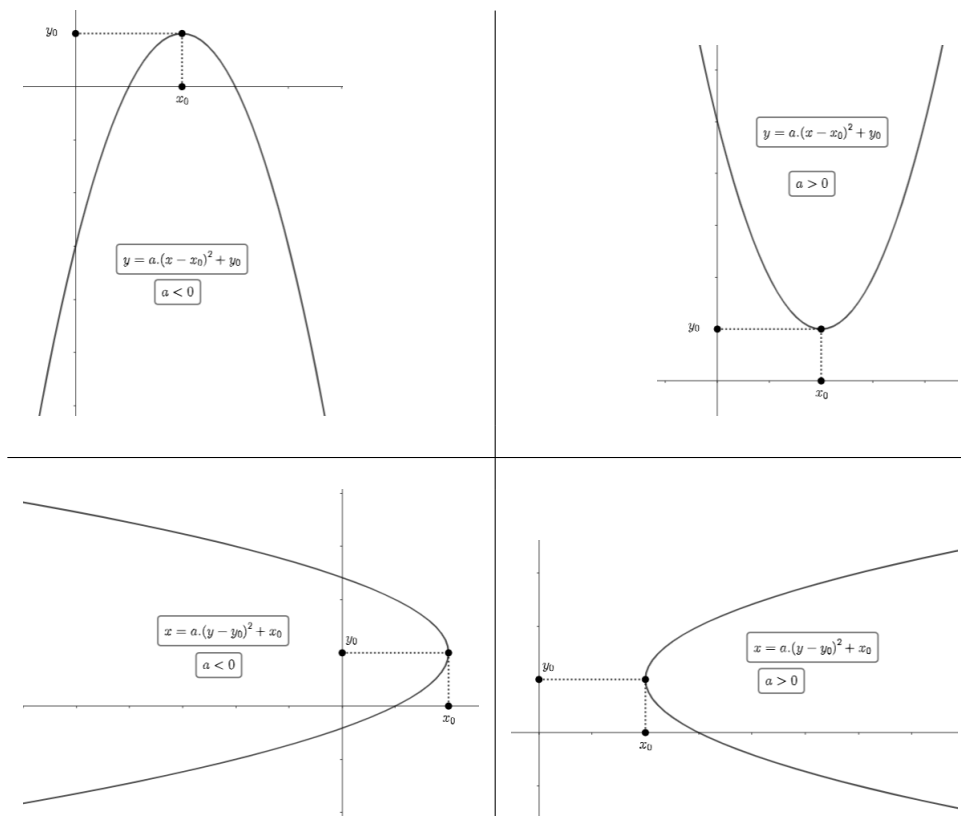
dessin à mémoriser pour la parabole
d'équation réduite $Y^2 = 2pX$

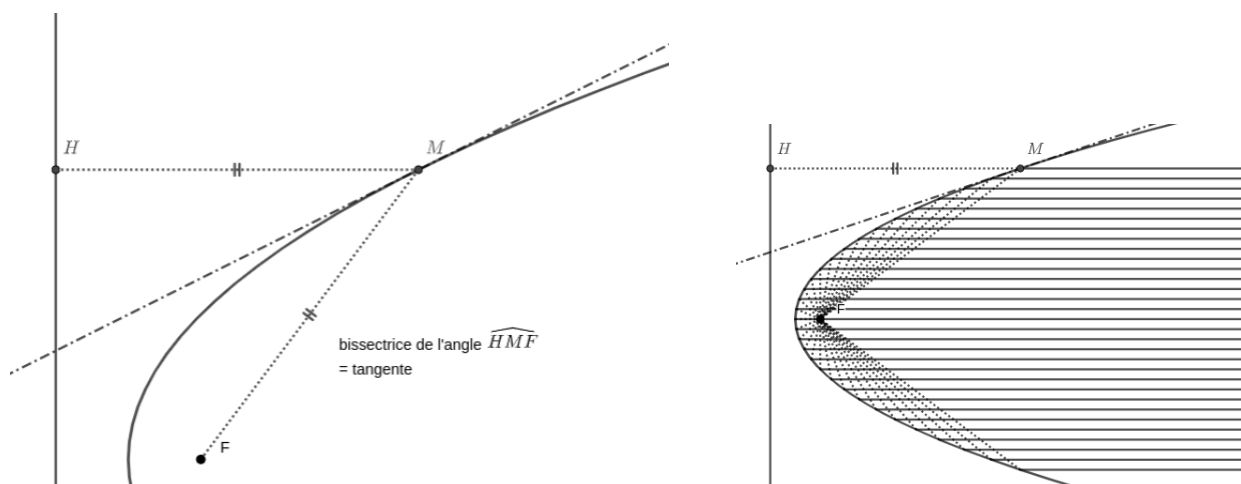
- Les résultats suivants sont HP
 - le foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$
 - la directrice a pour éq. $D = \frac{-p}{2}$
 - $e = 1$ biens sûr



🌀 théorème 3:

Une courbe Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé dans lequel une des coordonnées est une fonction du second degré de l'autre.





5 Réduction des coniques

✳️ définition 4: définition de 'conique' à notre programme (rappel)

On appelle CONIQUE, ou COURBE DU SECOND DEGRÉ, toute courbe Γ qui possède une équation du type

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où (a,b,c,d,e,f) sont des constantes réelles avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

La question qui se pose est la question dite de **la réduction de la conique**:

Il s'agit à partir d'une équation du seconde degré de donner la nature de la conique.

Suivant que le terme dit croisé xy est présent ou pas, on procédera de manières différentes

La question qui se pose est la question dite de **la réduction de la conique**:

Il s'agit à partir d'une équation du seconde degré de donner la nature de la conique et ses éléments.

🚲 exemple 4: quelques exemples de coniques dégénérées

$$\begin{array}{llllll} \text{?} & \Gamma_1 : x^2 = 0 & \Gamma_2 : x^2 = -1 & \Gamma_3 : x^2 = 1 & \Gamma_4 : x^2 - y^2 = 0 & \Gamma_5 : x^2 + y^2 = -1 \end{array}$$

Suivant que le terme dit croisé xy est présent ou pas, on procédera de manières différentes:

1. PAS DE TERME EN xy ?

Une simple translation de l'origine du repère suffit pour conclure: la méthode employée est celle de la mise sous forme canonique.



méthode 1: réduction d'une conique sans terme croisé

Lorsque $b = 0$ on met les termes en x et en y sous forme canonique: puis on interprète, grâce aux équations réduites de référence, le résultat trouvé.

🚲 exemple 5: λ est un paramètre réel

🌀 Déterminer la nature de la courbe $\Gamma_\lambda : (\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$

🚲 exemple 6:

🌀 (a) Déterminer la nature et les éléments de la courbe Γ_m d'équation $9x^2 + my^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$

🌀 (b) Même question avec $\Gamma_m : mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0$

⌘ Pour chacune de ces deux équations, on pourra s'intéresser également aux nombre de courbes Γ_m qui passe(nt) par un point (x,y) fixé.

2. PRÉSENCE DU TERME EN xy ?

Une rotation du repère avec éventuellement un changement d'origine est nécessaire: la méthode employée est celle de la réduction des matrices, et éventuellement de la mise sous forme canonique. (voir ce qui suit)

Dans le repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (E)$$

Ecriture de l'équation sous forme matricielle

On pose

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad L = (d \quad e)$$

En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a

$$U^T \cdot A \cdot U = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{et} \quad L \cdot U = dx + ey$$

Ainsi l'équation (E) s'écrit $U^T \cdot A \cdot U + L \cdot U + f = 0 \quad (E)$

remarque 3

La matrice A est une matrice symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonal (théorème spectral)

🚲 exemple 7:

⌘ Soit Γ la courbe d'équation $13x^2 + 7y^2 + 6\sqrt{3}xy + 4x - 4\sqrt{3}y = 12$
 ⌘ Ecrire cette équation à l'aide de matrices, puis la réduire et la dessiner!

remarque 4 (type d'une conique (Nostradamus?))

On dit que la conique Γ est :

- **du type hyperbole** lorsque $\det A < 0$
 Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est une hyperbole
- **du type parabole** lorsque $\det A = 0$
 Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est une parabole
- **du type ellipse** lorsque $\det A > 0$
 Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est une ellipse

🚲 exemple 8: type $\neq$ nature

Donner le type et la nature des coniques suivantes

1. Γ_1 d'équation $xy = 1$
2. Γ_2 d'équation $xy = 0$
3. Γ_3 d'équation $(x+y)(x-2y+1) = 0$

🚲 exemple 9:

⌘ λ désigne un paramètre réel.
 ⌘ Déterminer la nature de la conique $\Gamma_\lambda : x^2 + y^2 + xy + 4x - y - \lambda = 0$



méthode 2: réduction d'une conique avec un terme en xy

Γ désigne la courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (E) dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. On écrit les matrices $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $L = (d \quad e)$

Dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation s'écrit $U^T \cdot A \cdot U + L \cdot U + f = 0$

2. On diagonalise la matrice A sous la forme $P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $P \in O_2(\mathbb{R})$

- On calcule le polynôme caractéristique de A et on cherche ses racines λ_1 et λ_2
- On cherche le sep associé à λ_1 : il s'agit d'une droite dont on considérera un vecteur directeur UNITAIRE $\vec{I} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

- Le deuxième vecteur propre étant forcément orthogonal, on prend $\vec{J} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

- On note $P = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J})$

- On a $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $P \in O_2(\mathbb{R})$

"les vecteurs propres de A donnent la direction des axes de la conique"

3. On se place dans le nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ et on écrit l'équation dans ce repère
Dans ce repère, les coordonnées sont notées (X, Y)

1er cas: si $L = 0$ (càd pas de terme du premier ordre) .

On peut directement dire que l'équation est

$$\lambda_1 \cdot X^2 + \lambda_2 \cdot Y^2 + f = 0$$

2nd cas: sinon .

- On écrit que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. (on peut noter $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et l'on a $U = P \cdot V$)
- On écrit que l'équation dans le nouveau repère est

$$\lambda_1 \cdot X^2 + \lambda_2 \cdot Y^2 + L \cdot P \cdot V + f = 0$$

- On calcule LPV dans l'équation et l'on met sous forme canonique les trinômes comme dans la méthode "Les Coniques I"

4. *Si l'on demande le tracé: on dessine le système d'axes du nouveau repère (dans le nouveau repère) et l'on peut ainsi facilement dessiner la conique*

5. *Si l'on demande les sommets et les axes de symétries: on les détermine dans le nouveau repère, puis on "revient" dans l'ancien repère avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^T \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$*

>voir de nombreux exemples dans le RDM

6 Quelques démonstrations

exemple 10: autour de l'ellipse

Soient $a > 0$ et $b > 0$.

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. point de vue paramétrique

On considère la courbe Γ d'équation paramétrique
$$\begin{cases} x(t) &= a. \cos t \\ y(t) &= b. \sin t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- (a) Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$, et indiquer les symétries mises en évidence
- (b) Etudier l'arc sur $[0, \pi/2]$
- (c) Tracer Γ

2. point de vue cartésien

On considère Γ_1 d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- (a) Montrer que tous les points de Γ_1 sont réguliers
- (b) Ecrire l'équation cartésienne de la tangente en point $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma_1$

3. lien entre les deux points de vue

- (a) Montrer que $\Gamma \subset \Gamma_1$
- (b) Montrer que $\Gamma_1 \subset \Gamma$

4. Changement d'origine.

Déterminer l'équation cartésienne de Γ_1 dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$

exemple 11: autour de l'hyperbole

Soient $a > 0$ et $b > 0$.

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. point de vue paramétrique

On considère les arcs $\Gamma^+ \begin{cases} x(t) &= a. \operatorname{ch}(t) \\ y(t) &= b. \operatorname{sh}(t) \end{cases}$ et $\Gamma^- \begin{cases} x(t) &= -a. \operatorname{ch}(t) \\ y(t) &= b. \operatorname{sh}(t) \end{cases}$

- (a) Réduire l'intervalle d'étude de Γ^+ et indiquer la symétrie mise en évidence
- (b) Indiquer la transformation géométrique liant Γ^+ et Γ^-
- (c) Etudier Γ^+ sur $[0, +\infty[$
- (d) Tracer sur un même dessin Γ^+ et Γ^-

2. point de vue cartésien

On considère Γ_1 d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Montrer que les axes de coordonnées sont des axes de symétrie et que O est un point de symétrie de Γ_1

3. lien entre les deux points de vue

- (a) Montrer que $\Gamma^+ \cup \Gamma^- \subset \Gamma_1$
- (b) Montrer que $\Gamma_1 \subset \Gamma^+ \cup \Gamma^-$

exemple 12: autour de la parabole

Soit $p > 0$.

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère la courbe Γ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x(t) &= t^2/2p \\ y(t) &= t \end{cases}$$

1. Etudier l'arc Γ et montrer en particulier que Γ ne possède pas de droite asymptote.
2. Déterminer une équation cartésienne de Γ