

C0 - FORMULAIRE PT*

Table des matières

1 Nombres complexes	5
1.1 Nombres complexes de module 1	5
1.2 Nombres complexes	5
2 Trigonométrie	5
2.1 Les propriétés fondamentales	5
2.2 Valeurs remarquables à connaître par cœur	5
2.3 Les formules de l'angle double à connaître par cœur	5
2.4 Formules d'addition à connaître par cœur	7
2.5 Formules à savoir retrouver à partir des précédentes	7
2.6 Angles associés	7
2.7 Formules d'Euler	7
2.8 Equations trigonométriques	7
2.9 Propriétés des fonctions trigonométriques	7
3 Les fonctions trigonométriques réciproques	9
3.1 La fonction ARCSIN	9
3.2 La fonction ARCCOS	9
3.3 La fonction ARCTAN	11
4 Les fonctions hyperboliques	11
4.1 Définitions et relation fondamentale	11
4.2 Propriétés de la fonction ch	11
4.3 Propriétés de la fonction sh	11
5 Les fonctions puissances	13
6 Logarithme et exponentielle	13
6.1 Logarithme népérien	13
6.2 Exponentielle	13
7 Croissances comparées	15
8 Calculs algébriques	15
9 Dérivées et primitives	15
9.1 Opérations	15
9.2 Dérivées des fonctions usuelles	15
9.3 Dérivées des fonctions composées (se déduit du tableau ci-dessus)	17
9.4 Primitives usuelles	17
9.5 Primitives des fonctions composées (se déduit du tableau ci-dessus)	17
9.6 Intégrales généralisées de référence	17
9.7 Intégrabilités de référence	17

10 Développements limités de référence en 0	19
11 Développements en série entière usuels	19
12 Equations différentielles	21
12.1 premier ordre homogène	21
12.2 premier ordre complète	21
12.3 second ordre homogène à coefficients constants	21
12.3.1 cas des fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$	21
12.3.2 cas des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$	21
12.3.3 second membre du type $x \mapsto C.e^{\lambda x}$	21
12.3.4 second membre du type $x \mapsto C.\cos(\omega.x)$ ou $x \mapsto C.\sin(\omega.x)$	21
13 Suites numériques	23
13.1 limite de référence	23
13.2 suites récurrentes linéaires d'ordre 2	23
14 Séries numériques de référence	23
15 Probabilités	23
15.1 Evénements	23
15.2 Formules de probabilité	25
15.3 Variables aléatoires	25
15.3.1 Espérance, variance, covariance	25
15.3.2 Loi uniforme	25
15.3.3 Loi de Bernoulli	25
15.3.4 Loi binomiale	27
15.3.5 Loi géométrique	27
15.3.6 Loi de Poisson	27
16 Géométrie plane	27
16.1 Outils	27
16.2 Points et vecteurs	27
16.3 Droites du plan	27
16.4 Cercles du plan	27
16.5 Coniques dans le plan	29
16.6 Aire d'un triangle, d'un parallélogramme	29
17 Géométrie dans l'espace	29
17.1 Outils	29
17.2 Plans de l'espace	29
17.3 Droites de l'espace	29
17.4 Sphère de l'espace	29
17.5 Volume du parallélépipède	29

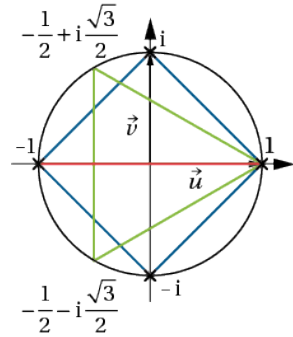
1 Nombres complexes

1.1 Nombres complexes de module 1

θ et θ' sont des réels, n un entier naturel

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ $\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$
- $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- Formules d'Euler: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- Formule de Moivre: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ (càd: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$)
- Racines n -ième de l'unité: $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$

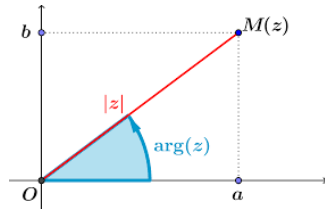
$$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\} \quad \mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, e^{4i\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\} \quad \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$



1.2 Nombres complexes

- $z = a + i.b$ avec $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$
- $z = r.e^{i\theta}$ avec r module de z et θ argument de z
- $a = r \cdot \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$
- module de z : $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

- argument de $z \neq 0$: $\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$



2 Trigonométrie

2.1 Les propriétés fondamentales

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$ et $|\cos x| \leq 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2.2 Valeurs remarquables à connaître par cœur

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0

- $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$

2.3 Les formules de l'angle double à connaître par cœur

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

A l'aide de la formule de $\cos 2a$ on a directement (à savoir retrouver)

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

2.4 Formules d'addition à connaître par cœur

- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$

A partir de ces formules on retrouve, lorsque les tangentes sont définies

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

2.5 Formules à savoir retrouver à partir des précédentes

- $2 \cdot \cos a \cdot \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$
- $2 \cdot \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$
- $2 \cdot \sin a \cdot \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$ et $2 \cdot \sin b \cdot \cos a = \sin(a + b) - \sin(a - b)$

En posant $\begin{cases} p &= a + b \\ q &= a - b \end{cases}$ on a alors $\begin{cases} a &= \frac{p+q}{2} \\ b &= \frac{p-q}{2} \end{cases}$, et les formules ci-dessus donnent

- $\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ et $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

2.6 Angles associés

- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\tan x}$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$

2.7 Formules d'Euler

pour tout x réel on a

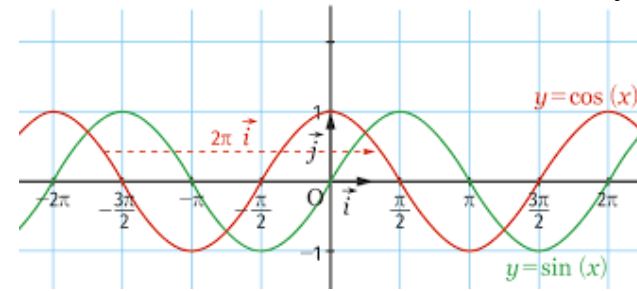
$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2.8 Equations trigonométriques

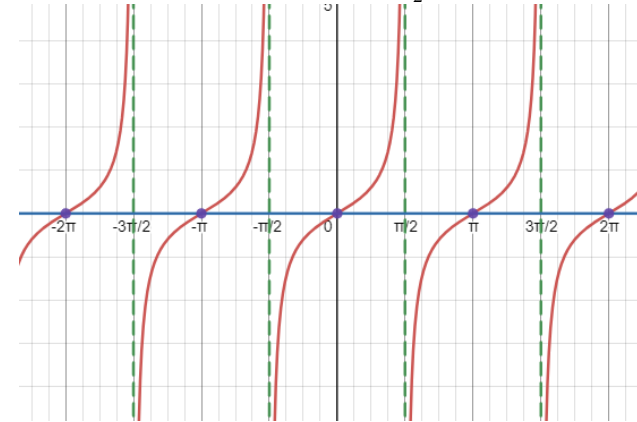
- $\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x \equiv a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -a \quad [2\pi] \end{cases}$ $\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x \equiv a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - a \quad [2\pi] \end{cases}$
- $\tan x = \tan a \iff x \equiv a \quad [\pi]$

2.9 Propriétés des fonctions trigonométriques

- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies et C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elles sont 2π -périodiques



- La fonction $\tan$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

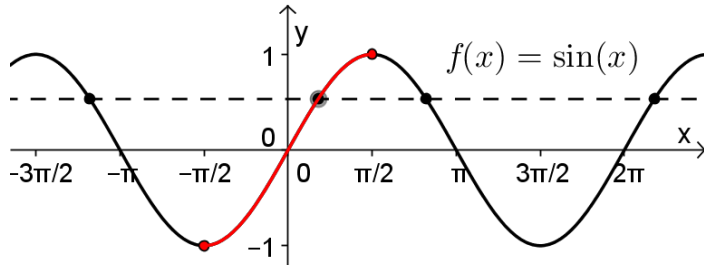


- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ ont pour ensemble image $[-1, +1]$.
- La fonction $\tan$ a pour ensemble image $\mathbb{R}$
- La fonction $\cos$ est paire; les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont impaires

3 Les fonctions trigonométriques réciproques

3.1 La fonction ARCSIN

- La fonction $\sin$ n'est pas bijective de $\mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$ (*surjective mais NON injective*)

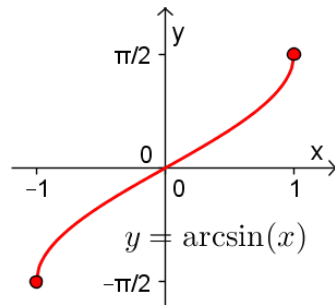


- En revanche la restriction de la fonction $\sin$ à $[-\pi/2, +\pi/2]$ réalise une bijection de $[-\pi/2, +\pi/2]$ dans $[-1, +1]$



définition 1:

La fonction arcsin est LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA RESTRICTION de la fonction $\sin$ à l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$



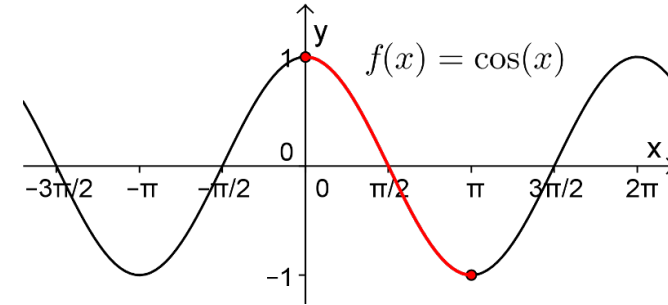
- $\forall x \in [-\pi/2, +\pi/2], \forall y \in [-1, +1]$ on a l'équivalence $y = \sin x \iff x = \arcsin y$
- $\forall x \in [-\pi/2, +\pi/2], \arcsin(\sin x) = x$
- $\forall y \in [-1, +1], \sin(\arcsin y) = y$

- $\arcsin$ est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $] -1, +1[$, avec $\forall x \in] -1, +1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- En appliquant Taylor-Young, on trouve $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$

3.2 La fonction ARCCOS

- La fonction $\cos$ n'est pas bijective de $\mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$ (*surjective mais NON injective*)

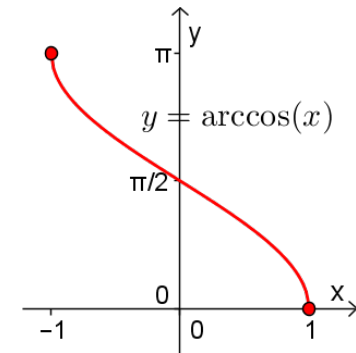


- En revanche la restriction de la fonction $\cos$ à $[0, \pi]$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, +1]$



définition 2:

La fonction arccos est LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA RESTRICTION de la fonction $\cos$ à l'intervalle $[0, \pi]$



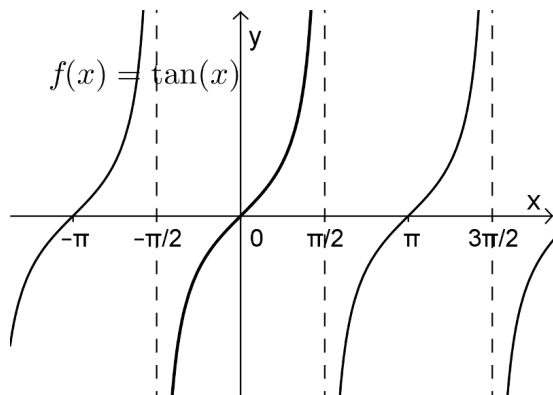
- $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, +1]$ on a l'équivalence $y = \cos x \iff x = \arccos y$
- $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$
- $\forall y \in [-1, +1], \cos(\arccos y) = y$

- $\arccos$ est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $] -1, +1[$, avec $\forall x \in] -1, +1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $\forall x \in [-1, +1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

3.3 La fonction ARCTAN

- La fonction $\tan$ n'est pas bijective de $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ (*surjective mais NON injective*)

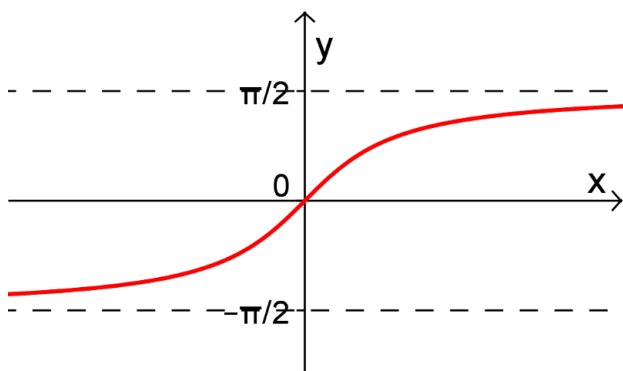


- En revanche la restriction de la fonction $\tan$ à $] -\pi/2, +\pi/2[$ réalise une bijection de $] -\pi/2, +\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$



définition 3:

La fonction arctan est LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA RESTRICTION de la fonction $\tan$ à l'intervalle $] -\pi/2, +\pi/2[$



- $\forall x \in] -\pi/2, +\pi/2[, \forall y \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence $y = \tan x \iff x = \arctan y$
- $\forall x \in] -\pi/2, +\pi/2[, \arctan(\tan x) = x$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan y) = y$
- $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in] -1, +1[, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = sg(x) \cdot \frac{\pi}{2}$ avec $sg(x)$ le signe de x (à savoir redémontrer)

4 Les fonctions hyperboliques

4.1 Définitions et relation fondamentale

- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

4.2 Propriétés de la fonction ch

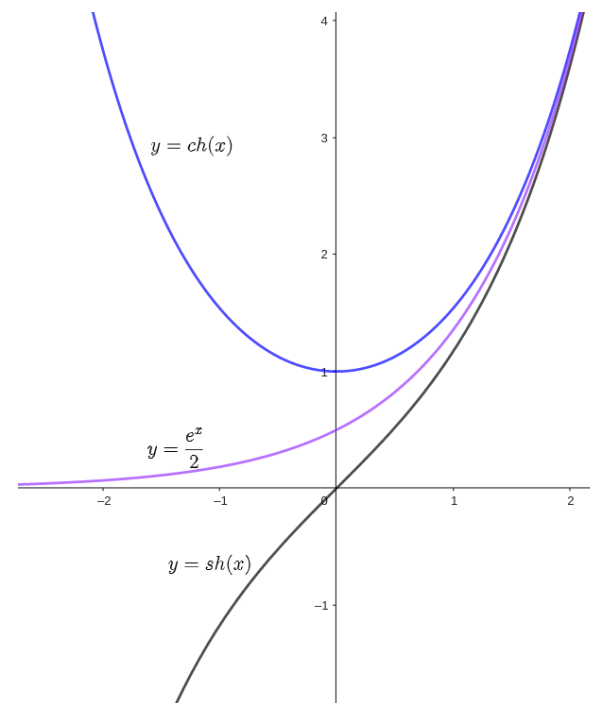
- La fonction ch est une fonction définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$
- La fonction ch est paire
- HP: la restriction de la fonction ch à $[0, +\infty[$ est bijective et sa fonction réciproque est $[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$

$$x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{argch} x$$

4.3 Propriétés de la fonction sh

- La fonction sh est une fonction définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$
- La fonction sh est impaire
- HP: la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{argsh} x$$



5 Les fonctions puissances

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0, x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$ avec la convention $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$

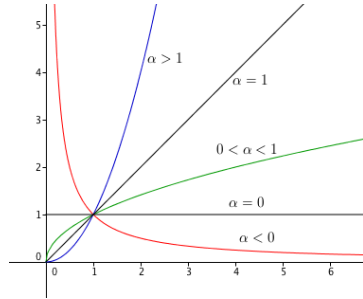
Règles sur les puissances

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in]0, +\infty[^2$

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta} \quad x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$$

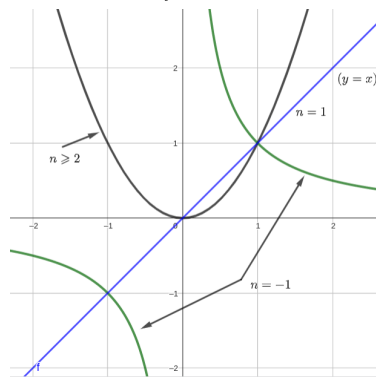
Propriétés de la fonction $x \mapsto x^\alpha$

- ✓ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$
(Si $\alpha > 0$, la fonction est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$, mais ne sera alors dérivable en 0 que pour $\alpha \geq 1$)



- ✓ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$

- ✓ Pour $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{-n \text{ fois}}}$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^*$



Racine n -ième

- ✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est la réciproque de la fonction $[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$
 $x \mapsto x^n$

- ✓ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in]0, +\infty[^2$

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

6 Logarithme et exponentielle

6.1 Logarithme népérien

- La fonction $\ln$ est l'unique primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1
On a donc

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ avec $e \approx 2.718$
- Pour $x > 0, y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \quad \ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y} \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \cdot \ln x$$

- La fonction $\ln$ est définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$
- La fonction $\ln$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, de fonction réciproque $\exp$

6.2 Exponentielle

- $e^0 = 1$ $e^1 = e$
- Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

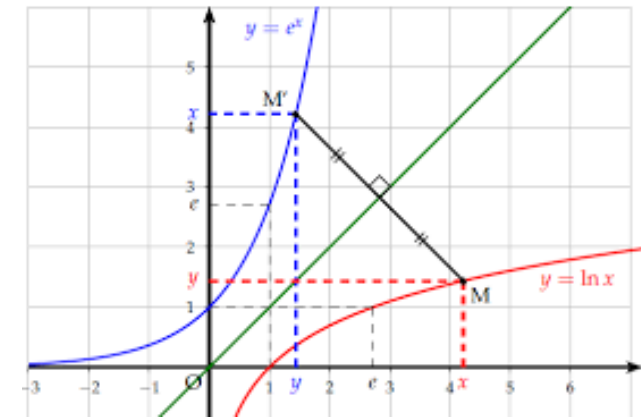
$$e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta} \quad \frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha} \quad \frac{e^\alpha}{e^\beta} = e^{\alpha-\beta} \quad (e^\alpha)^\beta = e^{\alpha \cdot \beta}$$

- La fonction $\exp$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$
- La fonction $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, de fonction réciproque $\ln$

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad (y = e^x \iff x = \ln y)$$

$$\forall x > 0, \exp(\ln x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$$



Etant réciproques l'une de l'autre, les graphes de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

7 Croissances comparées

- Les limites des fonctions usuelles sont à connaître, ainsi que leurs graphes
- le principe des croissances comparées

"EN CAS DE FORME INDÉTERMINÉE (EN 0 OU EN ∞),
L'EXPONENTIELLE L'EMPORTE SUR LES PUISSANCES QUI L'EMPORTENT SUR LES LN"

càd pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot (\ln x)^\beta = 0$$

8 Calculs algébriques

- $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = \prod_{k=1}^n k$ avec la convention $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \times n!$
- $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \cdot n!$
- $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$

- Lorsque les coefficients ci-dessous ont un sens, on a

1. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$
3. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
4. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad (\text{triangle de Pascal})$
5. $p \cdot \binom{n}{p} = n \cdot \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{formule du capitaine})$

- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \quad (\text{binôme de Newton})$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{et} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{et} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ a pour racines } x_1 \text{ et } x_2, \text{ avec } \begin{cases} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

9 Dérivées et primitives

9.1 Opérations

- linéarité: $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'$
- produit: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- inverse: $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- quotient: $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g' \cdot f - f' \cdot g}{f^2}$
- composée: $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$
- réciproque: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
- linéarité de la dérivée n -ième: $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)^{(n)} = \lambda \cdot f^{(n)} + \mu \cdot g^{(n)}$
- formule de Leibniz: $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

9.2 Dérivées des fonctions usuelles

intervalle	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$ avec $m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leq -1$ $\mathbb{R}_+^*$ avec $m \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	x^m	$m \cdot x^{m-1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$\exp(x)$ $\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$	$\exp(x)$ $\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$	$\cos x$ $-\sin x$ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\mathbb{R}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$] -1, +1[$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$] -1, +1[$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.3 Dérivées des fonctions composées (se déduit du tableau ci-dessus)

u désigne une fonction dérivable à valeurs dans l'intervalle qu'il faut...

- $(u^n)' = u'.u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(e^u)' = u'.e^u$
- $(\operatorname{ch}(u))' = u'.\operatorname{sh}(u)$ et $(\operatorname{sh}(u))' = u'.\operatorname{ch}(u)$
- $(\cos(u))' = -u'.\sin u$ et $(\sin(u))' = u'.\cos(u)$
- $(\tan(u))' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1 + \tan^2 u)$
- $(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$
- $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ et $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

9.4 Primitives usuelles

intervalle	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$ avec $m \in \mathbb{N}$		
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leq -2$	x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*$ avec $m \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$		
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\exp(x) + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$] -1, +1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$ ou $-\arccos x + C$

9.5 Primitives des fonctions composées (se déduit du tableau ci-dessus)

Soit u une fonction dérivable à valeurs dans l'intervalle qu'il faut...

- $\int^x u'(t).u^n(t)dt = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$ lorsque $n \neq -1$
- $\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}dt = 2\sqrt{u(x)} + C$
- $\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}dt = \ln |u(x)| + C$
- $\int^x u'(t).e^{u(t)}dt = e^{u(x)} + C$
- $\int^x u'(t).\operatorname{ch}(u(t)).dt = \operatorname{sh}(u(x)) + C$
- $\int^x u'(t).\operatorname{sh}(u(t)).dt = \operatorname{ch}(u(x)) + C$
- $\int^x u'(t).\cos(u(t)).dt = \sin(u(x)) + C$
- $\int^x u'(t).\sin(u(t)).dt = -\cos(u(x)) + C$
- $\int^x \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}dt = \arctan u(x) + C$
- $\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{1-u^2(t)}}dt = \arcsin(u(x)) + C$

9.6 Intégrales généralisées de référence

- $\int_0^1 \ln t dt$ CV
- $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ CV ssi $\alpha > 0$
- Riemann: $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} CV$ ssi $\alpha < 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} CV$

9.7 Intégrabilités de référence

- $\ln$ est intégrable en 0
- $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 0$
- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha < 1$
- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$
- $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha > 1$

10 Développements limités de référence en 0

- $\exp x = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ (seul l'ordre trois est à connaître)

Théorème de Taylor-Young

Soit $f \in C^n(I, \mathbb{C})$.
 f admet en tout point $a \in I$ un DL à l'ordre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Sommes de Riemann

Lorsque $f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \frac{b-a}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + i \frac{b-a}{n}) = \int_{[a, b]} f$$

Formule de Taylor avec Reste Intégral

Lorsque $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{K})$

$$\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ éléments de } I, \text{ on a } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ainsi que a et b deux réels de l'intervalle I , et notons $M = \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}|$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M \cdot |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor polynomiale

Pour tout polynôme P et scalaire a ,

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n \quad \text{càd} \quad P(X+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} X^n$$

Série de Taylor

Si f est de classe C^∞ on peut définir la série de Taylor de f qui est $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

11 Développements en série entière usuels

DSE dans $\mathbb{C}$

- $\operatorname{Rayon}(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}) = \infty$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$
- $\operatorname{Rayon}(\sum_{n \geq 0} z^n) = 1$ et $\forall |z| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

DSE dans $\mathbb{R}$

série entière	rayon	somme sur l'intervalle ouvert de convergence
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$	1	$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$
$\sum_{n \geq 0} x^n$	1	$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$\forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

12 Equations différentielles

12.1 premier ordre homogène

L'équation $y' + a(x)y = 0$ a pour solution générale $\begin{matrix} y : I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto K \cdot \exp(-A(x)) \end{matrix}$ où A désigne une primitive de a et $K \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque

12.2 premier ordre complète

- La solution générale de l'équation $y' + a(x).y = b(x)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
- Une solution particulière est trouvée soit de manière évident, soit en utilisant la méthode de la variation de la constante, càd en cherchant une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto K(x).e^{-A(x)}$ avec K fonction dérivable inconnue

12.3 second ordre homogène à coefficients constants

L'équation différentielle $a.y'' + b.y' + c.y = 0$ (H) a pour équation caractéristique $a.r^2 + b.r + c = 0$ (E_c)
Suivant le signe de Δ les solutions générales ont des formes différentes

12.3.1 cas des fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

- cas où $\Delta \neq 0$.
notons r_1 et r_2 les deux racines distinctes de E_c
La solution générale de (H) est $y : x \mapsto A.e^{r_1x} + B.e^{r_2x}$
- cas où $\Delta = 0$.
notons r_0 la racine double de E_c
La solution générale de (H) est $y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0x}$

12.3.2 cas des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$

- cas où $\Delta > 0$.
notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de E_c
La solution générale de (H) est $y : x \mapsto A.e^{r_1x} + B.e^{r_2x}$
- cas où $\Delta = 0$.
notons r_0 la racine double réelle de E_c
La solution générale de (H) est $y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0x}$
- cas où $\Delta < 0$.
notons $\alpha \pm i\beta$ les racines complexes conjuguées de E_c
La solution générale de (H) est $y : x \mapsto e^{\alpha x}(A \cdot \cos(\beta x) + B \cdot \sin(\beta x))$

12.3.3 second membre du type $x \mapsto C.e^{\lambda.x}$

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = C.e^{\lambda.x}$ où $(C, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.

- si λ n'est pas racine de E_c , il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.e^{\lambda.x}$
- si λ est racine simple de E_c , il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.x.e^{\lambda.x}$
- si λ est racine double de E_c , il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.x^2.e^{\lambda.x}$

avec $D \in \mathbb{K}$ une constante à déterminer

12.3.4 second membre du type $x \mapsto C \cdot \cos(\omega.x)$ ou $x \mapsto C \cdot \sin(\omega.x)$

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = C \cdot \cos(\omega.x)$ où $(C, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

- si $i\omega$ n'est pas racine de E_c , il existe une sol.part.de la forme $x \mapsto D \cdot \cos(\omega.x) + E \cdot \sin(\omega.x)$
- si $i\omega$ est racine simple de E_c , il existe une sol.part.de la forme $x \mapsto D.x \cdot \cos(\omega.x) + E.x \cdot \sin(\omega.x)$

avec $(D, E) \in \mathbb{R}^2$ des constantes à déterminer

13 Suites numériques

13.1 limite de référence

Soit $q \in \mathbb{R}$

- si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$
- si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- si $q = -1$ alors la suite $(q^n) = ((-1)^n)$ ne possède pas de limite.
- si $q < -1$ alors la suite (q^n) ne possède pas de limite

13.2 suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- $a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Equation caractéristique $a.r^2 + b.r + c = 0$

expression explicite des suites à valeurs complexes

1. **Cas où $\Delta \neq 0$** :

Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.

Alors :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$

2. **Cas où $\Delta = 0$** :

Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.

Alors :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$

expression explicite des suites à valeurs réelles

1. **Cas où $\Delta > 0$** : Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.

Alors :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$

2. **Cas où $\Delta = 0$** : Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.

Alors :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$

3. **Cas où $\Delta < 0$** : Notons alors r_1 et r_2 les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

alors :

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$$

où q est le module de r_1 et θ un argument de r_1

14 Séries numériques de référence

1. séries de Riemman : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (acv) ssi $\alpha > 1$
2. série géométrique : $\sum q^n$ converge (acv) ssi $|q| < 1$, et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
3. série de l'exponentielle : $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (acv) pour tout $z \in \mathbb{C}$, et de plus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$
4. critère spécial des séries alternées: si la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro alors la série converge

15 Probabilités

15.1 Evénements

- $\omega \in \bar{A} \iff \omega \notin A$ ($\bar{A}$ = complémentaire de A)

- $\omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ ou $\omega \in B$

- $\omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ et $\omega \in B$

- $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N \iff \exists j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \omega \in A_j$ (union d'une nombre fini d'ensembles)
 $\omega \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N \iff \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \omega \notin A_j$

- $\omega \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N \iff \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \omega \in A_j$ (intersection d'une nombre fini d'ensembles)
 $\omega \notin A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N \iff \exists j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \omega \notin A_j$

- $A - B = A \cap \bar{B} = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$

- les $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux incompatibles** lorsque $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

- les $(A_i)_{i \in I}$ constituent un **système complet d'événements** lorsque

$$\text{i) } \bigcup_{i \in I} A_j = \Omega$$

$$\text{ii) } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

Loi de De Morgan

- Soient A et B deux ensembles (ou événements si vocabulaire des probabilités)

$$\overline{\bar{A}} = A \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

si $A \subset B$ alors $\bar{B} \subset \bar{A}$

- Soient A, B et C trois ensembles (ou événements si vocabulaire des probabilités)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

généralisation à un nombre fini d'ensemble

- Soient $(A_j)_{1 \leq j \leq N}$ un nombre fini d'ensembles (ou événements si vocabulaire des probabilités).
On a

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N} = \bigcap_{j=1}^N \bar{A}_j = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_N$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N} = \bigcup_{j=1}^N \bar{A}_j = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_N$$

$$B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_N)$$

$$B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \dots \cap (B \cup A_N)$$

généralisation à un nombre au plus dénombrable d'ensemble

- Soient $(A_i)_{i \in J}$ un nombre au plus dénombrable d'ensembles (ou événements si...).
- On a

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup_{j \in I} A_j} &= \bigcap_{j \in I} \overline{A_j} \\ \overline{\bigcap_{j \in I} A_j} &= \bigcup_{j \in I} \overline{A_j} \\ B \bigcap \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) &= \bigcup_{i \in J} (B \bigcap A_i) \\ B \bigcup \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) &= \bigcap_{i \in J} (B \bigcup A_i)\end{aligned}$$

15.2 Formules de probabilité

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ càd $P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$
- formule de Bayes $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}.P_A(B)$ càd $P(A).P_A(B) = P(B).P_B(A)$
- si événements 2 à 2 incompatibles: $P\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \sum_{i \in J} P(A_i)$ avec J au plus dénombrable
- formule des probabilités composées

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}).P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$\text{pour } n = 3, P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$$

- A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A).P(B)$
- $A_1, \dots, A_N$ mutuellement indépendants $\implies P(A_1 \cap \dots \cap A_N) = P(A_1) \times \dots \times P(A_N)$
- Formule des probabilités totales: si $(A_n)_{n \in I}$ est un (quasi-)SCE

$$P(B) = \sum_{n \in I} P(B \cap A_n) = \sum_{n \in I} P(A_n).P_{A_n}(B)$$

- continuité croissante: si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ alors $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$
- continuité décroissante: si $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$ alors $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

15.3 Variables aléatoires

15.3.1 Espérance, variance, covariance

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini.
 - ✓ $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i.P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x)$
 - ✓ $E(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i).P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x).P(X = x)$ (théorème de transfert)
 - ✓ $V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (formule de Kœnig-Huygens)
 - ✓ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
 - ✓ X est une variable aléatoire CENTRÉE RÉDUITE lorsque $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

- Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ dénombrable
 - ✓ Si convergence de la série: $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n.P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X \geq n)$
- 1. $E(a.X + b.Y) = a.E(X) + b.E(Y)$ (linéarité de l'espérance)
 2. $V(aX + b) = a^2.V(X)$
 3. $cov(X, Y) = E((X - E(X)).(Y - E(Y))) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$
 4. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$
 5. $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X, Y)$
 6. cov est bilinéaire

15.3.2 Loi uniforme

Soit $n \geq 1$

- $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ P(X = x_k) = \frac{1}{n} \end{cases}$
- cas particulier: $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = [1, n] \\ P(X = k) = \frac{1}{n} \end{cases}$

15.3.3 Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$, on note $q = 1 - p$

- $X \sim \mathcal{B}(p)$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q \end{cases}$

- $E(X) = p$
- $V(X) = pq$
- $G_X(t) = 1 - p + pt$ et $R = \infty$

- **épreuve de Bernoulli:** c'est une épreuve aléatoire qui n'a que deux issues possibles
 - Succès (de probabilité p)
 - Echec (de probabilité $q = 1 - p$)
 Si X désigne la v.a. qui vaut 1 en cas de Succès et 0 sinon alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

15.3.4 Loi binomiale

Soit $p \in [0,1]$, on note $q = 1 - p$

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ lorsque
$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0,n \rrbracket \\ P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \end{cases}$$

- $E(X) = np$
- $V(X) = n.p.q$
- $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ et $R = \infty$

- **schéma de Bernoulli:** *c'est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre de succès p*
Si X désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de succès alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

15.3.5 Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$, on note $q = 1 - p$

- $X \sim \mathcal{G}(p)$ lorsque
$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P(X = k) = q^{k-1} \cdot p \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{1}{p}$

- $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

- $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ et $R = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}$

- *La loi géométrique est aussi appelée **la loi du premier succès**.*
On répète de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p .
Si X désigne le rang du premier succès alors $X \sim \mathcal{G}(p)$

15.3.6 Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque
$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$$

- $E(X) = \lambda$

- $V(X) = \lambda$

- $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda \cdot (t-1)} = \exp(\lambda \cdot (t-1))$ et $R = \infty$

- *La loi de Poisson n'est associée à aucune expérience aléatoire*

16 Géométrie plane

16.1 Outils

- le produit scalaire caractérise l'orthogonalité
- le déterminant caractérise la colinéarité

16.2 Points et vecteurs

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

- $||\overrightarrow{AB}|| = AB = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- $Mil[AB] = \frac{1}{2}(A+B) = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

16.3 Droites du plan

- La droite qui passe par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (d_1, d_2)$

- ✓ a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = x_A + t.d_1 \\ y = y_A + t.d_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- ✓ a pour équation cartésienne
$$\begin{vmatrix} x - x_A & d_1 \\ y - y_A & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

- toute droite du plan admet une équation cartésienne du type $ux + vy + w = 0$ avec $(u,v) \neq (0,0)$

- ✓ un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

- ✓ deux droites sont parallèles ssi $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$

- ✓ deux droites sont perpendiculaires ssi $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ (*produit scalaire*)

- toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une eq. cart. réduite du type $y = mx + p$

- ✓ m est le coefficient directeur de la droite

- ✓ un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$

- ✓ deux droites sont parallèles **ssi** $m_1 = m_2$

- ✓ deux droites sont perpendiculaires **ssi** $m_1.m_2 = -1$

- distance entre un point et une droite

- ✓ la distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite d'équation $(D) : ux + vy + w = 0$ est donnée par la formule

$$\frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = d(M_0, (D))$$

- ✓ la distance du point M_0 à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est donnée par la formule

$$d(M_0, D) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle|}{||\vec{n}||}$$

16.4 Cercles du plan

Le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$

- a pour équation cartésienne $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

- a pour équation paramétrique
$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \cos t \\ y = y_0 + R \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0, 2\pi] \text{ par exemple}$$

- a pour équation complexe $|z - \omega| = R$ avec $\omega = \text{Affixe}(\Omega)$

16.5 Coniques dans le plan

- Ellipse
 - ✓ excentricité $e < 1$
 - ✓ équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 - ✓ représentation paramétrique $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ par exemple
- Parabole
 - ✓ excentricité $e = 1$
 - ✓ équation réduite $y^2 = 2px$
 - ✓ représentation paramétrique possible $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- Hyperbole
 - ✓ excentricité $e > 1$
 - ✓ équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
 - ✓ représentation paramétrique $\begin{cases} x = \pm a \cdot \operatorname{ch} t \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
 - ✓ droites asymptotes $y = \pm \frac{b}{a}x$

16.6 Aire d'un triangle, d'un parallélogramme

- Aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$
- l'aire du triangle ABC est donnée par la formule $\boxed{\frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot |\sin(\vec{AB}, \vec{AC})|}$

17 Géométrie dans l'espace

17.1 Outils

- le produit scalaire caractérise l'orthogonalité
- le produit vectoriel caractérise la colinéarité
- le déterminant caractérise la coplanarité de 3 vecteurs

17.2 Plans de l'espace

- Le plan qui passe par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ et $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$
 - ✓ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + \lambda d_1 + \mu \delta_1 \\ y = y_A + \lambda d_2 + \mu \delta_2 \\ z = z_A + \lambda d_3 + \mu \delta_3 \end{cases}$ avec $(t, \mu) \in \mathbb{R}^2$
 - ✓ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_A & d_1 & \delta_1 \\ y - y_A & d_2 & \delta_2 \\ z - z_A & d_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0$
 - ✓ un vecteur normal est $\vec{d} \wedge \vec{\delta}$
- tout plan de l'espace admet une équation cartésienne du type $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ le vecteur (a, b, c) est un vecteur normal au plan
- La distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule

$$\boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(M_0, (P))}$$

17.3 Droites de l'espace

- La droite qui passe par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$
 - a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + t \cdot d_1 \\ y = y_A + t \cdot d_2 \\ z = z_A + t \cdot d_3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- La distance d'un point M_0 à une droite (D) définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$ est donnée par la formule

$$\boxed{d(M_0, (D)) = \frac{||\vec{AM_0} \wedge \vec{d}||}{||\vec{d}||}}$$

- Une droite peut être définie comme l'intersection de deux plans par un système d'équations cartésiennes $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$
- Dans ce cas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

17.4 Sphère de l'espace

- La sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $R > 0$ a pour équation cartésienne

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

17.5 Volume du parallélépipède

- Volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$: $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$