

C2 - SUITES NUMERIQUES REELLES

rappels de sup'

Table des matières

1 Définitions	1
2 Suites extraites	6
3 Des suites de référence	7
3.1 suites arithmétiques	7
3.2 suites géométriques	7
3.3 suites arithmético-géométriques (voir RDM)	8
3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants(voir RDM)	8
4 Relations de comparaison	9
5 Propriétés	10
6 Etude des suites définies de manière explicite: $u_n = f(n)$	14
7 Etude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (voir RDM)	15
8 Suites adjacentes	17
9 Suites à valeurs complexes	18
10 Quelques démonstrations	19

1 Définitions

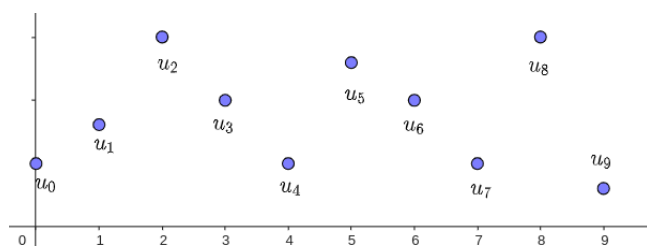


définition 1: suite réelle

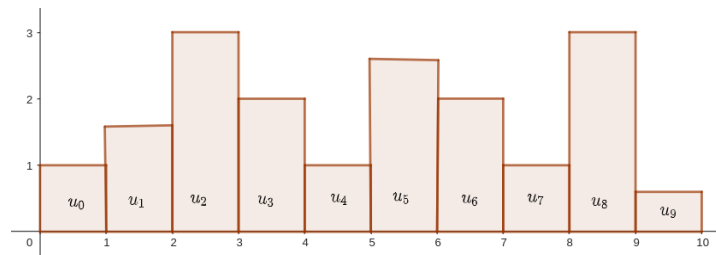
On appelle suite réelle toute fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou encore $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

DEUX MODES DE REPRÉSENTATION



avec des points
(pour comparer avec une fonction)



avec des rectangles
(pour comparer à une intégrale)

remarque 1 (mode de définition d'une suite)

Il existe trois façons de définir une suite:

1. **de façon explicite:** le terme u_n est donné par une formule en fonction de n .
exemple : $u_n = \arctan n + \cos n$ pour tout $n \geq 0$
2. **de façon implicite:** le terme u_n n'est pas donnée par une formule, mais par une proposition qu'il est le seul réel à vérifier.
exemple: soit u_n l'unique racine sur $]0,1[$ de l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ pour tout $n \geq 2$
3. **par récurrence:** le terme u_n est donné par une formule en fonction des termes précédents.
 - Lorsque la formule ne dépend que de u_{n-1} , on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence d'ordre un.
exemple: soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$
 - Lorsque la formule ne dépend que de u_{n-1} et u_{n-2} , on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence d'ordre deux.
exemple: soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0, u_1) = (1, 2)$ et la relation $u_n = u_{n-1}^2 \cdot u_{n-2}^3$ pour tout $n \geq 2$
 - On retrouve ce genre de suites en algèbre linéaire et en probabilités!



définition 2: majorée, minorée, croissante, décroissante,...

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que la suite u est :

- i) majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- ii) minorée lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- iii) bornée lorsque u est à la fois majorée et minorée, c-à-d $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$
- iv) décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- v) croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- vi) constante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

Dans la définition ci-dessous, les réels M et m ne doivent pas dépendre de n !

Par exemple, si l'on sait que l'on a $\forall n \geq 0, u_n \leq n^2$, on peut dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par la suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, mais on ne peut évidemment pas dire la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée.



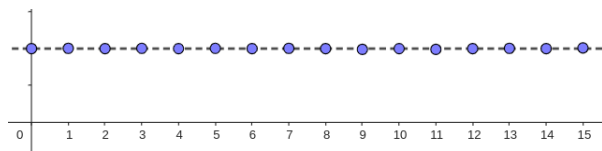
définition 3: suite stationnaire

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

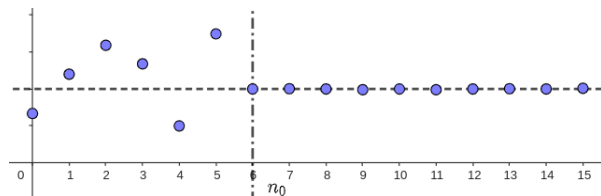
une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire ssi $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$.

rem: une suite stationnaire est toujours une suite convergente mais la réciproque est fausse...

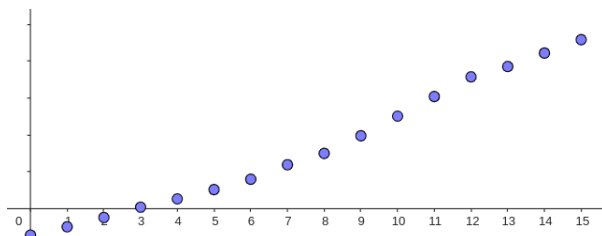
Attention cependant au cas particulier des suites à valeurs entières, où l'on montre (voir RDM) qu'une suite de nombre entiers est convergente ssi elle est stationnaire!



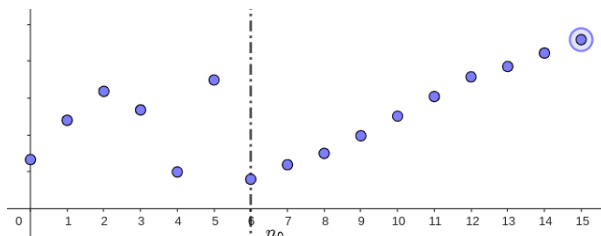
suite constante
 $\exists c \in \mathbb{R} \forall n \geq 0, u_n = c$



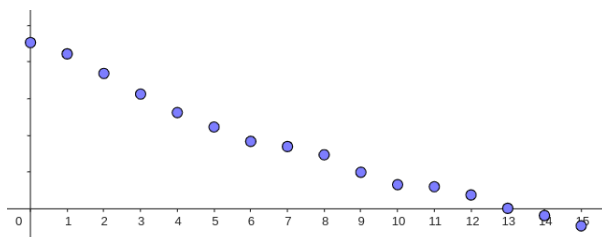
suite stationnaire
 $\exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = c$



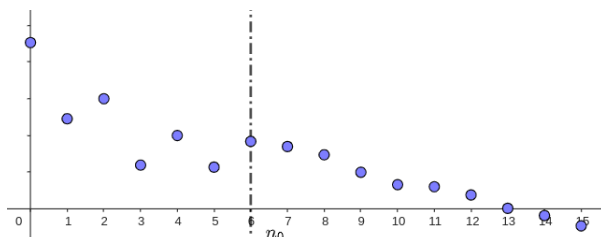
suite croissante
 $\forall n \geq 0, u_{n+1} \geq u_n$



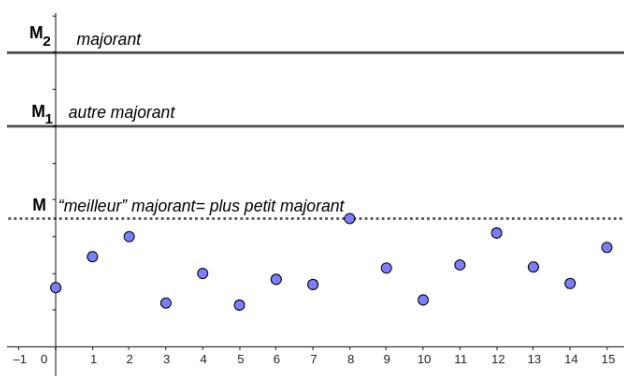
suite croissante à partir d'un certain rang
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$



suite décroissante
 $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n$



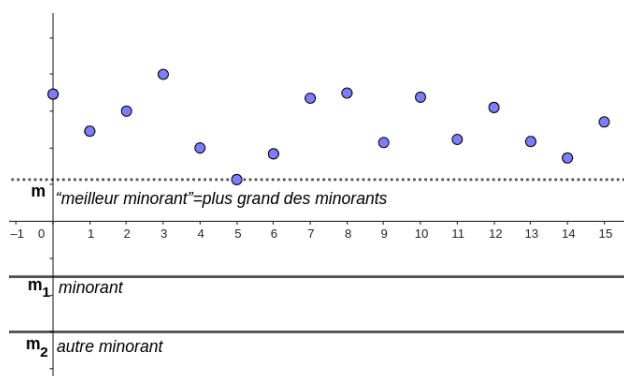
suite décroissante à partir d'un certain rang
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$



M, M_1, M_2 sont des majorants
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M [M_i]$

M est le "meilleur" majorant
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M - \varepsilon$

$$M = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$



m, m_1, m_2 sont des minorants
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m [m_i]$

m est le "meilleur" minorant
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m + \varepsilon$

$$m = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

💡 théorème 1:

La suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée **ssi** la suite réelle positive $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ borné} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

rem: très souvent pour montrer qu'une suite est bornée on préférera majorer sa valeur absolue.

remarque 2 (notion très importante : à partir d'un certain rang)

- exemple: la suite $(u_n)_{n \geq 0} = (n^2 - 6n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir du rang 3
En effet: pour tout $n \geq 3$ on a

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - (n^2 - 6n) = \dots = 2n - 6 = 2(n-3) \geq 0$$

- On dit qu'une propriété portant sur une suite u est vraie à partir d'un certain rang, ou encore, pour n assez grand, lorsqu'elle est vraie pour tout n appartenant à un intervalle du type $[n_0, +\infty[$ avec n_0 entier fixé.
Par exemple, dire que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang signifie

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$$

- Lorsque l'on étudie une suite, c'est essentiellement son comportement au voisinage de l'infini qui nous intéresse: c'est pour cela que l'on se contente souvent de déterminer des propriétés "pour n assez grand"

☀ exemple 1: à retenir dans la pratique

Montrer qu'il y a équivalence entre:

- la suite u est bornée à partir d'un certain rang.
- la suite u est bornée.

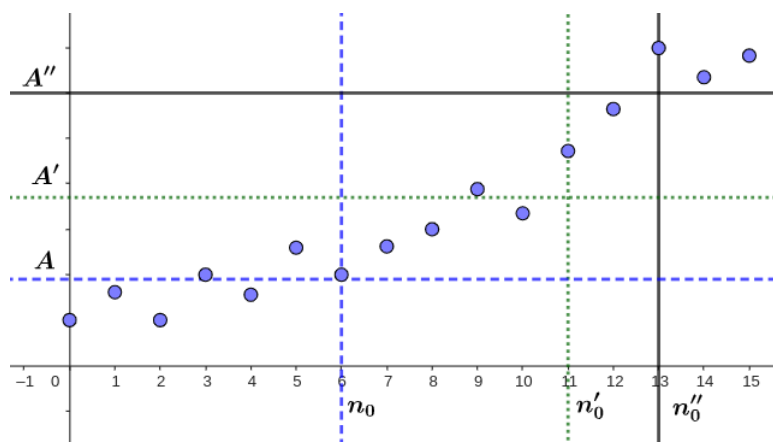
🖋 définition 4: limite infinie

- On dit que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim u_n = +\infty$, lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

- On dit que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim u_n = -\infty$, lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A$$



$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

$$\exists n'_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n'_0, u_n \geq A'$$

⋮



définition 5: suite convergente

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On dit que la suite u convergente vers le réel l , et on écrit $\lim u_n = l$, lorsque

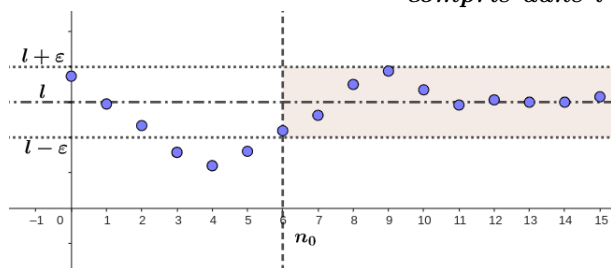
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$$

C'est à dire qu'une suite est dite convergente lorsqu'elle possède une limite FINIE.

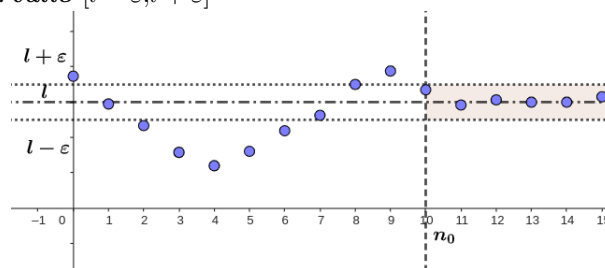
ii) Dans le cas contraire, on dit que la suite u est divergente.

rem: une suite divergente est une suite qui ne possède pas de limite ou qui possède une limite infinie.

Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe un rang $n_0 \dots$ à partir duquel tous les termes de la suite sont compris dans l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$



avec un $\epsilon > 0$ fixé



avec un $\epsilon > 0$ plus petit que le précédent



exemple 2: recherche de valeur approchée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers π^2 et pour laquelle on sait que $\forall n \geq 100, |u_n - \pi^2| \leq \frac{1}{n^3}$. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de π^2 à 10^{-2} près.

- ce que l'on nous demande de manière plus précise, c'est la plus petite valeur de n pour laquelle on est certain que u_n est une valeur approchée de π^2 à 10^{-2} près.
- Déjà, on commence par remarquer que l'on ne peut rien dire à propos des termes qui ont un indice inférieur ou égal à 99. Peut-être y a-t-il l'un de ces termes qui est proche de π^2 à moins de 10^{-2} , mais on ne peut pas le savoir!
- Pour obtenir $|u_n - \pi^2| \leq 10^{-2}$, il suffit que n soit telle que $\frac{1}{n^3} \leq 10^{-2}$, c'est à dire $n \geq \sqrt[3]{100}$. Comme $4^3 = 64$ et $5^3 = 125$, on en déduit que $\frac{1}{n^3} \leq 10^{-2} \iff n \geq 5$
- Cependant, il ne faudrait surtout pas conclure que u_5 est la valeur approchée que l'on cherche (cf. point deux)!
- Conclusion: la plus petite valeur de n pour laquelle on peut affirmer que u_n est une v.a. de π^2 à 10^{-2} près est $n = 100$ (!)

remarque 3 (une faute impardonnable)

Une faute parfois commise est de dire :

"comme la suite (u_n) tend vers l alors pour n assez grand on a $u_n = l$ ".

- Il s'agit, on peut le dire, d'une faute IMPARDONNABLE car cela revient à dire qu'une suite convergente est forcément une suite stationnaire.

Voici un contre-exemple:

la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite qui tend vers 0, et pourtant $\forall n \geq 1, u_n \neq 0$

- A NOTER CEPENDANT QUE POUR SI UNE SUITE À VALEURS ENTIÈRES EST CONVERGENTE ALORS C'EST FORCÉMENT UNE SUITE STATIONNAIRE (CLASSIQUE, RDM)

2 Suites extraites

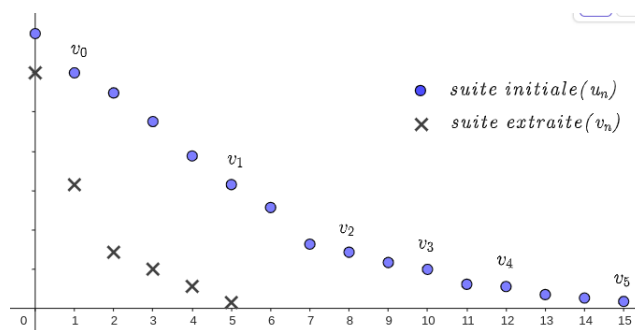


définition 6: suite extraite

On dit que la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une fonction g strictement croissante de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{g(n)}$.

rem: la fonction g s'appelle parfois une "fonction extractrice"

cela correspond à choisir certains points de la suite (u_n) en gardant le même ordre (càd sans faire de retour en arrière)



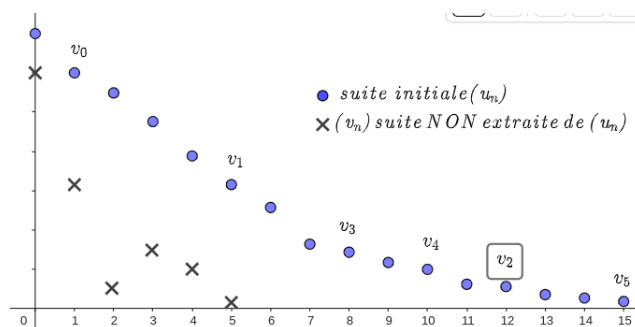
exemple 3:

Les suites (u_{2n}) , (u_{3n}) , (u_{n^2+1}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (u_n) .

En revanche la suite $(v_n) = (u_{n^2-10n+26})$ n'est pas une suite extraite de la suite (u_n) .

En effet, la fonction $n \mapsto n^2 - 10n + 26$ n'est pas une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

On remarque cependant que les valeurs prises par la suite (v_n) sont des valeurs prises par la suite (u_n)



Q: Y-A-T-IL UN LIEN ENTRE LA LIMITE D'UNE SUITE EXTRAITE ET LA LIMITE DE LA SUITE INITIALE?

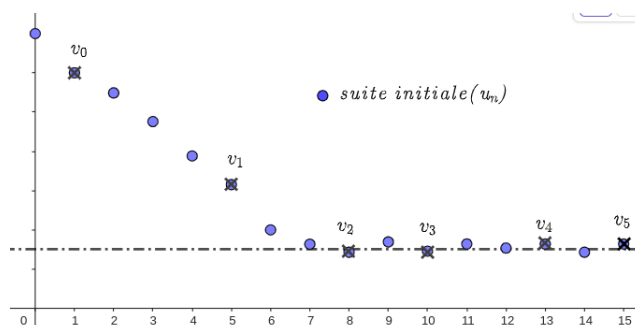


théorème 2: limite d'une suite extraite

Si la suite u tend vers la limite l (finie ou infinie) alors toute suite extraite de u tend vers l .

On comprend intuitivement que la suite extraite va tendre "plus rapidement" vers l que la suite initiale

On utilise souvent "la contraposée de ce théorème" pour justifier qu'une suite ne possède pas de limite





théorème 3: souvent utilisé

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Il y a équivalence entre :

- i) la suite u tend vers l
- ii) les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l

rem: dans ce théorème, les deux suites extraites n'ont pas été prises au hasard! Si vous prenez deux autres suites extraites, a priori, la proposition ne sera plus vraie.

rem: on a un résultat similaire avec les suites extraites (u_{3n}) , (u_{3n+1}) et (u_{3n+2})

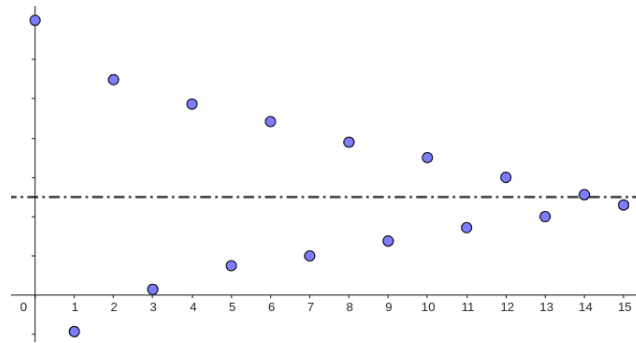


schéma classique où les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite l ce qui permet de justifier que la suite (u_n) converge vers l également

3 Des suites de référence

Dans ce qui suit, q désignera un réel ou un complexe fixé.

3.1 suites arithmétiques



définition 7: suite arithmétique

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q si pour tout entier n , on a $u_{n+1} = u_n + q$

et dans ce cas, on a $\forall n \geq 0, u_n = u_0 + n \cdot q$

d'une manière plus générale, on a $u_n = u_p + q \cdot (n - p)$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

on passe d'un terme à l'autre en additionnant une constante

remarque 4 (*formule utile pour la somme de termes consécutifs*)

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0$$

3.2 suites géométriques



définition 8: suites géométriques

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si pour tout entier n , on a $u_{n+1} = q \cdot u_n$

et dans ce cas, on a $\forall n \geq 0, u_n = u_0 \cdot q^n$

d'une manière plus générale, on a $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

on passe d'un terme à l'autre en multipliant par une constante

remarque 5 (*formule très importante*)

si $q \neq 1$, on a pour tout entier n : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

A partir de celle-ci, on retrouve la formule qui donne $\sum_{k=p}^n q^k = q^p + q^{p+1} + \dots + q^n$

- première idée: à l'aide d'un changement d'indice

$$\sum_{k=p}^n q^k = q^p \cdot \sum_{k=p}^n q^{k-p} = q^p \cdot \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

- seconde idée: en faisant une différence

$$\sum_{k=p}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^{p-1} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^p}{1 - q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

 théorème 4: limite de (q^n) avec q réel (très important)

Soit q un réel fixé.

Alors:

- si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$
- si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- si $q = -1$ alors la suite $(q^n) = ((-1)^n)$ ne possède pas de limite.
- si $q < -1$ alors la suite (q^n) ne possède pas de limite

3.3 suites arithmético-géométriques (voir RDM)

 définition 9: suite arithmético-géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux scalaires a et b tels que $u_{n+1} = a.u_n + b$ pour tout entier n

Le cas $a = 1$ [resp. $b = 0$] correspond à une suite arithmétique [resp. géométrique]

3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (voir RDM)

 définition 10: suite récurrente linéaire d'ordre 2

On dit que la suite numérique (u_n) , à valeurs dans $\mathbb{K}$, vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants lorsqu'il existe des constantes numériques $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ telles que

$$a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

4 Relations de comparaison

Soit (v_n) une suite de nombres réels non nuls.



définition 11: suite négligeable, suite dominée

- i) On dit que la suite $u = (u_n)$ est négligeable devant la suite $v = (v_n)$, et on écrit $u_n = o(v_n)$, lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$
cela revient à dire que $u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$
- ii) On dit que la suite $u = (u_n)$ est dominée par la suite $v = (v_n)$, et on écrit $u_n = O(v_n)$, lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée
cela revient à dire que $u_n = k_n \cdot v_n$ avec (k_n) suite bornée

remarque 6 (*Attention! "Dominer" n'est pas le contraire de "être négligeable"*)

Notons pour tout n , $u_n = n + 1$ et $v_n = 2n + 100^{100}$

- La suite (v_n) domine la suite (u_n) .

En effet comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2}$, on sait que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente, et donc par théorème elle est bornée! On a bien prouvé que $u_n = O(v_n)$

- ... mais la suite (u_n) domine aussi la suite (v_n) .

En effet comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 2$, on sait que la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ est convergente, et donc par théorème elle est bornée! On a bien prouvé que $v_n = O(u_n)$

- Comme une suite convergente est toujours bornée, on peut affirmer que

si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$. (mais la réciproque est fausse)



définition 12: suites équivalentes

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites de nombres réels non nuls.

On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on écrit $u_n \sim v_n$, lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

cela revient à dire que $u_n = k_n \cdot v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$

rem importante: ceci revient aussi à dire que $u_n = v_n + o(v_n)$

on a en effet les équivalences suivantes:

$$u_n = v_n + o(v_n) \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff \frac{u_n - v_n}{v_n} \rightarrow 0 \iff \frac{u_n}{v_n} - 1 \rightarrow 0 \iff \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$$



théorème 5: pratique

- i) Si $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, le signe de u_n est égal à celui de v_n .
- ii) Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) tend vers l alors (u_n) tend vers l
- iii) Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour n assez grand et $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim w_n$

remarque 7 (formule de Stirling (H.P.))

On a $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

5 Propriétés

théorème 6: utilisé très souvent

Le produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente vers 0.

exemple 4: très classique

Soit la suite u définie par $\forall n \geq 1, u_n = \frac{\cos n}{n}$.

La suite $(\cos n)$ ne possède pas de limite ... mais elle est tout de même bornée!

On va donc justifier que la suite u tend vers 0 en disant que c'est le produit d'une suite bornée (la suite $(\cos n)$) par une suite qui tend vers 0 (la suite $(\frac{1}{n})$).

rem: on utilise souvent ce raisonnement en présence de la suite $(\cos n)$ ou $(\sin n)$ ou $((-1)^n)$

théorème 7: Attention! La réciproque est fausse.

SI une suite est convergente ALORS elle est bornée

$$\text{(càd: } \boxed{((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée})}$$

rem: on dit encore que "toute suite convergente est bornée"

rem: la réciproque est bien sûr fausse comme l'atteste la suite $((-1)^n)$

rem: par contraposée, on peut dire que si une suite n'est pas bornée alors elle est divergente.

exemple 5:

Soit de nouveau la suite u définie par $u_n = \frac{(-1)^n n + 6}{n^2 + 4}$.

- On a $u_n \sim \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
- On en déduit que (u_n) est une suite qui converge (vers zéro)
- Le théorème ci-dessus nous permet alors de justifier sans calculs que la suite u est bornée
En effet, il suffit d'écrire "comme la suite (u_n) converge vers 0, on en déduit que (u_n) est bornée"

théorème 8: La combinaison linéaire de deux suites convergentes est encore une suite convergente

i) L'ensemble des suites convergentes est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

ii) L'ensemble des suites convergentes vers 0 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

ceci signifie que:

- la suite nulle est une suite convergente
- la somme de deux suites convergentes est encore une suite convergente.
en effet,

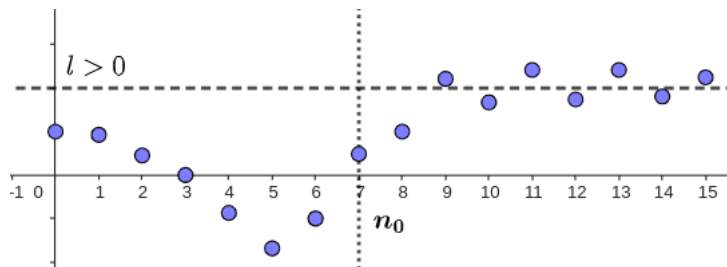
$$\lim u_n + v_n = \lim u_n + \lim v_n$$

- le produit d'une suite convergente par un scalaire est encore une suite convergente.
en effet,

$$\lim \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot \lim u_n$$

💡 théorème 9:

Si $\lim u_n = l > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.



Si $\lim u_n = l > 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > 0$

☀ exemple 6:

Soit (u_n) une suite qui converge vers 4.

- Le théorème ci-dessus permet d'affirmer $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > 0$
- Allons plus loin: on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - 4| \leq \varepsilon$$

- En prenant, $\varepsilon = 0.5$, on peut affirmer

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 3.5 \leq u_n \leq 4.5$$

- En prenant, $\varepsilon = 0.01$, on peut affirmer

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, 3.99 \leq u_n \leq 4.01$$

💡 théorème 10: image d'une suite par une fonction

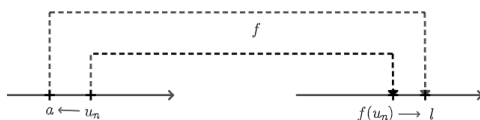
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ f \text{ une fonction telle que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \end{cases} \implies \text{la suite } (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } l$$

rem: ce n'est rien d'autre qu'un théorème de composition de limites que l'on peut écrire encore ainsi:

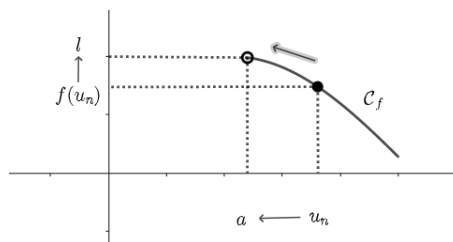
$$\boxed{\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \boxed{a} \text{ et si } \lim_{x \rightarrow \boxed{a}} f(x) = l \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l}$$

rem: cas particulier important

$$\boxed{\begin{cases} \lim u_n = a \\ f \text{ est continue en } a \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(a)}$$



quand $n \rightarrow \infty, u_n$ se rapproche de a
 $f(u_n)$ se rapproche de l



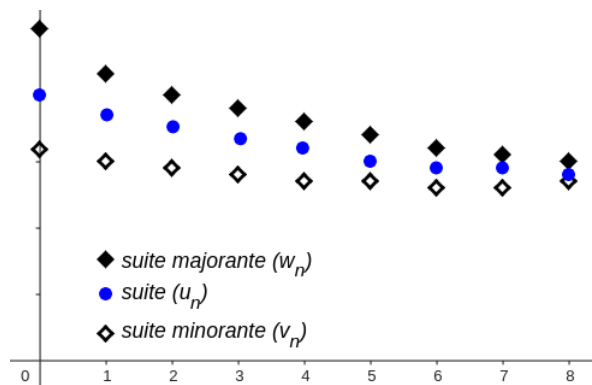
quand $n \rightarrow \infty, u_n$ se rapproche de a
le point $(u_n, f(u_n))$ se rapproche du point $(a, f(a))$

☀️ exemple 7: Attention si f N'est PAS continue

☞ On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ MAIS $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \frac{n-1}{n} \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor 1 - \frac{1}{n} \rfloor = 0 \neq 1$

💡 théorème 11: théorème de convergence par encadrement (des gendarmes)

Si $\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang } v_n \leq u_n \leq w_n \\ \text{et si } \lim v_n = \lim w_n \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ possède une limite} \\ \text{et l'on a } \lim u_n = \lim v_n = \lim w_n \end{cases}$



☀️ exemple 8: rédaction du "théorème des gendarmes"

☞ Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \geq 0, \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$.

Montrer que $\lim u_n = 0$

Réponse:

- Déjà ce qu'il ne faut pas écrire sur sa copie!

Comme $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ alors $\lim u_n = 0$

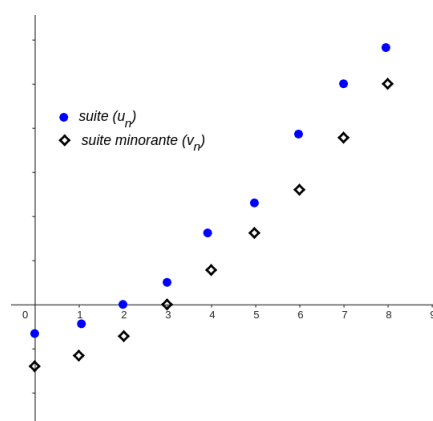
- Ce qu'il faut écrire:

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ alors d'après le théorème de convergence par encadrement on peut affirmer que $\lim u_n$ existe et vaut 0

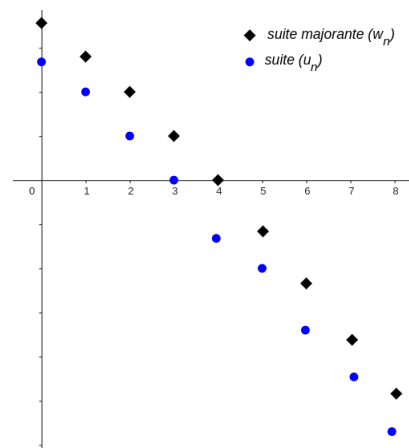
💡 théorème 12: théorème de divergence par minoration ou majoration

- Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$
- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à mémoriser mais son emploi est courant



quand la suite minorante tend vers $+\infty$
 (u_n) n'a pas d'autre choix que de tendre vers $+\infty$



quand la suite majorante tend vers $-\infty$
 (u_n) n'a pas d'autre choix que de tendre vers $-\infty$



définition 13: borne supérieure, borne inférieure d'un ensemble (rappels)

- Soit E un ensemble majoré.

On appelle borne supérieure de E , et on note $\sup(E)$, le plus petit des majorants de E

càd le réel M tel que $\forall x \in E, x \leq M$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, M - \varepsilon \leq x$

- Soit E un ensemble minoré.

On appelle borne inférieure de E , et on note $\inf(E)$, le plus grand des minorants de E

càd le réel m tel que $\forall x \in E, m \leq x$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x \leq m + \varepsilon$



théorème 13: théorème de la limite monotone

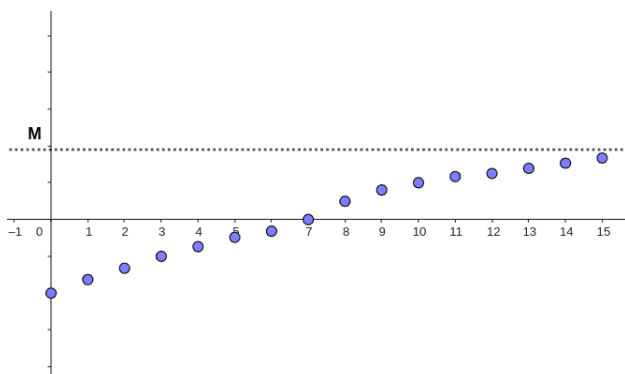
Soit (u_n) une suite réelle.

Si (u_n) est une suite monotone alors (u_n) possède une limite (finie ou pas)

Plus précisément:

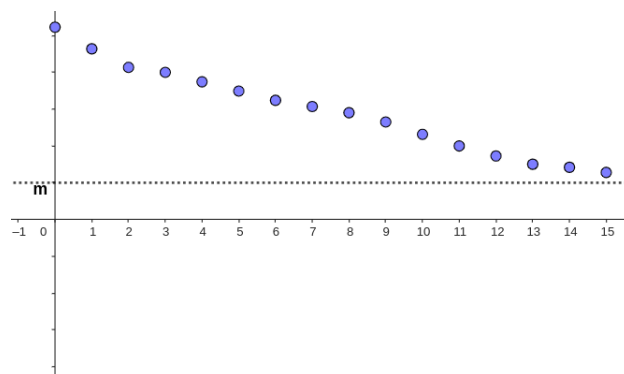
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et $\boxed{\lim u_n = \sup_n(u_n)}$
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée alors $\boxed{\lim u_n = +\infty}$
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et $\boxed{\lim u_n = \inf_n(u_n)}$
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée alors $\boxed{\lim u_n = -\infty}$

en particulier, une suite strictement positive décroissante possède une limite finie positive ou nulle.



la borne sup. est le "meilleur" majorant
(càd le plus petit majorant)

si (u_n) suite majorée $M = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
0.5cm



la borne inf. est le "meilleur" minorant
(càd le plus grand minorant)

si (u_n) suite minorée $m = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

remarque 8 (très important)

Ainsi, on retiendra que:

- une suite monotone possède toujours une limite (finie ou infinie)
- une suite croissante est convergente $\boxed{\text{ssi}}$ elle est majorée.
- une suite décroissante est convergente $\boxed{\text{ssi}}$ elle est minorée.

6 Etude des suites définies de manière explicite: $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$ pour tout entier n .

D'une manière générale, ce sont les suites les plus simples à étudier, car il suffit d'étudier la fonction f et de retenir que

les propriétés de la fonction f se transmettent à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Attention cependant: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ ce n'est pas la "même chose" !

(la première désigne la limite de la fonction f et la seconde la limite de la suite u)



théorème 14: les démonstrations doivent être sues; les réciproques sont fausses

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$ pour tout entier n .

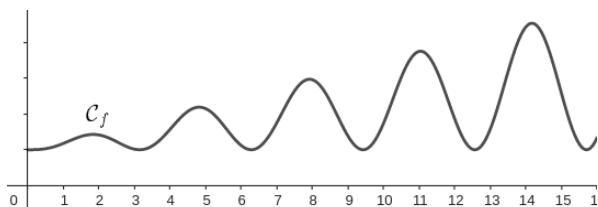
- i) Si f est une fonction monotone sur $\mathbb{R}^+$ alors $\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite monotone} \\ \text{(de même sens de variation que } f \text{)} \end{cases}$
- ii) Si f est une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée
- iii) Si f est une fonction minorée sur $\mathbb{R}^+$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minorée
- iv) Si f tend vers une limite l en $+\infty$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l



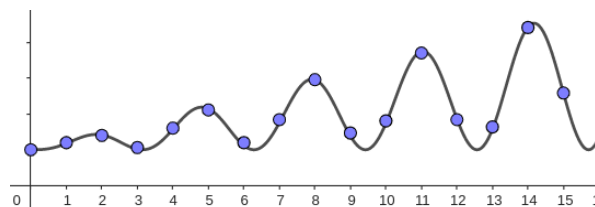
exemple 9:

- La suite (n^2) est une suite croissante car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$
- La suite $(\arctan n)$ est bornée car la fonction arctan est bornée (sur $\mathbb{R}^+$)

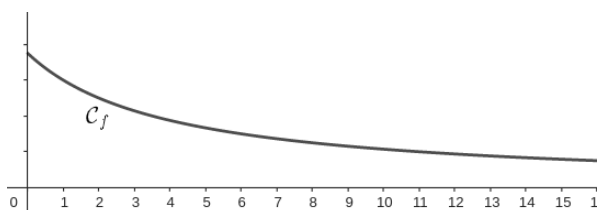
"Quand on connaît la courbe, on connaît les points..."



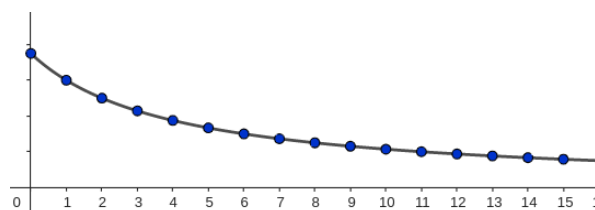
Quand on connaît la fx...



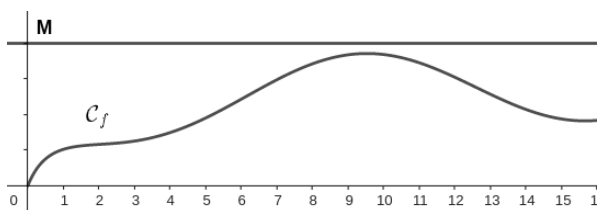
...on connaît la suite



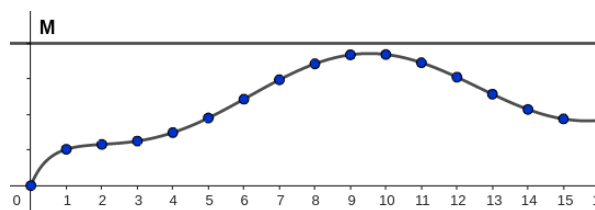
Quand la fx est décroissante...



...la suite est décroissante

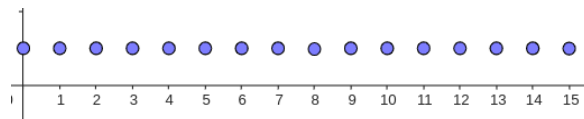
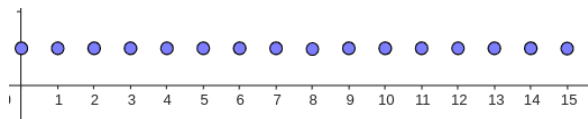
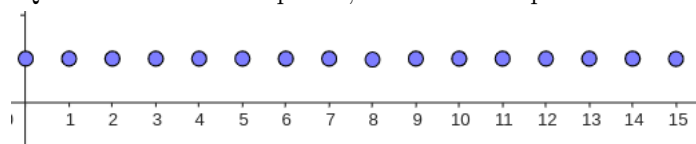


Quand la fx est majorée...



...la suite est majorée

Quand on connaît les points, on ne connaît pas la courbe!



7 Etude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (voir RDM)

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Attention cette fois! Les propriétés de la fonction f NE se transmettent PAS toutes à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$!

💡 théorème 15: intervalle stable par une fonction f et localisation de la suite

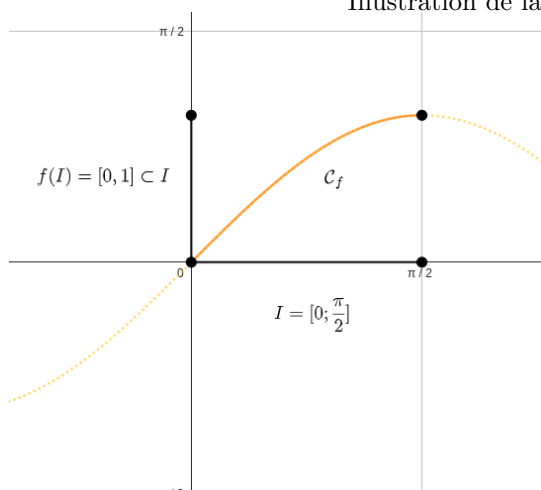
Soit I un intervalle **stable** par la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. (càd que $f(I) \subset I$).

Si $u_0 \in I$ alors $\begin{cases} \text{la suite donnée par la relation de récurrence } u_{n+1} = f(u_n) \text{ est bien définie} \\ \text{et l'on a même } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \end{cases}$

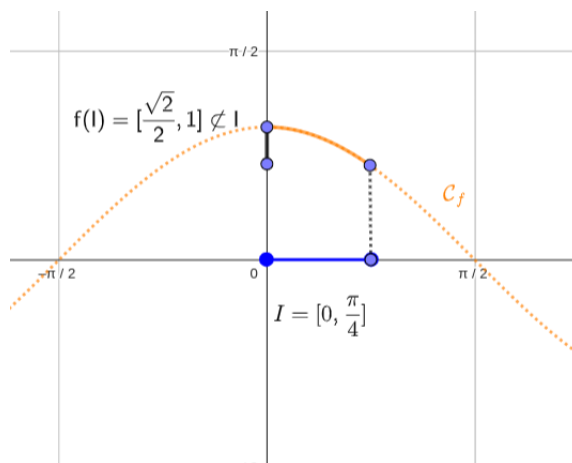
rem: si c'est seulement $u_{n_0} \in I$ alors $\forall n \geq n_0, u_n \in I$

rem: si I est bornée, on saura alors que la suite (u_n) l'est aussi;-)

Illustration de la notion d'intervalle stable

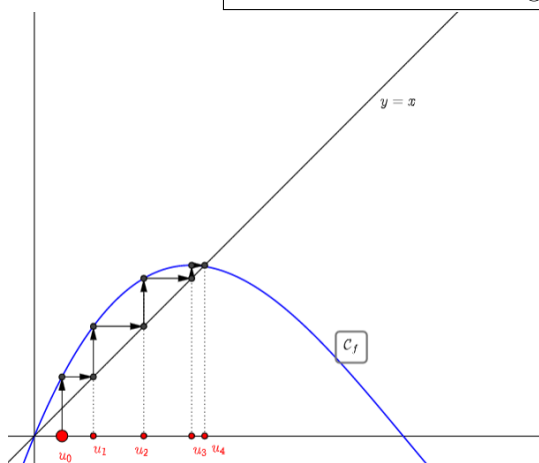


intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ stable par la fonction sin

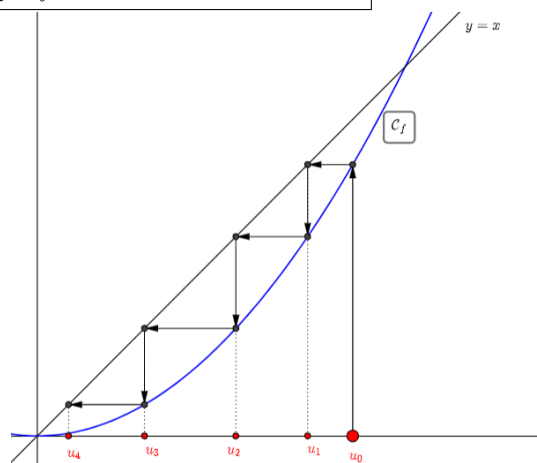


intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ NON stable par la fonction cos

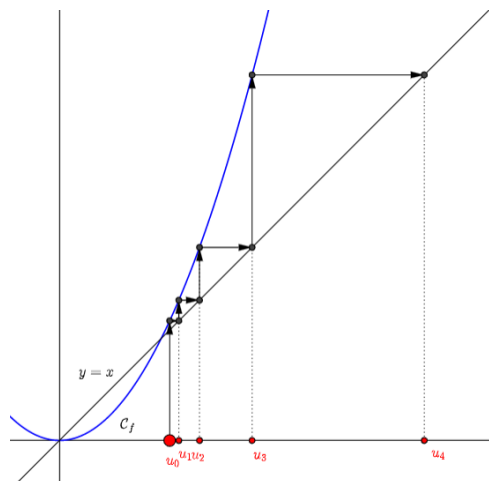
Des escaliers ou des escargots lorsque f est monotone sur I stable



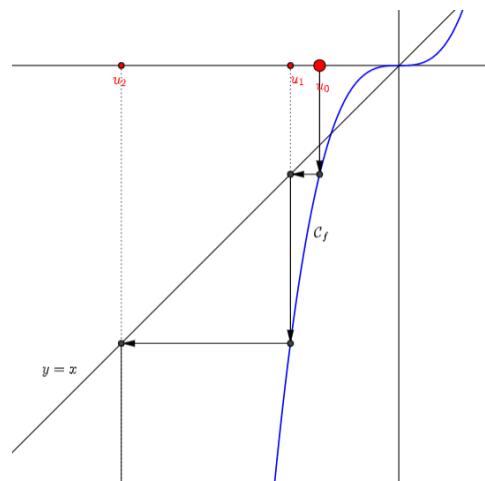
f croissante sur $I = [0, 2]$ stable
suite (u_n) croissante convergente



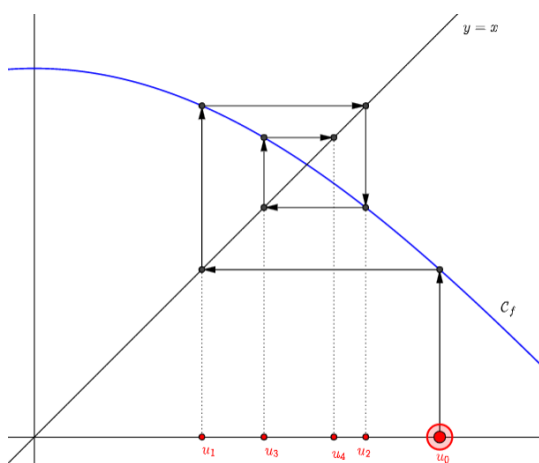
f croissante sur $I = [0, 5]$ stable
suite (u_n) décroissante convergente



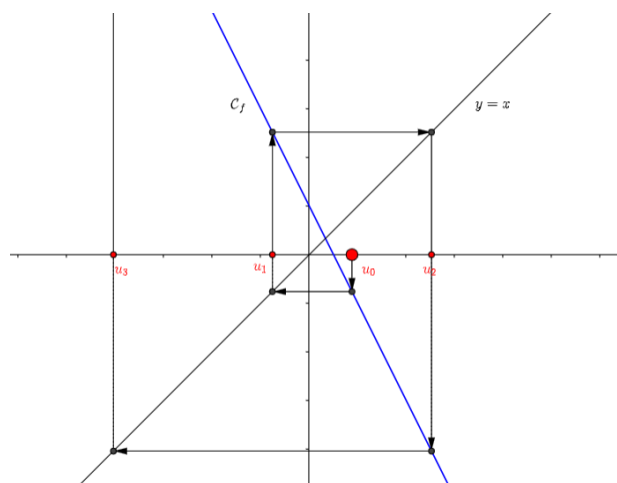
f croissante sur $I = [2, +\infty[$ stable
suite (u_n) croissante divergente



f croissante sur $I =]-\infty, -2]$ stable
suite (u_n) décroissante divergente



f décroissante sur $I = [0, 10]$ stable
suite (u_n) convergente
les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes



f décroissante sur $I = \mathbb{R}$ stable
suite (u_n) divergente
les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones,
l'une diverge vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$

8 Suites adjacentes

Il faut bien faire la différence entre la définition et le théorème!



définition 14: suites adjacentes

On dit que les deux suites réelles u et v sont adjacentes lorsque :

- i) u est une suite croissante.
- ii) v est une suite décroissante.
- iii) $\lim(u_n - v_n) = 0$

remarque 9 (Attention !)

Dire seulement que $\lim(u_n - v_n) = 0$ n'implique pas que $\lim u_n = \lim v_n$! Pourquoi?

Lorsque l'on écrit $\lim u_n = \lim v_n$ cela suppose que les (u_n) et (v_n) possèdent une limite, alors que lorsque l'on écrit $\lim(u_n - v_n) = 0$ on peut très bien avoir (u_n) et (v_n) qui ne possèdent pas de limite comme l'atteste l'exemple $u_n = v_n = (-1)^n$



théorème 16: théorème des suites adjacentes

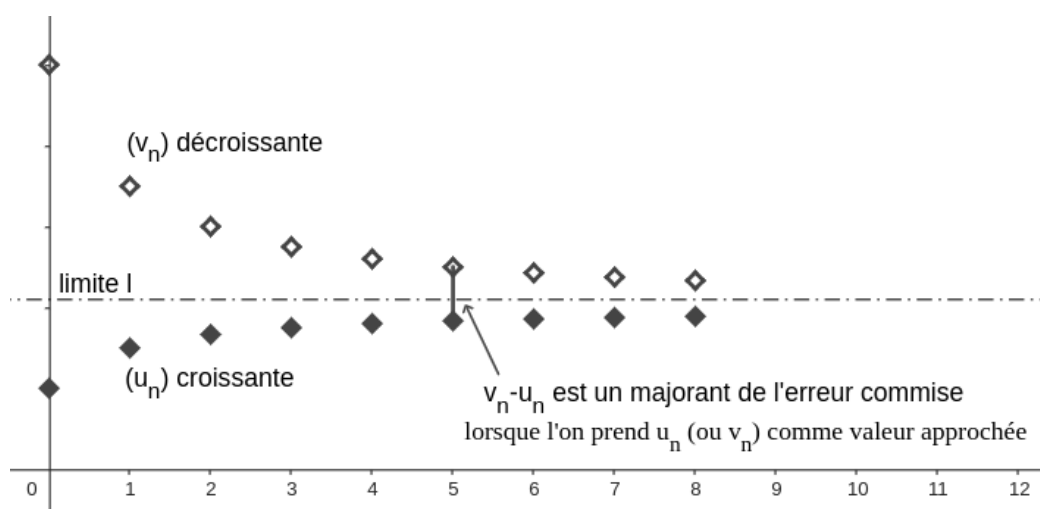
Si u et v sont deux suites adjacentes alors

- i) u et v sont deux suites convergentes, de même limite l
- ii) de plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lim u_n = l = \lim v_n \leq v_n$.

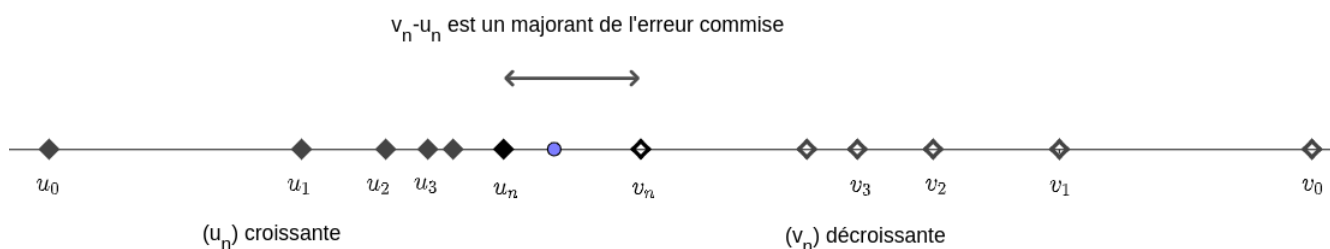
rem:

- u_n est une valeur approchée par défaut de l à $v_n - u_n$ près
- v_n est une valeur approchée par excès de l à $v_n - u_n$ près

représentation dans le plan



représentation sur un axe



9 Suites à valeurs complexes



définition 15: suite complexe

On appelle suite complexe toute fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

remarque 10

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ou encore $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes. Il s'agit d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Q: UNE SUITE COMPLEXE BORNÉE EST-ELLE MINORÉE ET MAJORÉE? NON!



définition 16: suite complexe bornée

On dit que la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsque la suite réelle positive $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée



définition 17: suite complexe convergente

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

- i) On dit que la suite u converge vers $l \in \mathbb{C}$ lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$
- ii) Dans le cas contraire, on dit que la suite u est divergente.



théorème 17:

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n , on note $x_n = \operatorname{Re}(u_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(u_n)$.

On a alors l'équivalence entre :

1. la suite complexe (u_n) converge vers $l = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. les suites réelles (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y .

rem: ce théorème précédent permet de ramener l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles.

exemple:

La suite complexe $u_n = n^2 - i \cdot \frac{1}{n}$ diverge car la suite $(\operatorname{Re}(u_n))$ est divergente

remarque 11

Si on pose $q = r \cdot e^{i\theta}$ on a alors $q^n = r^n \cdot e^{in\theta}$.

La suite des modules de q^n est une suite géométrique de raison $|q|$.

La suite des arguments de q^n est une suite arithmétique de raison θ

remarque 12

En revanche, comme le prouve le contre-exemple ci-dessous la proposition suivante est fausse :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite des modules et la suite des arguments convergent.

Soit la suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{\exp(in\pi)}{n}$.

Cette suite tend vers 0, la suite des modules tend vers 0, mais la suite des arguments n'est pas convergente!

10 Quelques démonstrations

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Par définition, ceci signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier n on a $|u_n| \leq M$.

Ce que l'on peut encore écrire $-M \leq u_n \leq M$.

Écrit sous cette forme, il est clair que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée; en effet, elle est minorée par $-M$ et elle est majorée par M .

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par définition, ceci signifie qu'il existe un réel m et un réel M

tels que pour tout entier n on a $m \leq u_n \leq M$.

On en déduit que pour tout entier n on a aussi $-M \leq -u_n \leq -m$

Comme $|u_n| = \max(u_n, -u_n)$, il est clair qu'en posant $M_1 = \max(-m, M)$ on a pour tout entier n l'inégalité $|u_n| \leq M_1$.

On vient de prouver que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

DÉMONSTRATION DE L'EXEMPLE 1 $i) \implies ii)$

1. On suppose que la suite est bornée à partir d'un certain rang.

On suppose ainsi $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$

- Considérons maintenant l'ensemble $U_{n_0} = \{u_n | n < n_0\} = \{u_n | n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket\}$.

Cet ensemble possède un nombre fini d'éléments réels (à savoir n_0): il possède donc un plus grand élément et un plus petit élément. Notons les respectivement M_{n_0} et m_{n_0}

- Notons maintenant $M = \max(M_{n_0}, l + 1)$ et $m = \min(m_{n_0}, l - 1)$

Avec ce choix on a $M \geq l + 1$ et $M \geq M_{n_0}$ ainsi que $m \leq l - 1$ et $m \leq m_{n_0}$

- Il est clair que l'on a $m \leq u_n \leq M$ pour tout entier n . En effet:

– ou bien $n < n_0$, et donc $m_{n_0} \leq u_n \leq M_{n_0}$

– ou bien $n \geq n_0$, et on a $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$

LEMME NÉCESSAIRE À LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit g une fonction **strictement croissante** de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Alors: $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) \geq n$

DÉMONSTRATION DU LEMME:

Soit g une fonction strictement croissante de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n : "g(n) \geq n"$

- initialisation: Comme g est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a forcément $g(0) \geq 0$.

- hérédité: on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \geq 0$ fixé quelconque.

Comme g est strictement croissante, on a $g(n + 1) > g(n)$.

Or par hypothèse de récurrence, on a $g(n) \geq n$. Par transitivité, cela donne $g(n + 1) > n$.

Comme g est à valeurs entières, dire que $g(n + 1) > n$ équivaut à dire que $g(n + 1) \geq n + 1$.

On a donc montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

- conclusion: par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \geq 0, g(n) \geq n$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers la limite l .

Soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{g(n)})$ une suite extraite.

- cas où $l = +\infty$. (On a donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$)

Soit A un réel quelconque fixé.

On peut affirmer, grâce à la définition, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq A$ pour $n \geq n_0$.

D'après le lemme, si $n \geq n_0$ alors g étant strictement croissante on a $g(n) \geq g(n_0) \geq n_0$ (la dernière inégalité provient du lemme).

On peut donc en déduire que si $n \geq n_0$ alors on a $v_n = u_{g(n)} \geq A$.

Au final, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \geq A$. (On reconnaît la définition de $\lim v_n = +\infty$)

- cas où $l \in \mathbb{R}$. (On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$)

Soit ε un réel strictement positif fixé.

On peut affirmer, grâce à la définition, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$.

D'après le lemme, si $n \geq n_0$ alors g étant strictement croissante on a $g(n) \geq g(n_0) \geq n_0$ (la dernière inégalité provient du lemme).

On peut donc en déduire que si $n \geq n_0$ alors on a $|v_n - l| = |u_{g(n)} - l| \leq \varepsilon$.

Au final, on a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n - l| \leq \varepsilon$ (On reconnaît la définition de $\lim v_n = l$)

- cas où $l = -\infty$

...

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.

On a donc $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ et ainsi à partir d'un certain rang $\frac{u_n}{v_n} > 0$.

Par conséquent u_n et v_n sont forcément de même signe à partir de ce rang

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes telles que $\lim v_n = l$

Pour n assez grand, on sait que $v_n \neq 0$ et on peut donc écrire

$$u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$$

Comme $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim v_n = l$, on a par les théorèmes généraux

$$\lim u_n = 1 \times l = l$$

- Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n & \text{pour } n \text{ assez grand} \\ u_n \sim w_n \end{cases}$

On peut donc écrire pour n assez grand (...)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Notons l sa limite.

- Par définition, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \varepsilon$
- En particulier pour $\varepsilon = 1$ (nombre strictement positif (pris au hasard) fixé), on peut affirmer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que pour tout entier n plus grand que n_0 on a $|u_n - l| \leq 1$, ou de manière équivalente, $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$
- Considérons maintenant l'ensemble $U_{n_0} = \{u_n | n < n_0\} = \{u_n | n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket\}$.
Cet ensemble possède un nombre fini d'éléments réels (à savoir n_0): il possède donc un plus grand élément et un plus petit élément. Notons les respectivement M_{n_0} et m_{n_0}
- Notons maintenant $M = \max(M_{n_0}, l + 1)$ et $m = \min(m_{n_0}, l - 1)$
Avec ce choix on a $M \geq l + 1$ et $M \geq M_{n_0}$ ainsi que $m \leq l - 1$ et $m \leq m_{n_0}$
- Il est clair que l'on a $m \leq u_n \leq M$ pour tout entier n . En effet:
 - ou bien $n < n_0$, et donc $m_{n_0} \leq u_n \leq M_{n_0}$
 - ou bien $n \geq n_0$, et on a $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 9

On suppose que $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$.

càd

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon \quad \text{avec } l > 0$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$$

Ceci est en particulier vrai pour $\varepsilon = \frac{l}{2}$, ce qui donne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{l}{2} \leq u_n \leq \frac{3l}{2}$$

et donc en particulier

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 < u_n$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Soit (u_n) une suite qui tend vers $l \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $i) \implies ii)$.

On suppose que la suite (u_n) converge vers l .

D'après le théorème 2, on sait que toute suite extraite de (u_n) converge alors vers l .

En particulier on a donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l

- Montrons que $ii) \implies i)$

On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l .

càd

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad (*)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon \quad (**)$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Notons $n_2 = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$.

Considérons maintenant $n \geq n_2$ et justifions que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

On envisage deux cas:

1. si n est pair, donc de la forme $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$
 Comme $n \geq n_2$, on en particulier $n \geq 2n_0$ donc $p \geq n_0$.
 D'après $(*)$ on sait alors que $|u_{2p} - l| \leq \varepsilon$ càd $|u_n - l| \leq \varepsilon$
2. si n est impair, donc de la forme $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$
 Comme $n \geq n_2$, on en particulier $n \geq 2n_1 + 1$ donc $p \geq n_1$.
 D'après $(**)$ on sait alors que $|u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$ càd $|u_n - l| \leq \varepsilon$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim u_n = l$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 15

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset I$.

Soit $u_0 \in I$.

Nous allons montrer par récurrence qu'il est possible de définir une suite par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Notons $\mathcal{P}_n$: " u_n est bien défini et $u_n \in I$ " pour $n \in \mathbb{N}$

- **initialisation:** $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie
- **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
 - . On a donc $u_n \in I$.
 - Comme la fonction f est définie sur I , on a $u_{n+1} = f(u_n)$ qui existe bien
 - Comme $f(I) \subset I$ et que $u_n \in I$, on a bien $u_{n+1} \in I$

On a bien montré qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 14

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$

i) On suppose que f est croissante [resp. décroissante] sur $\mathbb{R}^+$.

càd

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \text{ [resp. } f(x) \geq f(y)]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme $n \leq n+1$, on a donc $u_n = f(n) \leq f(n+1) = u_{n+1}$ [resp. $u_n \geq u_{n+1}$].

On a bien prouvé que (u_n) est une suite croissante [resp. décroissante]

ii) On suppose que f est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

càd

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) \leq M$$

Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ ("les entiers naturels sont des réels particuliers"), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n) \leq M$$

On a bien prouvé que (u_n) est une suite majorée

iii) On suppose que f est minorée sur $\mathbb{R}^+$.

càd

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) \geq m$$

Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ ("les entiers naturels sont des réels particuliers"), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n) \geq m$$

On a bien prouvé que (u_n) est une suite minorée

iv) On suppose que $\lim_{+\infty} f = l \in \mathbb{R}$.

càd

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geq A, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Notons $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$.

Par ce choix, lorsque l'entier n est supérieur à n_0 , on a $n \geq A$, et donc $|f(n) - l| \leq \varepsilon$.

On a donc montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On a bien prouvé que $\lim u_n = l$