

C1 - INTEGRATION I

rappels de sup'

Table des matières

1	La base? L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment!	2
2	Primitives d'une fonction continue sur un intervalle	4
3	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	7
3.1	Propriétés	8
3.2	parité, périodicité et intégrale	12
3.3	Intégration par parties	13
3.4	Changement de variables	13
3.5	Formules de Taylor	14
3.6	Sommes de Riemann / méthode des rectangles	16
4	Annexe: changements de variables classiques (hors-programme)	17
5	Intégrales faussement généralisées	18

- Dans tout ce résumé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
- On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.
- **En intégration, la notion de segment est fondamentale.**
- Ce polycopié ne traite QUE des intégrales de fonctions CONTINUES sur un SEGMENT
- *On verra plus tard comment donner un sens à des intégrales de fonctions continues sur un intervalle qui NE sera PAS un SEGMENT*
- Rappelons un théorème où l'on a déjà rencontré les notions de continuité et de segment



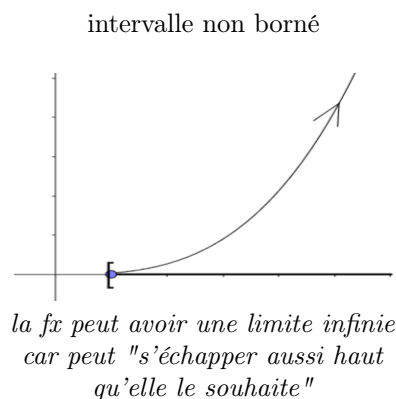
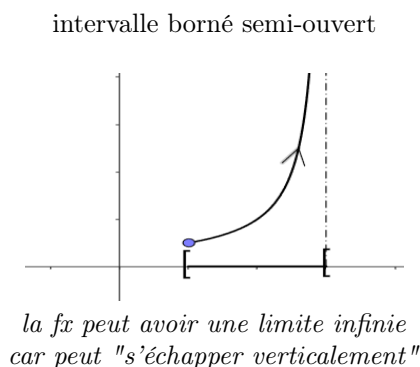
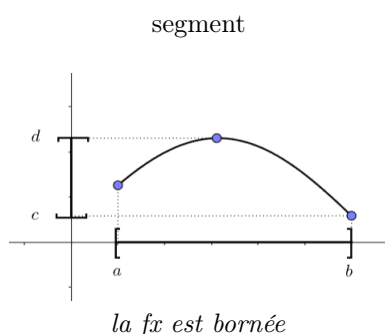
théorème 1: théorème des bornes atteintes

L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment.

autrement dit

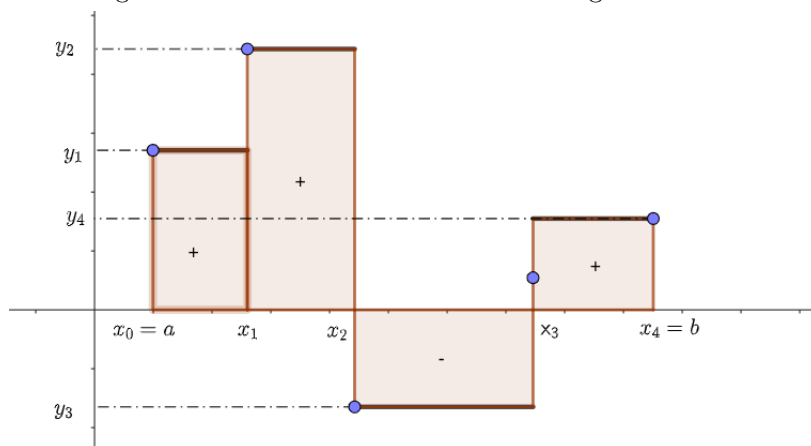
Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $c \leq d$ deux réels tels que $f([a,b]) = [c,d]$

Ceci signifie également que toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes



1 La base? L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment!

- Au début, on a défini l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment



Par définition, l'intégrale sur le segment $[a, b]$ de cette fonction f est la somme algébrique des aires des rectangles ci-dessus, c'à d

$$\int_{[a,b]} f = y_1 \cdot (x_1 - x_0) + y_2 \cdot (x_2 - x_1) + y_3 \cdot (x_3 - x_2) + y_4 \cdot (x_4 - x_3) = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- On peut ensuite définir l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ de la manière suivante:
(On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$)
 - ✓ On commence par établir un résultat qui permet d'encadrer f par deux fonctions en escalier aussi précisément que souhaitée

💡 théorème 2: à ne pas mémoriser

Soit $f \in C^0([a, b])$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (g, h) \in \mathcal{E}([a, b])^2, \quad g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad 0 \leq h - g \leq \varepsilon$$

- ✓ Puis on considère l'ensemble des valeurs des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f

$$I_{inf} = \left\{ \int_{[a,b]} g \mid g \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ et } g \leq f \right\}$$

ainsi que l'ensemble des valeurs des intégrales des fonctions en escalier qui majorent f

$$I_{sup} = \left\{ \int_{[a,b]} h \mid h \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ et } f \leq h \right\}$$

- ✓ On peut alors définir l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ grâce au théorème suivant

💡 théorème 3: à ne pas mémoriser

Avec les notations précédentes, on a

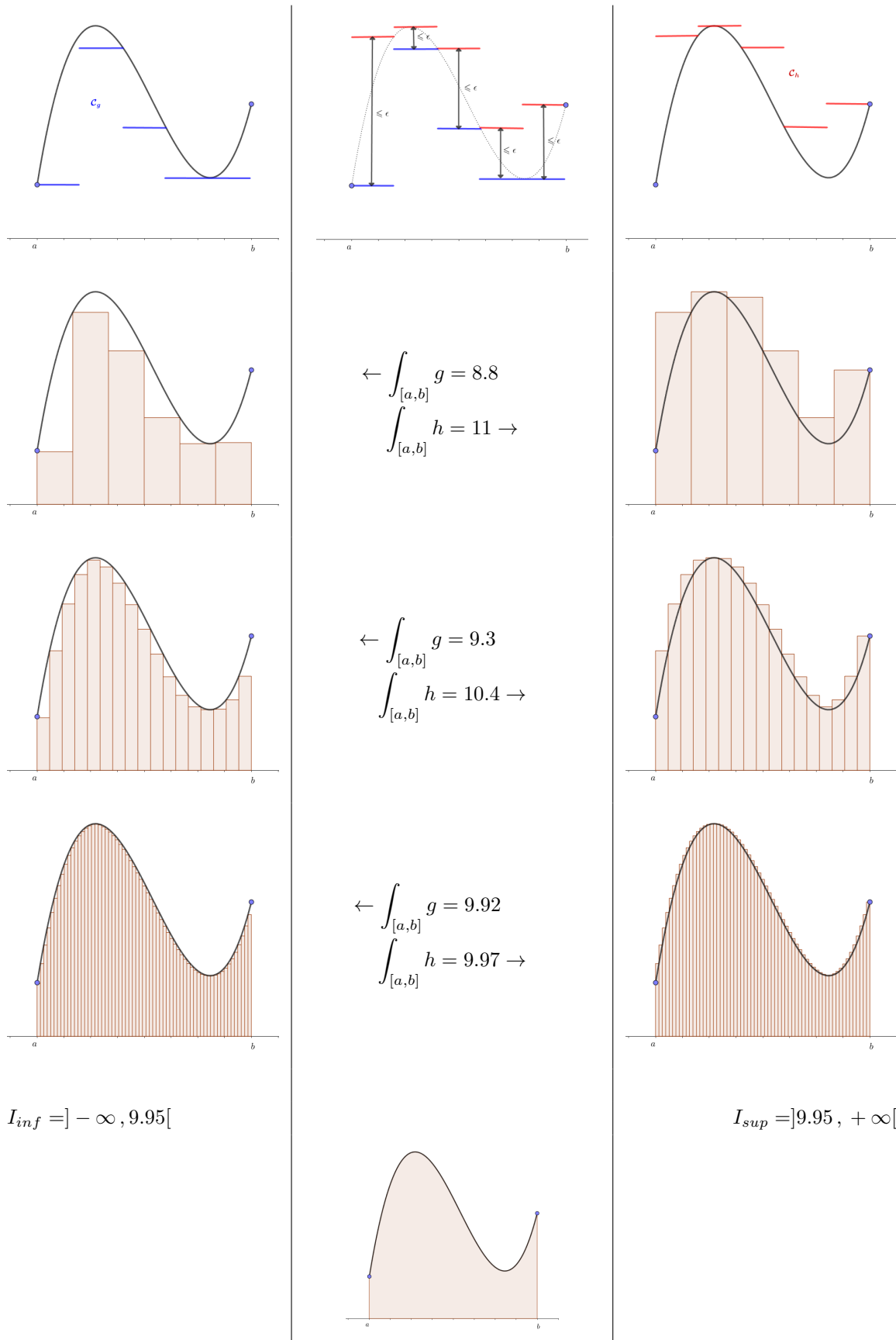
$$\sup(I_{inf}) = \inf(I_{sup})$$

On appelle *intégrale de f sur le segment $[a, b]$* cette valeur commune

On comprend que calculer une primitive de cette manière est inenvisageable...

Heureusement le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE et le THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL nous permettent de calculer une intégrale simplement à l'aide de primitives, et c'est en cela qu'ils sont fondamentaux: ils établissent le lien entre intégration et dérivation!

- Ci-dessous, une fonction f continue sur sur segment $[a,b]$, et diverses fonctions en escaliers g et h qui respectivement minorent et majorent f



- On a bien

$$\sup(I_{inf}) = \inf(I_{sup}) = 9.95 \quad \text{et donc on pose} \quad \int_{[a,b]} f = 9.95$$

2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Q: QU'EST-CE QU'UNE PRIMITIVE?



définition 1: primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

On écrit alors $F' = f$



théorème 4: théorème fondamental de l'analyse

Soient:

- I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I
- f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors:

- i) La fonction
$$\boxed{\begin{array}{ccc} F_{x_0} : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_{x_0}^x f(t) dt \end{array}}$$
 est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0 .

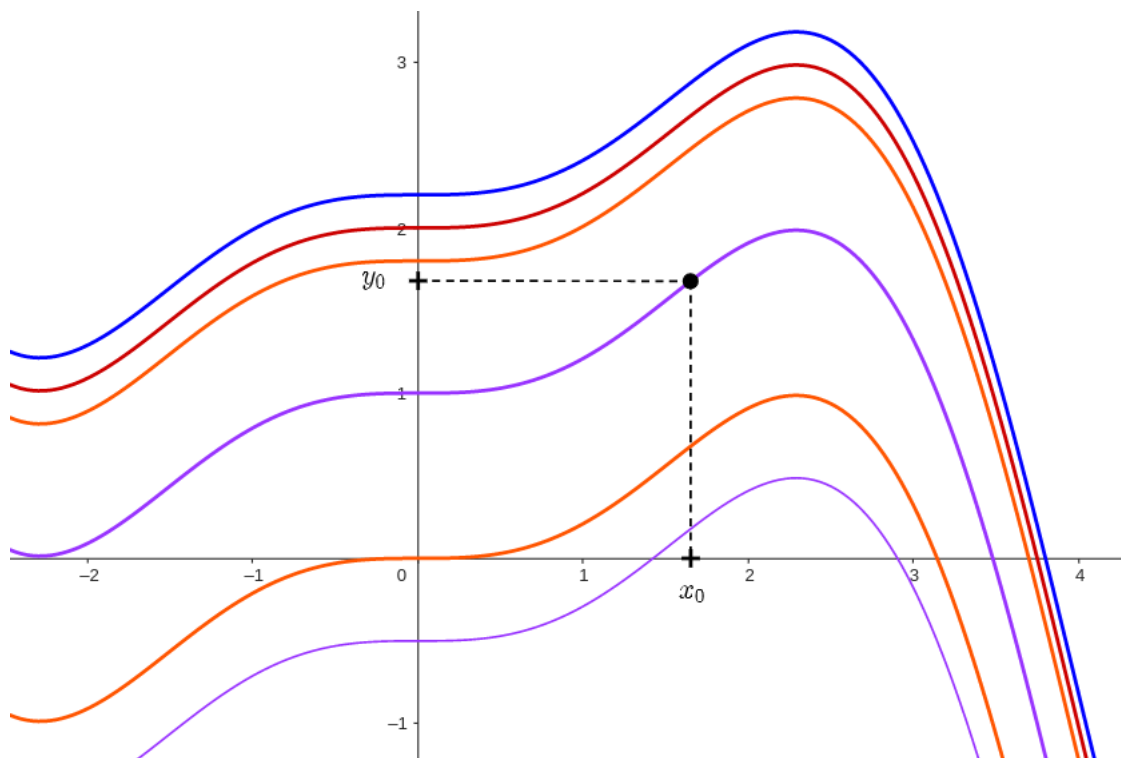
c'est à dire que $F'_{x_0} = f$ et que $F_{x_0}(x_0) = 0$

- ii) f possède une infinité de primitives sur I , égales à une constante près.
à savoir les fonctions $F_{x_0} + Cste$

- iii) pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$
c'est la fonction $x \in I \mapsto F_{x_0}(x) + y_0$

C'est le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE que l'on doit invoquer pour justifier l'existence d'une primitive

"Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle"



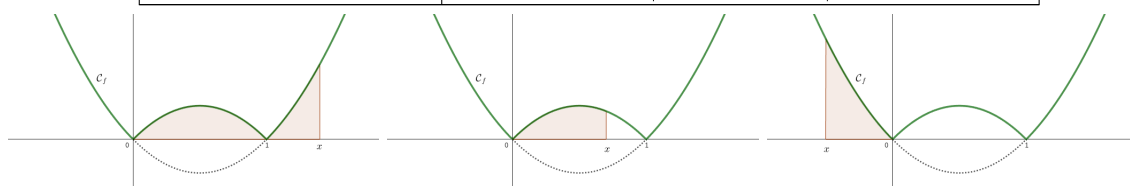
SUR UN INTERVALLE I , LES COURBES DES PRIMITIVES D'UNE MÊME FONCTION DESSINENT UN 'MILLEFEUILLE'
PAR TOUT POINT $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, IL PASSE UNE ET UNE SEULE COURBE

☀ exemple 1: primitive d'une fonction avec une valeur absolue

- La fonction $f : t \mapsto |t(t-1)|$ est **continue sur $\mathbb{R}$** , donc possède des primitives sur $\mathbb{R}$.
- Notons F l'une d'elles, par exemple celle qui s'annule en 0

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x |t.(t-1)| dt$$

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
signe de $t(t-1)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$t(t-1)$	0	$-t(t-1)$	0	$t(t-1)$



- On envisage trois cas pour le calcul

i) si $x \in [0, 1]$

$$F(x) = \int_0^x -t.(t-1)dt = \int_0^x t - t^2 dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

ii) si $x \in]-\infty, 0]$

$$F(x) = \int_0^x t.(t-1)dt = \int_0^x t^2 - t dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

iii) si $x \in]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 -t.(t-1)dt + \int_1^x t.(t-1)dt && \text{relation de Chasles} \\ &= \int_0^1 t - t^2 dt + \int_1^x t^2 - t dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

- Comme les primitives d'une fonction sur un intervalle sont égales à une constante près, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} + C & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

théorème 5: autre formulation du théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

rem: comme f est C^1 alors f' est C^0

exemple 2: la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est par définition l'unique primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en un.

On a donc

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

exemple 3:

On considère la fonction
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2} \end{array}$$

(il est bon de savoir que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc possède des primitives sur cet intervalle, mais qu'il n'existe pas d'expression de ces primitives à l'aide des fonctions usuelles!)

En particulier, ce n'est pas $x \mapsto \frac{e^{x^2}}{2x}$ (!)

Déterminer, à l'aide d'une expression intégrale, la primitive de f sur $\mathbb{R} \dots$

i) ... qui s'annule en π ii) ... qui vaut 3 en π iii) ... qui vaut π en 3

méthode 1: notations des primitives (rappel: $\int f(t)dt$ N'a PAS de sens!)

f étant une fonction continue sur un intervalle I , on note souvent :

i) $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ la primitive de f sur I qui s'annule en x_0

exemple: la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$ est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$,
elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 2, et c'est la fonction

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{2dt}{1-t^2} = \ln|1+x| - \ln|1-x| - (\ln 3 - \ln 1) = \ln(1+x) - \ln(x-1) - \ln 3$$

ii) $\int f(t)dt$ la primitive générique de f sur I

$$\text{exemple: } \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} dt = \ln|1+x| - \ln|1-x| + cste$$

Il est toujours recommandé de donner un nom aux fonctions que l'on considère

remarque 1 (il faut bien faire la différence entre primitive et intégrale)

- une primitive est une FONCTION alors qu'une intégrale est un SCALAIRE

3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Q: UNE INTÉGRALE EXISTE-T-ELLE TOUJOURS?

théorème 6: théorème fondamental du calcul intégral

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors:

- i) l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ existe, càd $\int_a^b f$ existe.
- ii) et l'on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a, b]$

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours.

Pour justifier qu'une intégrale NON généralisée existe, on écrit au choix

- "une fonction CONTINUE sur un SEGMENT est intégrable* sur ce segment".
- "la fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[a, b]$ donc $\int_{[a, b]} f$ existe"

**rem: on verra plus tard une définition plus générale de 'intégrable sur un intervalle'*

exemple 4: justification de l'existence d'une intégrale

- i) $\int_1^2 \sin(t^2) dt$ existe car la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ est CONTINUE sur le SEGMENT $[1, 2]$
- ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_x^{2x} \sin(t^2) dt$ existe car la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ est CONTINUE sur le SEGMENT $[x, 2x]$ (ou $[2x, x]$ si $x < 0$)

théorème 7: autre formulation du théorème fondamental du calcul intégral

Soit I un intervalle, et f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors:

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f \text{ existe et } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

où F désigne une primitive quelconque de f sur I

rem: en se fixant a et b dans L'INTERVALLE I , l'intégrale est définie sur le SEGMENT $[a, b]$

- L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours... contrairement à l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque! (voir polycopié 'Intégrales généralisées')
- Si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,
l'intégrale de f sur $[a, b]$ est notée $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$
- Lorsque $a > b$, la notation $\int_{[a, b]} f$ n'a pas de sens mais les notations $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f$ ont sens, car par définition, on pose

$$\int_a^b f = - \int_b^a f = - \int_{[b, a]} f$$

- dans une intégrale, la variable est muette: elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. D'où:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\theta) d\theta = \int_a^b f(\zeta) d\zeta = \dots$$

3.1 Propriétés

💡 théorème 8: linéarité de l'intégrale

L'application $\begin{array}{ccc} C^0([a,b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t) dt \end{array}$ est une application linéaire.

c'est à dire:

l'application qui à une fonction associe son intégrale sur un segment donné est une application linéaire
Ce théorème est souvent utilisé sans le citer dans les calculs, c'est lui qui nous permet d'écrire

$$\forall (f, g) \in (C^0([a,b], \mathbb{K}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

💡 théorème 9: positivité et croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$ (avec ici $a \leq b$). Alors:

- i) Si $f \geq 0$ alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$ POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE
- ii) Si $f \geq g$ alors $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$ CROISSANCE DE L'INTÉGRALE

rem: pour le i), on dit encore que "l'intégrale d'une fonction positive est positive"

rem: à noter que la réciproque est fausse; ce n'est pas parce que l'intégrale d'une fonction est positive que la fonction est nécessairement positive.

démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$

- Comme f est continue sur $[a, b]$, on sait que f possède une primitive sur ce segment, notons la F .
 Sur l'intervalle $[a, b]$, on a $F' = f \geq 0$.
 La fonction F est donc croissante (au sens large) sur l'intervalle $[a, b]$.
- Par définition d'une fonction croissante,
 comme $a \leq b$ on a $F(a) \leq F(b)$,
 et donc $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0$

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f \geq g$.

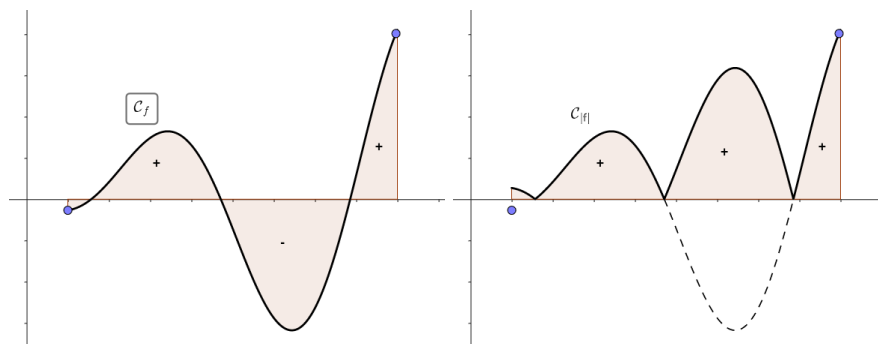
- Notons $h = f - g$.
 h est continue sur $[a, b]$ (car différence de 2 fonctions continues) et positive.
 D'après le point précédent, on peut affirmer que $\int_a^b h \geq 0$ càd $\int_a^b f - g \geq 0$
- Par linéarité de l'intégrale, on a $\int_a^b f - g = \int_a^b f - \int_a^b g$
 On a ainsi prouvé que $\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$ càd $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

💡 théorème 10: inégalité triangulaire intégrale

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors

- i) $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$
- ii) En notant $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$ on a $m \cdot (b - a) \leq \int_{[a,b]} f \leq M \cdot (b - a)$

- illustration du i)



- ✓ lorsque l'on calcule (à gauche) $\left| \int_a^b f \right|$, on calcule la somme des aires algébriques et on prend ensuite la valeur absolue de cette somme
- ✓ lorsque l'on calcule (à droite) $\int_a^b |f|$, on calcule la somme des aires toutes comptées positivement
- ✓ on peut penser à l'inégalité triangulaire $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$

démonstration:

Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$

- ✓ Comme f et la fonction valeur absolue sont continues, par composition $|f|$ est continue sur $[a,b]$
- ✓ Comme $f \leq |f|$, on a par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

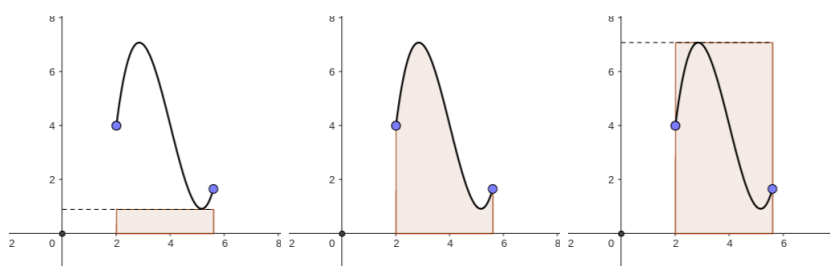
- ✓ Comme $-f \leq |f|$, on a par croissance de l'intégrale

$$-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

- ✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, -x)$.
On a donc

$$\left| \int_a^b f \right| = \max\left(-\int_a^b f, \int_a^b f\right) \leq \int_a^b |f|$$

- illustration du ii)



démonstration:

Par définition de m et M , on a

$$\forall t \in [a,b], m \leq f(t) \leq M$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{[a,b]} m \cdot dt \leq \int_{[a,b]} f(t) dt \leq \int_{[a,b]} M \cdot dt$$

ce qui donne

$$m \cdot (b-a) \leq \int_{[a,b]} f(t) dt \leq M \cdot (b-a)$$



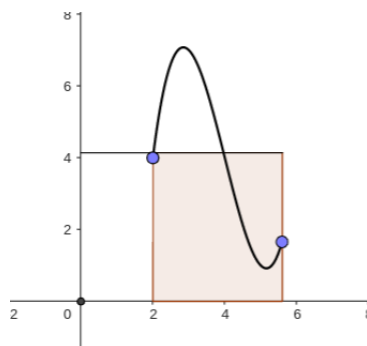
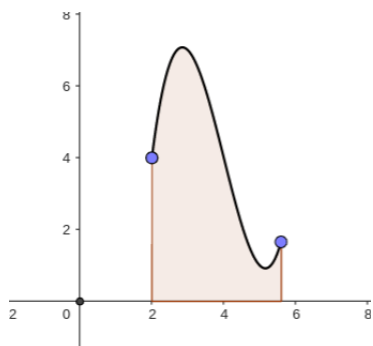
définition 2: valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$ le scalaire suivant :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

rem: on rappelle que le théorème dit de "l'égalité de la moyenne" permet d'affirmer que si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ | $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$



Les aires sous les deux courbes sont égales



théorème 11: théorème de nullité de l'intégrale

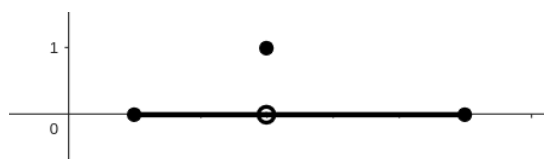
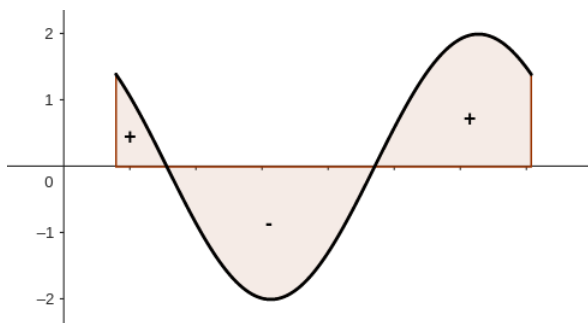
Soit f une fonction CONTINUE et de SIGNE CONSTANT sur le segment $[a,b]$, avec $a < b$

Si $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$

rem: les hypothèses "continue" et "de signe constant" sont indispensables!

rem: " f est nulle sur $[a,b]$ " signifie que $\forall t \in [a,b], f(t) = 0$ (on dit encore que " f est identiquement nulle que $[a,b]$ ")

- Les conditions DE SIGNE CONSTANT ET CONTINUE NE sont PAS superflues!!



- ✓ à gauche, la fonction est continue mais de signe NON constant: la somme des aires algébriques vaut zéro et la fonction N'est PAS identiquement nulle
- ✓ à droite, la fonction est de signe constant(positive) mais NON continue: l'aire est nulle et la fonction N'est PAS identiquement nulle

• démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$ telle que $\int_{[a,b]} f = 0$ avec $a < b$

On reprend les notations de la démo précédente.

Comme $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, on a donc $F(a) = F(b)$

Ainsi la fonction F est croissante sur $[a,b]$ avec $F(a) = F(b)$: on peut affirmer que F est constante sur $[a,b]$.

On a alors la dérivée de F qui est forcément nulle sur $[a,b]$,

càd $\forall t \in [a,b], f(t) = F'(t) = 0$: f est bien identiquement nulle sur $[a,b]$

théorème 12: seconde version du théorème de nullité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$, avec $a < b$

Si $\int_a^b |f(t)|dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$

démonstration:

Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $\int_a^b |f(t)|dt = 0$

- La fonction $|f|$ est continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, on peut affirmer que

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| = 0$$

ce qui équivaut bien à

$$\forall t \in [a,b], f(t) = 0$$

exemple 5: important dans la pratique, rédaction à adopter

Montrer que $I = \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})dt$ existe et est STRICTEMENT positive.

- La fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0, \pi^2]$ à valeurs dans $[0, \pi]$
- La fonction $\sin$ est continue de $[0, \pi]$ à valeurs dans $[0, 1]$
- Par composition, on peut donc affirmer que la fonction $f : t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ est CONTINUE sur $[0, \pi^2]$ à valeurs dans $[0, 1]$ (donc POSITIVE) et NON IDENTIQUEMENT NULLE car $f(\pi^2/4) = 1$
- Par théorème, on peut donc affirmer que $I = \int_0^{\pi^2} f(t)dt > 0$

Dans ce raisonnement, on utilise à la fois la propriété de positivité de l'intégrale (qui permet d'affirmer que $I \geq 0$) puis la contraposée de l'implication du théorème de la nullité de l'intégrale.

exemple 6:

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(t)dt = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

théorème 13: Relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I, \mathbb{K})$

i) $\forall (a,b,c) \in I^3$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

ii) $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt$$

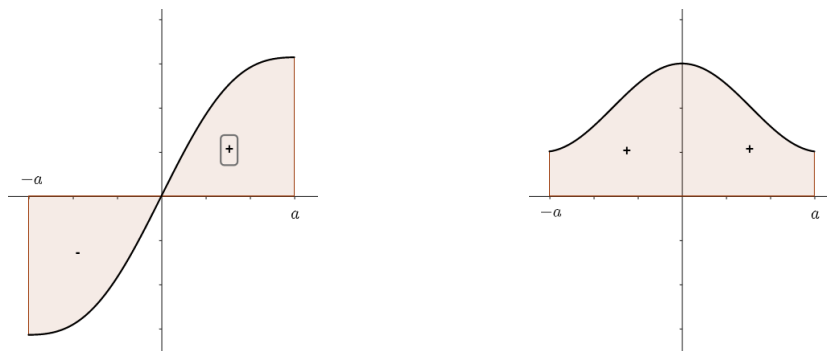
3.2 parité, périodicité et intégrale

💡 théorème 14: parité et intégrale

Soit f une fonction continue sur le segment $[-a, a]$

i) Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

ii) Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \cdot \int_0^a f(t)dt$



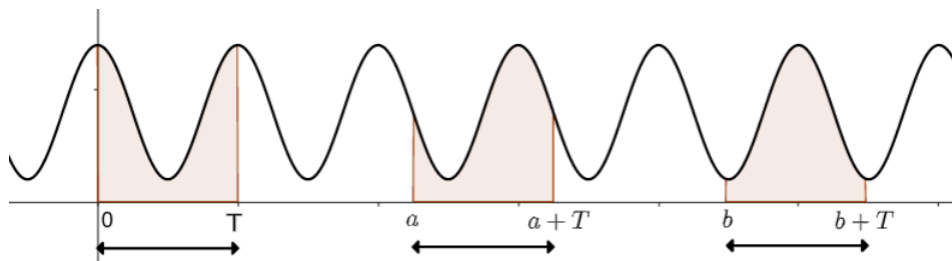
💡 théorème 15: périodicité et intégrale

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T .

Alors

pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

rem: en particulier la valeur moyenne d'une fonction périodique sur une période est indépendante du choix de l'intervalle d'intégration



☀ exemple 7: fonctions périodiques

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique.

Montrer que si de plus f est paire [resp. impaire] alors $\int_0^T f = 2 \int_0^{T/2} f$ [resp. $\int_0^T f = 0$]

3.3 Intégration par parties

Q: LA FORMULE DE DÉRIVATION D'UN PRODUIT DONNE-T-ELLE UNE FORMULE POUR LES INTÉGRALES?

théorème 16: intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I . Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

exemple 8: primitive de arcsin

- La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, +1]$: elle possède donc une primitive sur cet intervalle.
- Nous allons déterminer une primitive de arcsin. . . mais attention! arcsin est de classe C^1 sur $] -1, +1[$ uniquement!
- Sur l'intervalle $] -1, +1[$, on pose $u(t) = t$ (et donc $u'(t) = 1$) et $v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (et on choisit $v(t) = \arcsin t$), u et v sont bien C^1 sur $] -1, +1[$

la formule d'intégration par parties donne

$$\int^x \arcsin(t)dt = x \cdot \arcsin(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x \cdot \arcsin(x) - \frac{1}{2} \int^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \text{ste}$$

rem: cette formule n'est valable, a priori, que sur $] -1, +1[$
mais l'on peut montrer qu'elle est aussi valable sur $[-1, +1]$

3.4 Changement de variables

Q: Y A-T-IL UN THÉORÈME QUE JE PEUX NE PAS MÉMORISER?

théorème 17: changement de variable (appellation peu adaptée en fait)

Soient $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $\phi \in C^1([c,d], I)$. Alors :

$$\int_c^d f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du = \int_a^b f(t) dt \text{ où } a = \phi(c) \text{ et } b = \phi(d)$$

Si F désigne une primitive de f alors la fonction $F \circ \phi$ est une primitive de la fonction $\phi' \times f \circ \phi$
Il s'agit juste de reconnaître ou de faire apparaître la dérivée d'une fonction composée

démonstration

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $\phi \in C^1([c,d], I)$

- On a $[c,d] \xrightarrow{\phi} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ donc la composée $f \circ \phi$ est bien définie sur $[c,d]$
- La fonction $f \circ \phi$ est continue sur $[c,d]$ comme composée de fonctions continues.
La fonction ϕ' est continue sur $[c,d]$ car ϕ est C^1 sur $[c,d]$.

Ainsi la fonction $\phi' \cdot (f \circ \phi)$ est continue sur le segment $[c,d]$ et donc l'intégrale $\int_c^d f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du$ existe

- Notons F une primitive de f sur I ,
la fonction $F \circ \phi$ est alors une primitive de la fonction $\phi' \times f \circ \phi$ sur l'intervalle $[c,d]$. D'où:

$$\int_c^d f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du = \int_c^d (F \circ \phi)'(u) du = [F \circ \phi(u)]_c^d = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

remarque 2

- Noter que ϕ n'est pas nécessairement bijective dans le théorème 17.
(en revanche, on verra que les changements de variables dans les intégrales généralisées devront forcément être bijectifs)

$$\int_0^{3\pi} \arctan(\sin u) \cdot \cos u \, du = \int_0^0 \arctan t \, dt = 0 \text{ (on a posé } t = \sin u \text{)}$$

(il faut juste s'assurer que ϕ est C^1 sur $[c, d]$, ce qui est le cas de la fonction $\sin$ sur $[0, 3\pi]$)
(on n'aurait pas pu poser $u = \tan t$ car la fonction $\tan$ n'est pas définie et continue sur $[0, 3\pi]$)

- Mais, tout de même, dans la pratique, on considère souvent des changements de variables bijectifs!
- voir l'annexe 1 pour les changements de variables classiques... mais hors-programme.

exemple 9:

Calculer $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)}$ de deux manières différentes

- i) Le changement de variable $u = \operatorname{sh}(t)$ est de classe C^1 , avec $du = \operatorname{ch}(t).dt$.
Cela donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2 t} dt = \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{1 + \operatorname{sh}^2(t)} dt = \int_0^{\operatorname{sh} x} \frac{du}{1 + u^2} = [\arctan(u)]_0^{\operatorname{sh} x} = \arctan(\operatorname{sh} x)$$

- ii) Le changement de variable $u = e^t$ est de classe C^1 , avec $du = e^t . dt$.
Cela donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int_0^x \frac{2dt}{e^t + e^{-t}} = \int_0^x \frac{2e^t dt}{e^{2t} + 1} = \int_1^{e^x} \frac{2du}{u^2 + 1} = [2 \arctan(u)]_1^{e^x} = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$$

- iii) On vient de prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(\operatorname{sh} x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$

3.5 Formules de Taylor

théorème 18: formule de Taylor avec reste intégral

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

pour tous a et b éléments de I , on a
$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Dans le cas où $n = 0$, la formule donne $\text{si } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ alors on a } f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$

la démonstration se réalise par récurrence sur n .

• initialisation:

Soit f une fonction de classe C^1 sur I

La fonction f' possède comme primitive la fonction f (!)

On a donc $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ soit $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$

(ce qui correspond à la relation cherchée pour $n = 0$)

• hérédité: on suppose le relation vraie pour un $n \geq 0$ fixé quelconque

Soit $f \in C^{n+2}(I, \mathbb{K})$.

On a donc a fortiori $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et d'après l'hypothèse de récurrence

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (*)$$

On réalise une IPP sur l'intégrale $\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ en posant: $\begin{cases} u(t) = \frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1} & \text{et donc } u'(t) = (b-t)^n \\ v(t) = f^{(n+1)}(t) & \text{et donc } v'(t) = f^{(n+2)}(t) \end{cases}$

On aura donc pour le crochet

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= [u(t)v(t)]_a^b + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

en reportant dans (*) cela donne

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$



corollaire 1: inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ainsi que a et b deux réels de l'intervalle I .

Notons $M = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

On a alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M \cdot |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

démonstration dans le cas où $a \leq b$

On a d'après la formule de Taylor avec reste intégral puis l'inégalité triangulaire intégrale

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{n!} \int_a^b |(b-t)^n f^{(n+1)}(t)| dt$$

Or pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$|(b-t)^n f^{(n+1)}(t)| = |b-t|^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| \underbrace{\leq}_{\text{car } b-t \geq 0} (b-t)^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| \leq M \cdot (b-t)^n$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b |(b-t)^n f^{(n+1)}(t)| dt \leq \int_a^b (b-t)^n \cdot M dt = M \cdot \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{M}{n+1} \cdot (b-a)^{n+1}$$

Par transitivité de $\leq$, on obtient

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{1}{n!} \int_a^b |(b-t)^n f^{(n+1)}(t)| dt \leq \frac{M}{n!(n+1)} (b-a)^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

3.6 Sommes de Riemann / méthode des rectangles

💡 théorème 19: sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors les sommes de Riemann de f convergent vers $\int_{[a,b]} f$.

C'est à dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$$

rem: la quantité $h = \frac{b-a}{n}$ s'appelle le PAS DE LA SUBDIVISION, il s'agit de la base commune des rectangles utilisés pour approximer l'aire sous la courbe

rem: très souvent, on note $x_k = a + i.h = x_{k-1} + h$

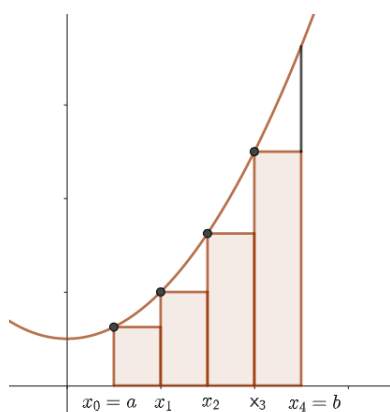
rem: dans le cas où f est monotone sur $[a, b]$, les sommes précédentes encadrent l'intégrale

rem: dans le cas particulier où $[a, b] = [0, 1]$, on a les formules

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$$

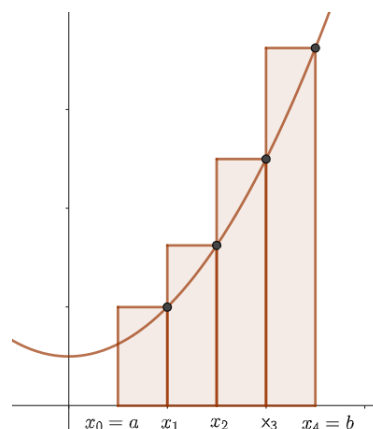
et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$$



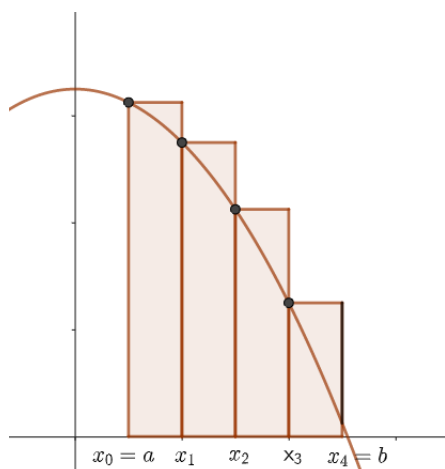
$\frac{b-a}{4}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$
"somme de Riemann gauche"

elle minore $\int_a^b f$ lorsque f croissante

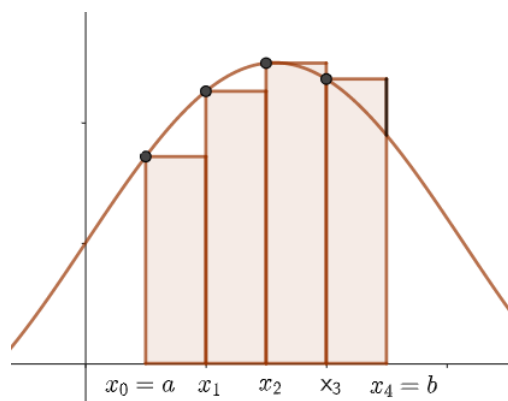


$\frac{b-a}{4}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$
"somme de Riemann droite"

elle majore $\int_a^b f$ lorsque f croissante



"somme de Riemann gauche"
elle majore $\int_a^b f$ lorsque f décroissante



"somme de Riemann gauche"
fonction NON monotone

exemple 10: très classique

Déterminons $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \right)$

rem: il est intéressant de noter sur cet exemple que tous les termes de la somme tendent vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$ mais que pour autant la somme ne tendra pas vers zéro ...

cela provient du nombre de termes dans la somme qui augmente avec n (!)

exemple 11:

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{2i\pi}{n}$

Bonus: montrer qu'en fait on a $\sum_{i=1}^n \sin \frac{2i\pi}{n} = 0$ pour tout $n \geq 1$ (!)

remarque 3

Dans les formules des sommes de Riemann, il y a $\sum_{i=0}^{n-1}$ et $\sum_{i=1}^n$ car on peut donner un sens géométrique à ces quantités. Cependant les formules sont encore exactes avec $\sum_{i=1}^{n-1}$ ou $\sum_{i=0}^n$ ou $\sum_{i=0}^{n-2}$ ou ...

démonstration:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Avec les notations du théorème

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{b-a}{n} \cdot f(x_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{b-a}{n} \cdot f(b) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt + 0$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - \frac{b-a}{n} \cdot f(x_0) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - \frac{b-a}{n} \cdot f(a) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt + 0$$

4 Annexe: changements de variables classiques (hors-programme)

- polynômes en $\sin t$ et $\cos t$: on se ramène au calcul de $\int \sin^p t \cos^q t dt$ que l'on calcule de la manière suivante:
 - ✓ si p est pair et q est impair alors on pose $x = \sin t$
 - ✓ si p est impair et q est pair alors on pose $x = \cos t$
 - ✓ si p et q sont impairs alors on pose $x = \cos 2t$
 - ✓ si p et q sont pairs alors ... on linéarise
- fractions rationnelles en $\sin t$ et $\cos t$: $Q(\sin t, \cos t) = f(t)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X, Y]$
Règle de Bioche:
 - ✓ si $f(-t) = -f(t)$ alors on pose $x = \cos t$
 - ✓ si $f(\pi - t) = -f(t)$ alors on pose $x = \sin t$
 - ✓ si $f(\pi + t) = f(t)$ alors on pose $x = \tan t$
 - ✓ sinon on pose $x = \tan \frac{t}{2}$
- fractions rationnelles en e^t ou $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$: on pose $x = e^t$
- fractions rationnelles en t et $(\frac{at+b}{ct+d})^{1/n}$: on pose $x = (\frac{at+b}{ct+d})^{1/n}$

5 Intégrales faussement généralisées

exemple 12:

Considérons l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.

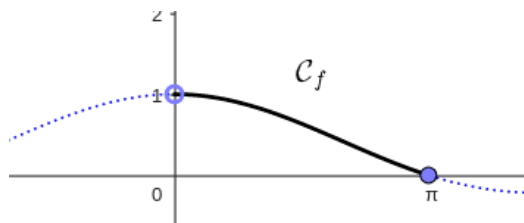
Cette intégrale est-elle du genre rencontré précédemment?

La réponse est non... et oui!

Explications:

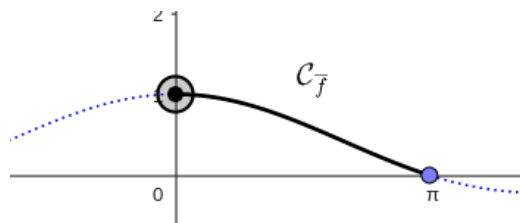
- La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Elle n'est donc pas continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$, mais uniquement sur L'INTERVALLE SEMI-OUVERT $]0, \pi]$



f est N'est PAS définie en 1

$\int_0^1 f(t) dt$ EST FAUSSEMENT
GÉNÉRALISÉE EN 0



$\bar{f}$ est définie et continue en 1

$\int_0^1 \bar{f}(t) dt$ N'EST PAS UNE
INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

- La fonction f est *prolongeable par continuité* en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ (limite finie)

Ainsi si on considère la fonction

$$\bar{f} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La fonction $\bar{f}$ est, quant à elle, CONTINUE sur le SEGMENT $[0, \pi]$,

et donc on sait que $\int_0^\pi \bar{f}(t) dt$ existe!

- Dans ce genre de situation, on dit que

l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ est faussement généralisée en 0

et tout se passe comme pour les intégrales "classiques" (càd celles NON généralisées)

définition 3: fonction prolongeable par continuité

Soit I un intervalle, et x_0 un élément de I ou une borne **finie** de I .

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I - \{x_0\}$.

On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ **existe et est finie**

La fonction ainsi prolongée est la fonction $\bar{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Très souvent, l'énoncé dit que "l'on appellera encore f la fonction ainsi prolongée"

rem: on ne dit jamais qu'une fonction est prolongeable par continuité en $+\infty$ ou en $-\infty$