

C4 - Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Table des matières

1	Norme et distance euclidiennes	2
2	Limites dans $\mathbb{R}^n$	2
3	Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles	5
3.1	dérivée en un point, fonction dérivée	5
3.2	dérivées successives	7
3.3	formules de dérivation	8
3.4	développements limités (DL)	9
4	Rappels: produit scalaire, produit vectoriel,...	10



exemple 1: présentation des fonctions coordonnées

Soit la fonction vectorielle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), 2\sin(t)) \end{aligned}$$

- la fonction $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \cos(t) \end{aligned}$ s'appelle la première fonction coordonnée de f
- la fonction $\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 2\sin(t) \end{aligned}$ s'appelle la seconde fonction coordonnée de f .
- très souvent, lorsque $n = 2$, on notera plutôt x et y les fonctions coordonnées (au lieu de f_1 et f_2)

Q: QU'EST-CE QU'UNE FONCTION VECTORIELLE D'UNE VARIABLE RÉELLE?

Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire

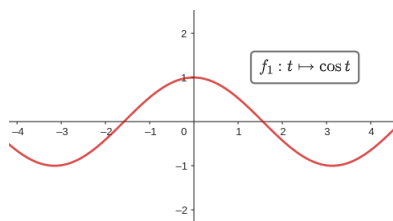
$$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Dans ce polycopié n désignera un entier égal à deux ou trois.
- Dans les paragraphes qui suivent, on considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; on a donc $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- On peut écrire une telle fonction f sous la forme $f = (f_1, \dots, f_n)$, avec:

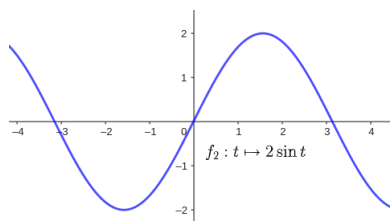
$$\forall t \in I, f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$
- Les fonctions f_i s'appellent les fonctions coordonnées de f : ce sont des fonctions de $I \rightarrow \mathbb{R}$. Les fonctions coordonnées sont des fonctions *numériques* d'une variable réelle.
- On résume donc ceci pour toutes les fonctions coordonnées f_i par l'écriture $f_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Notons $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc aussi

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \vec{e}_i$$

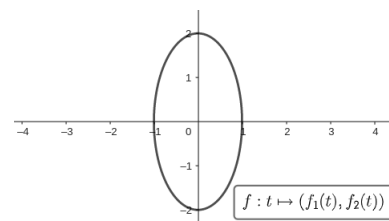
Cette écriture avec les vecteurs sera parfois indispensable pour prouver certaines relations: il ne s'agit pas de faire l'impasse dessus!
- Dans $\mathbb{R}^n$, on ne peut parler de minorant et de majorant, car on n'a pas muni $\mathbb{R}^n$ d'une relation d'ordre.
- En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, les résultats obtenus pour les fonctions de $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ pourront s'étendre aux fonctions de $I \subset \mathbb{C}$.



graphe de la fx NUMÉRIQUE f_1



graphe de la fx NUMÉRIQUE f_2



graphe de la fx VECTORIELLE f

1 Norme et distance euclidiennes



définition 1: norme euclidienne

On appelle norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$



théorème 1: propriétés de la norme, HP

- i.) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$
- ii.) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- iii.) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- iv.) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$



définition 2: distance euclidienne

On appelle distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ l'application

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$



théorème 2: propriétés de la distance, HP

- i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ii) symétrie: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, y) = d(y, x)$
- iii) inégalité triangulaire: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

2 Limites dans $\mathbb{R}^n$



définition 3: fonction bornée, HP

On dit que la fonction f , définie sur I , est bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall t \in I, \|f(t)\| \leq M$$

rem:

- On rappelle qu'on ne peut parler de majorant et de minorant dans $\mathbb{R}^n$.
- On rappelle aussi qu'en première année, on a montré l'équivalence ci-dessous pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est bornée sur } I \iff |f| \text{ est majorée sur } I$$

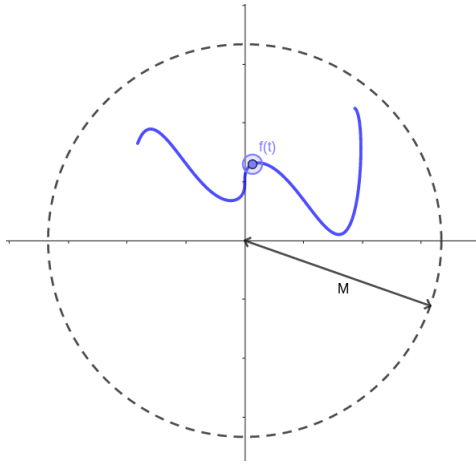


ILLUSTRATION DE LA DÉFINITION
les points $f(t)$ sont contenus dans le cercle $\mathcal{C}(O, M)$

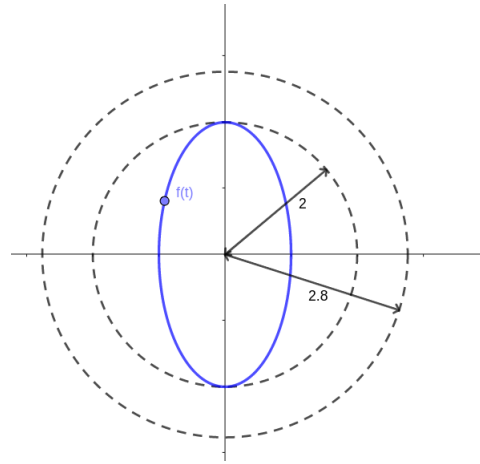


ILLUSTRATION DE L'EXEMPLE CI-DESSOUS
les points $f(t)$ sont contenus dans le cercle $\mathcal{C}(O, 2)$
(mais aussi dans celui de rayon 2,8)

☀ exemple 2:

Montrer que la fonction suivante est bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (\cos t, 2 \sin t)$$

solution:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|f(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 t} \leq \sqrt{\cos^2 t + 3 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 2$$

ce qui prouve que la fonction f est bornée

🖋 définition 4: limite en un point

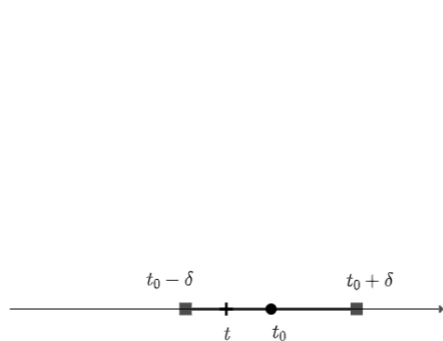
Soit t_0 un réel, élément ou extrémité de I , et l un élément de $\mathbb{R}^n$.

On dit que f admet l comme limite au point t_0 , et on note $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I, (|t - t_0| \leq \delta) \implies \|f(t) - l\| \leq \varepsilon$$

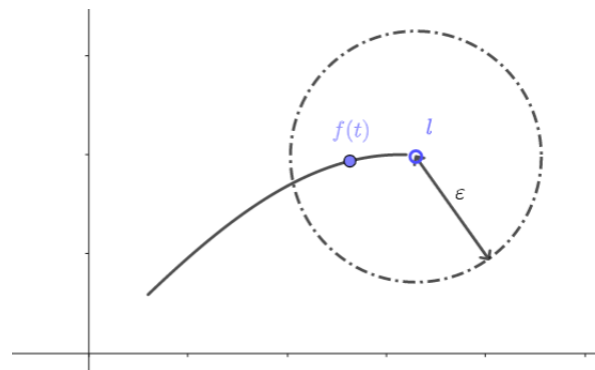
rem: on rappelle que pour une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit par définition que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I, (|t - t_0| \leq \delta) \implies |f(t) - l| \leq \varepsilon$$



t EST SUR L'AXE DES RÉELS
pour un choix de δ assez petit...

$\implies$



$f(t)$ EST DANS LE PLAN
... on est certain que $f(t)$ est assez proche de l

remarque 1 (interprétation de la définition 4 à l'aide d'une fx numérique)

- En posant
$$\begin{array}{lcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ||f(t) - l|| = d(f(t), l) \end{array},$$

on a l'équivalence

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \iff \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0$$

- en effet,
comme une norme est positive, on a $|g(t) - 0| = g(t) = ||f(t) - l||$
ce qui donne les équivalences

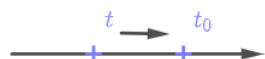
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I, (|t - t_0| \leq \delta) \implies |g(t) - 0| \leq \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I, (|t - t_0| \leq \delta) \implies ||f(t) - l|| \leq \varepsilon \\ &\iff \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \end{aligned}$$

Q: EST-IL POSSIBLE D'ÉTUDIER LA LIMITE D'UNE FONCTION VECTORIELLE PAR SES FXS COORDONNÉES?

 **théorème 3: caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées, (cas $n = 2$)**

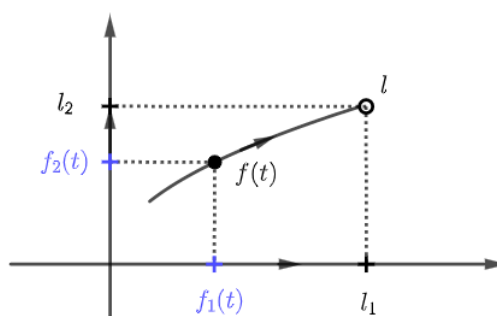
Il y a équivalence entre :

- f admet $l = (l_1, l_2)$ comme limite en t_0
- $\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = l_1$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = l_2$
- chaque fonction coordonnée f_i admet l_i comme limite en t_0



SUR L'AXE DES RÉELS

lorsque $t \rightarrow t_0 \dots$



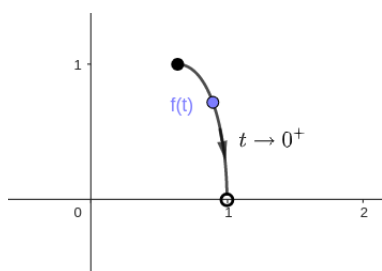
DANS LE PLAN

$$\dots \text{ on a } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow l_1 \\ f_2(t) \rightarrow l_2 \end{cases} \quad \text{càd } f(t) \rightarrow l$$

 **exemple 3:**

Etude de la limite en 0^+ de

$$\begin{array}{lcl} f :]0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\frac{\sin t}{t}, \sin t) \end{array}$$



- rem: $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{2}{\pi}, 1)$ se dessine facilement
- On sait que:

$$\begin{aligned} - \lim_{t \rightarrow 0^+} f_1(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \\ - \lim_{t \rightarrow 0^+} f_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = (1, 0)$



définition 5: continuité en un point, continuité globale

Soit t_0 un réel appartenant à I .

1. On dit que la fonction f est continue au point t_0 lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$
2. On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point de I

rem: on reconnaît les mêmes définitions que pour les fonctions numériques déjà vues en première année

Q: LA CONTINUITÉ DES FXS COORDONNÉES DONNE-T-ELLE LA CONTINUITÉ DE LA FX VECTORIELLE? OUI!



théorème 4: caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées

Il y a équivalence entre :

- i) f est continue en t_0 [resp. sur un intervalle I]
- ii) chacune des fonctions coordonnées de f est continue en t_0 [resp. sur I]



exemple 4: on reprend l'exemple précédent

- la fonction $f_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est C^0 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
comme quotient de fxs continues le dénominateur ne s'annulant pas.
- la fonction $f_2 : t \mapsto \sin t$ est une fx usuelle donc est C^0 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

Comme les fonctions coordonnées de f sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que f **est continue sur** $]0, \frac{\pi}{2}]$

3 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

On rappelle que $\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de l'intervalle I , c'est à dire le plus grand intervalle ouvert inclus dans I .

Exemples: si $I = [1, 3]$ alors $\overset{\circ}{I} =]1, 3[$ et si $I =]1, 3]$ alors $\overset{\circ}{I} =]1, 3[$ aussi!

3.1 dérivée en un point, fonction dérivée



définition 6: vecteur dérivé en un point

1. On dit que f est dérivable en $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ lorsque la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ définie sur $I - \{t_0\}$ possède une limite (finie) lorsque t tend vers t_0 . On la note $\boxed{f'(t_0)}$ ou $\boxed{\overrightarrow{f'(t_0)}}$

2. Si g possède une limite à droite [gauche] en t_0 , on dit que f est dérivable à droite [gauche] en t_0 .

On les note alors $\boxed{\overrightarrow{f'_d(t_0)}}$ et $\boxed{\overrightarrow{f'_g(t_0)}}$.

rem: là encore, on notera la même définition que pour les fonctions numériques...

vocabulaire: $\overrightarrow{f'(t_0)}$ s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0

remarque 2 (interprétation cinématique de la dérivée)

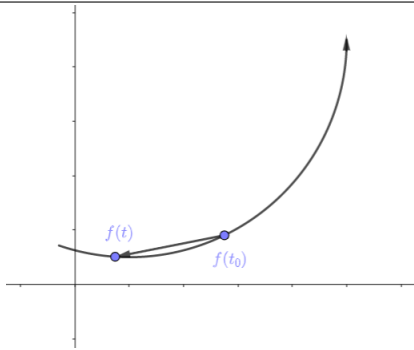
Pourquoi met-on souvent une flèche sur $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et pas sur $f(t_0)$?

On peut donner une interprétation cinématique à ces deux notions :

- t désigne le temps
- $f(t)$ la position du point à l'instant t
- $f'(t)$ correspond donc au vecteur vitesse à l'instant t . (d'où la flèche!)

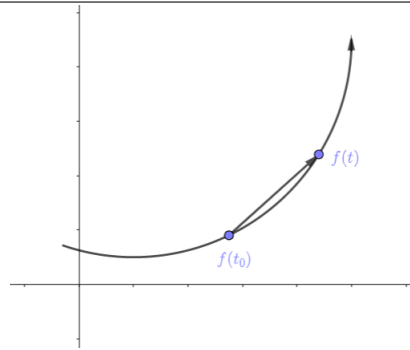
Dans l'exemple ci-dessus, on a donc le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$ qui est égal au vecteur $\vec{i}$

LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION VECTORIELLE EST UNE COURBE ORIENTÉE (DANS LE SENS DES t CROISSANTS)



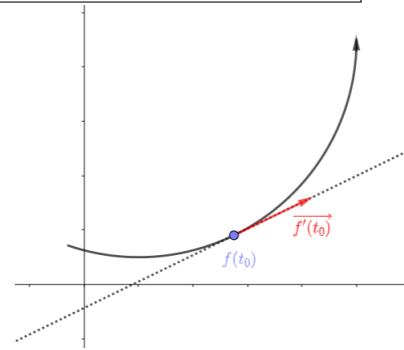
ICI $t < t_0$

les vecteurs $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et $f(t) - f(t_0)$
ont même direction et sens opposés

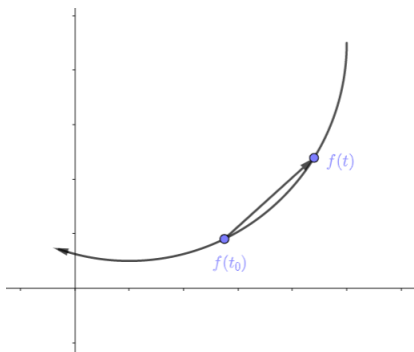


ICI $t > t_0$

les vecteurs $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et $f(t) - f(t_0)$
ont même direction et même sens

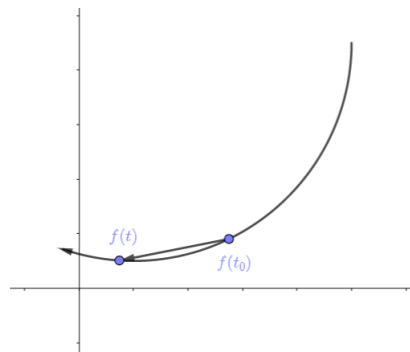


$$\overrightarrow{f'(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



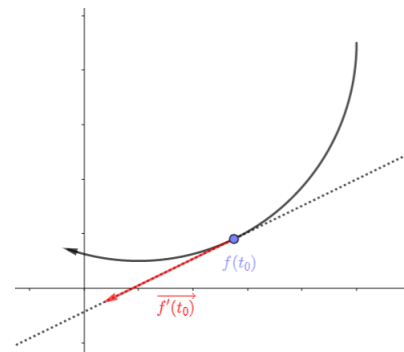
ICI $t < t_0$

les vecteurs $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et $f(t) - f(t_0)$
ont même direction et sens opposés



ICI $t > t_0$

les vecteurs $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et $f(t) - f(t_0)$
ont même direction et même sens



$$\overrightarrow{f'(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

remarque: contrairement aux courbes représentatives des fonctions numériques du type $y = f(x)$, il n'est pas possible de connaître uniquement avec le dessin la norme du vecteur dérivé $\overrightarrow{f'(t_0)}$

☀ exemple 5:

Etudier la dérivabilité en 0 de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (t \cdot |t|, e^t - 1 - t)$

solution:

Soit $t \neq 0$,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t} \cdot (t \cdot |t| - 0, e^t - 1 - t - 0) = \left(|t|, \frac{e^t - 1 - t}{t} \right) = \left(|t|, \frac{t}{2} + o(t) \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = (0, 0)$, on peut affirmer que f est dérivable en 0 et que $\vec{f}'(0) = (0, 0) = \vec{0}$

rem: on verra dans le prochain polycopié qu'il s'agit d'un point stationnaire ou singulier

remarque: $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ est un abus de notation qui désigne le produit $\frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$

💡 théorème 5: caractérisation de la dérivabilité par les fonctions coordonnées

Il y a équivalence entre

- i) la fonction $f = (f_1, \dots, f_n)$ est dérivable en t_0
- ii) les n fonctions $f_1, f_2, \dots$ et f_n sont dérivables en t_0

et l'on a alors : $\overrightarrow{f'(t_0)} = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$

3.2 dérivées successives

La dérivée k -ième (ou d'ordre k) de f se note $\boxed{\vec{f}^{(k)} \text{ ou } \overrightarrow{\frac{d^k f}{dt^k}}}$

🍃 définition 7: fonctions de classe C^k sur I

- 1. f' est appelée la fonction dérivée de f
- 2. On dit que f est de classe C^k sur I lorsque f est k fois dérivable sur I et que $\vec{f}^{(k)}$ est continue sur I
- 3. On note $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

remarque 3 (*interprétation cinématique de la dérivée seconde*)

$f''(t)$ correspond au vecteur accélération à l'instant t

💡 théorème 6: caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées

Il y a équivalence entre :

- i) f est dérivable en t_0 (resp. de classe C^k sur un intervalle I)
- ii) chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable en t_0 (resp. de classe C^k sur I)

Q: QUELLE EST LA MORALE DE CE CHAPITRE?

Les propriétés d'une fonction vectorielle sont celles de ses fonctions coordonnées

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{continue} \\ \text{dérivable} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{ en } t_0 \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ sont } \begin{cases} \text{continues} \\ \text{dérivables} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{ en } t_0$$

$$f \text{ possède une limite en } t_0 \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ possèdent des limites FINIES en } t_0$$

$$f \text{ possède un } DL_n \text{ en } t_0 \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ possèdent des } DL_n \text{ en } t_0$$

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{continue} \\ \text{dérivable} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{ sur } I \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ sont } \begin{cases} \text{continues} \\ \text{dérivables} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{ sur } I$$

3.3 formules de dérivation

théorème 7: linéarité et dérivée du produit

Soient f et g désignent deux fonctions de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, et λ une application de $C^1(I, \mathbb{R})$.

1. l'application $f + g$ est de classe C^1 sur I avec $(f + g)' = f' + g'$
2. l'application λf est de classe C^1 sur I avec $(\lambda f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$
3. l'application $\langle f, g \rangle$ (produit scalaire) est de classe C^1 sur I avec $(\langle f, g \rangle)' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$
4. si $n = 3$ alors l'application $f \wedge g$ est $C^1(I, \mathbb{R}^3)$ avec $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$

démonstration

- pour $n = 2$, on suppose que $f = (f_1, f_2)$ et $g = (g_1, g_2)$ sont C^1 sur I , ainsi que la fonction numérique λ

1. posons $h = f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$
 - comme f et g sont C^1 sur I , on sait que les fxs coordonnées f_1, f_2, g_1, g_2 le sont aussi
 - d'après les THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES, on peut affirmer que $f_1 + g_1$ d'une part, et $f_2 + g_2$ d'autre part sont de classe C^1 sur I
 - comme les fxs coordonnées de h sont C^1 sur I , on en déduit que h est C^1 sur I
2. posons $h = \lambda \cdot f = (\lambda \cdot f_1, \lambda \cdot f_2)$
 - comme f est C^1 sur I on sait que les fxs coordonnées f_1 et f_2 le sont aussi
 - d'après les THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES, on peut affirmer que $\lambda \cdot f_1$ d'une part, et $\lambda \cdot f_2$ d'autre part sont de classe C^1 sur I
 - comme les fxs coordonnées de h sont C^1 sur I , on en déduit que h est C^1 sur I
3. posons $h = \langle f, g \rangle = f_1 \cdot f_2 + g_1 \cdot g_2$
 - comme f et g sont C^1 sur I , on sait que les fxs coordonnées f_1, f_2, g_1, g_2 le sont aussi
 - d'après les THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES, on peut affirmer que $f_1 \cdot f_2 + g_1 \cdot g_2$ est de classe C^1 sur I , càd h !

- pour $n = 3$, on suppose que $f = (f_1, f_2, f_3)$ et $g = (g_1, g_2, g_3)$ sont C^1 sur I

et alors $h = f \wedge g = \begin{pmatrix} f_2 \cdot g_3 - f_3 \cdot g_2 \\ f_3 \cdot g_1 - f_1 \cdot g_3 \\ f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1 \end{pmatrix}$

- comme f et g sont C^1 sur I , on sait que les fxs coordonnées $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ le sont aussi
- d'après les THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES, on peut affirmer que $f_2 \cdot g_3 - f_3 \cdot g_2, f_3 \cdot g_1 - f_1 \cdot g_3$ et $f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1$ sont de classe C^1 sur I
- comme les fxs coordonnées de h sont C^1 sur I , on peut affirmer que h l'est aussi.

théorème 8: linéarité et formules de Leibniz

Soient f et g désignent deux fonctions de $C^k(I, \mathbb{R}^n)$, et λ une application de $C^k(I, \mathbb{R})$

1. l'application $f + g$ est de classe C^k sur I avec $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$
2. l'application λf est de classe C^k sur I avec $(\lambda f)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{(i)} f^{(k-i)}$
3. l'application $\langle f, g \rangle$ (produit scalaire) est de classe C^k sur I avec $(\langle f, g \rangle)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \langle f^{(i)}, g^{(k-i)} \rangle$
4. si $n = 3$ alors l'application $f \wedge g$ est $C^k(I, \mathbb{R}^3)$ avec $(f \wedge g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} \wedge g^{(k-i)}$

remarque 4

- Il n'y a pas de formule avec la dérivée du produit fg car on ne peut multiplier 2 fxs vectorielles.
- Les formules précédentes sont des cas particuliers d'une situation plus générale :
Si B est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, et si f et g sont deux fonctions de classe $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ alors :
 $B(f, g)$ est $C^k(I, \mathbb{R})$ et l'on a la formule $(B(f, g))^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$

3.4 développements limités (DL)



définition 8: cette définition n'est pas à retenir

On dit que f admet un DL en t_0 à l'ordre p lorsque il existe $(\vec{W}_0, \dots, \vec{W}_p) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^{p+1}$ et une fonction $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que :

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=0}^p (t - t_0)^i \cdot \vec{W}_i + (t - t_0)^p \cdot \epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = \vec{0}$$

rem: là encore, c'est la même définition que pour une fonction non vectorielle

notation: on peut écrire aussi $o((t - t_0)^p)$ à la place de $(t - t_0)^p \epsilon(t)$



théorème 9: encore!!

Il y a équivalence entre

- f admet un $DL_p(t_0)$
- toutes les fonctions coordonnées de f admettent un $DL_p(t_0)$

rem: dans la pratique, faire le DL d'une fx vectorielle revient à faire le DL de plusieurs fxs numériques



exemple 6:

Soit $f : t \mapsto (\ln(1+t), e^t)$

On a

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{pmatrix} \ln(1+t) \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \\ 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t^3 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{o(t^3)}_{\text{fx vectorielle}} \end{aligned}$$



théorème 10: Taylor-Young

Si f est de classe C^p sur I alors f admet un DL à l'ordre p en tout point t_0 de I , et l'on a :

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^p \frac{(t - t_0)^i}{i!} \vec{f}^{(i)}(t_0) + o((t - t_0)^p)$$



exemple 7:

La fonction $f : t \mapsto (\cos(e^t), \sin(\arctan t))$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car ses fonctions coordonnées sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Taylor-Young, f admet donc en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ un DL à tout ordre.

4 Rappels: produit scalaire, produit vectoriel,...

E désigne $\mathbb{R}$ -ev en général, dans ce polycopié plus particulièrement $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

1. On dit que φ est une application bilinéaire sur E lorsque

- i) φ est une application définie sur $E \times E$, càd $\boxed{\varphi : E \times E \rightarrow \dots}$
- ii) φ est linéaire à gauche:

$$\forall(a,b,y) \in E^3, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\lambda.a + \mu.b, y) = \lambda.\varphi(a, y) + \mu.\varphi(b, y)$$

- iii) φ est linéaire à droite

$$\forall(x,c,d) \in E^3, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, \lambda.c + \mu.d) = \lambda.\varphi(x, c) + \mu.\varphi(x, d)$$

2. On dit que φ est une application bilinéaire **symétrique** sur E lorsque

- i) φ est une application bilinéaire sur E
- ii) $\forall(x,y) \in E^2, \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$

3. **Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$**

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \longmapsto x_1.y_1 + x_2.y_2 \end{array}}$$

4. **Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$**

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) \longmapsto x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3 \end{array}}$$

5. On dit que φ est une application bilinéaire **antisymétrique** sur E lorsque

- i) φ est une application bilinéaire sur E
- ii) $\forall(x,y) \in E^2, \varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$

6. **Le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^3$**

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

7. *Le produit vectoriel n'existe pas sur $\mathbb{R}^2$! (... malgré ce que peuvent écrire physiciens et sistes!)*