

1 Intégrales I.

ANA 1

Indiquer parmi les intégrales suivantes celles qui font parties du chapitre Intégration I

$$A = \int_0^1 \ln(t) dt \quad B = \int_1^3 \frac{t-1}{t+2} dt \quad C = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2-4} dt \quad D = \int_1^2 \frac{t-2}{t^2-4} dt \quad E = \int_0^\infty e^{-t} dt$$

ANA 2

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2-4x+4} dx \quad B = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) dx \quad C = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) e^x dx \quad D = \int_{-1}^1 (x+1)^2 \cdot e^{-x} dx$$

ANA 3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, puis donner leurs dérivées.

$$G : x \mapsto \int_3^{x^2} f(t) dt \quad H : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} f(t) dt \quad J : x \mapsto \int_0^x e^{3x} \cdot f(t) dt$$

ANA 4

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Existe-t-il une primitive F de f sur $[0,1]$ telle que $F(1/2) = 2030$? Est-elle unique?
2. Existe-t-il une primitive G de f sur $[0,1]$ telle que $\lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = +\infty$?

ANA 5

Montrer que si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$

ANA 6 (lemme de Lebesgue - très classique)

Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0$

ANA 7

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \int_0^x f - \int_0^1 (1-t)f(t) dt$$

Montrer que $\int_0^1 g(x) dx = 0$.

ANA 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sin x} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{2\pi} f_n(x) dx.$$

1. Montrer que f_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La fonction prolongée est-elle alors dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. Pour $n \geq 3$, calculer $I_n - I_{n-2}$. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fonctions définies par une intégrale:

ANA 9

On pose $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

1. Ensemble de définition de f ?
2. Réduction de l'intervalle d'étude?
3. Etudier les variations de f ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition
4. Dessiner l'allure du graphe de f

ANA 10

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 7}}$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et déterminer le signe de g'
2. La fonction g est-elle paire ou impaire? Que vaut $g'(0)$?
3. Pour $x > 0$ donner un encadrement de $\int_x^{3x} \frac{dt}{t} - g(x)$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 3$
4. Donner l'allure de la courbe représentative de g .
5. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une expression de $g(x)$ en fonction de h sans le signe $\int$

ANA 11

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{3x} \arctan(t^2) dt$

1. Montrer que g est une fonction impaire
2. Montrer que g est strictement positive sur $]0, +\infty[$
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer g' et montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $2x \arctan(x^2) \leq g(x) \leq 2x \arctan(9x^2)$
puis en déduire que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \pi \cdot x$
5. Montrer que $\forall x > 0, \pi \cdot x - g(x) = \int_x^{3x} \arctan(\frac{1}{t^2}) dt$
En déduire que cette différence tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et que la courbe représentative de g admet une droite asymptote
6. Donner l'allure de la courbe représentative de g

ANA 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de f .
(On pourra considérer $0 < x_1 < x_2$ puis comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$)
3. (a) Montrer que $\forall x > 0, \ln \frac{x+1}{x} \leq f(x) \leq e \cdot \ln \frac{x+1}{x}$
(b) En déduire les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition
4. (a) Justifier avec soin que $\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt = o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$
(b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$
5. En utilisant le changement de variable $\theta = t + x$, justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$

ANA 13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad x \longmapsto \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner $g'(x)$ ainsi que son signe
3. Montrer que $\lim_{+\infty} g = +\infty$ et dresser le tableau de variation de g
4. Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

ANA 14

On note $H : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^x \ln^2(1+xt).dt$.

En introduisant la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \ln^2(1+t).dt$, montrer que H est C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée

ANA 15

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^{-1/t}}{t} dt$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^{*+}$
2. Montrer que f est C^1 sur cet ensemble et donner sa dérivée. Dessiner le TV de f .
(Dans le tableau, on pourra noter $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{\ln(16e)}}{\ln 4}$)
3. Justifier que $\lim_{0^+} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

ANA 16

On souhaite étudier la fonction définie en posant $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln t}$

1. Etudier la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t - \ln t}$
2. Montrer que la fonction f est C^1 sur $]0, +\infty[$, et donner sa dérivée. Dessiner le TV de f
3. Montrer que $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq x$.
En déduire $\lim_{0^+} f$
4. En encadrant, pour $x \geq 1$, la quantité $f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$, montrer que $\lim_{+\infty} f = \ln 2$

ANA 17

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2(x)} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt.$$

1. Montrer que : $\forall t \in [0,1], \operatorname{Arccos}(t) + \operatorname{Arcsin}(t) = \frac{\pi}{2}$. Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire, π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que f est constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
(b) Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$
(c) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt$.
4. Retrouver la valeur de I par le changement de variable $\varphi(t) = \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})$.

ANA 18

On souhaite justifier que $F : x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} \arctan(t) dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

1. Un théorème nous permet-il de justifier directement que F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Sinon, sur quel intervalle permet-il de faire cette affirmation?
2. La fonction F est-elle continue en 0?
3. Déterminer $F(x)$ pour x réel, et justifier alors que F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

FORMULES DE TAYLOR:**ANA 19**

Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ et g définie que $[a,b]$ par $g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(t) dt$

Montrer que g est n fois dérivable sur $[a,b]$ et que $g^{(n)} = f$

ANA 20

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2], 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

CHANGEMENT DE VARIABLE**ANA 21**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall t \in [a,b], f(a+b-t) = f(t)$

1. Donner l'interprétation géométrique de cette condition
2. Montrer que : $\forall t \in [a,b], \int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$
3. En déduite $\int_0^\pi t \cdot \sin^3(t) dt$

ANA 22

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}]$ fixé.

1. Calculer $\int_\alpha^{\pi/2-\alpha} \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \ln(\tan t) dt$ en posant $x = \frac{\pi}{2} - t$.
2. Retrouver ce résultat en considérant la fonction $F : \alpha \mapsto \int_\alpha^{\pi/2-\alpha} \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \ln(\tan t) dt$

ANA 23

Calculer $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$ en posant $u = \cos x$

ANA 24

On souhaite calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(2x)} dx$

(indication: on pourra commencer par calculer $I + J$ en posant $u = \tan(x)$)

ANA 25

A l'aide du changement de variable $t = \frac{\pi}{4} - x$, calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)$

ANA 26

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sin x}$ sur l'intervalle $] -\pi, +\pi[$ (on pourra poser $t = \tan \frac{x}{2}$)

ANA 27

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}$ en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser $x = 2t + 2$)

ANA 28

Calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n\alpha + k} (\alpha > 0 \text{ fixé}) \quad c_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + 2kn + n^2}$$

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n}} \quad e_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cdot \exp\left(-\frac{k}{n}\right) \quad f_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n} \quad g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k}$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \quad i_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}\right)^{1/n} \quad j_n = \sqrt[n]{\frac{n(n+1) \dots (n+n)}{n^n}}$$

ANA 29

Soit $\alpha > 0$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$ en introduisant une somme de Riemann

ANA 30

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \neq 1$.

Calculer $\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt$

ANA 31

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^n - t^{2n}}{1 - t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
- En utilisant une somme de Riemann, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1 - t} dt = \ln 2$
- Calculer $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t^n - t^{2n}}{1 - t} \right) dt$. Etonnant?

ANA 32 (démonstration de la méthode des rectangles)

Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$.

On note pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

- Justifier que $M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ existe
- Montrer que $\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k) dx$
- En déduire que $\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| \leq \frac{M \cdot (b-a)^2}{2n}$
- En déduire que $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + O\left(\frac{1}{n}\right)$

ANA 33

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \frac{k\pi}{n^2}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$

- Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|\sin x - x| \leq \frac{x^3}{6}$
- Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite
- Montrer que $\lim |u_n - v_n| = 0$. En déduire $\lim v_n$

ANA 34 (Epreuve C 2024 Banque PT (préambule))

FONCTIONS NUMÉRIQUES

- Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x$$

- Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.
 - En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$$

- On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

- Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2 .
- Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.
- Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 .
- Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1 , l'expression de $f_1'(x)$.
- Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2 ,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

- Etudier les variations des fonctions f_1 et f_2 . On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- Tracer, sur un même graphe (échelle: 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi, 2\pi]$.

- On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3 . Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?
- Etudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

ANA 35 (équivalent et ln)

1. A-t-on $1 + x \underset{0}{\sim} 1 + x^2$? A-t-on $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} \ln(1 + x^2)$
2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , et a un point ou une extrémité de I .

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et que $\begin{cases} g \text{ est strictement positive sur } I \\ g \text{ admet une limite } l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \text{ autre que } 1 \end{cases}$

(a) f est-elle strictement positive sur I ?

(b) Montrer que $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

ANA 36 (classique)

1. Justifier que $\arcsin(y) - \frac{\pi}{6} \underset{1/2}{\sim} \frac{2\sqrt{3}}{3}(y - \frac{1}{2})$
2. Justifier que $\frac{\pi}{2} - \arcsin y \underset{y \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}$ (Complicqué!)

ANA 37

Déterminer les équivalents suivants

1. a) $x \cdot \ln(e^x + 1)$ en $-\infty$ b) $x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$ c) $\frac{\ln(x^2 + x + 1) \cdot \arctan x}{\ln(x + 1)}$ en 0 et en $+\infty$
2. a) $\frac{(1 - \cos x) \cdot \tan x}{x \cdot \sin^2(3x)}$ en 0 b) $x^\alpha - 1$ en 1 c) $\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $\frac{\pi}{4}$

ANA 38

Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x - 1} e^{1/x}$

1. Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque $x \rightarrow +\infty$
2. Etudier la position de l'asymptote par rapport à la courbe. $\mathcal{C}_f$

ANA 39 (bien comprendre les croissances comparées)

Ordonner les fonctions suivantes de la plus négligeable à la plus prépondérante quand $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\ln x}{x^2} \quad \frac{1}{x \cdot \ln x} \quad \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} \quad \frac{(\ln x)^2}{x^3} \quad \frac{1}{x^2} \quad e^{-x^2} \quad e^{-\sqrt{x}} \quad e^{-x} \quad e^{-2x}$$

On utilisera la notation $a \ll b$ lorsque $a = o_{+\infty}(b)$

ANA 40

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui possède $n + 1$ racines distinctes.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

ANA 41 (continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.

Montrer que f possède un unique point fixe, càd qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$

ANA 42 (continuité)

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = f(x) + 1$.

On définit la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$

1. Montrer que g est une fonction périodique et justifier qu'elle soit bornée sur $\mathbb{R}$
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ainsi qu'un équivalent de f en $+\infty$

ANA 43 (inégalités diverses)

1. Montrer que $\forall x \in]-\pi/2, +\pi/2[, |\tan x| \geq |x|$
2. Montrer que $\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$
3. Montrer que $\forall \alpha \geq 1, \forall x \geq 0, (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

ANA 44

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \cdot \sin(kx)}{k^2 + n^2}$

1. Expliciter $f_2(x)$ puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f_2(x)| \leq \frac{13}{40}$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$

ANA 45

Etudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 2}$ sur son ensemble de définition

ANA 46 (bonne utilisation du théorème de la limite de la dérivée)

On pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $[-1, +1]$
2. Etudier la dérivabilité de f sur $[-1, +1]$ en distinguant éventuellement des cas, et donner sa dérivée.
3. En déduire une expression simple de $f(x)$ en fonction de $\arcsin(x)$

FONCTIONS RÉCIPROQUES.**ANA 47 (fonction réciproque)**

Soit $f : x \mapsto x \cdot e^{x^2}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera
2. Montrer que f^{-1} admet un DL à l'ordre 4 en 0
3. Déterminer ce DL

ANA 48 (fonction réciproque)

Soit $f : x \mapsto x + x^2 - x^3$

1. Déterminer deux intervalles I et J contenant 0 tels que f réalise une bijection de I sur J
2. On note g la fonction réciproque de la restriction de f à I . Montrer que g admet un DL à l'ordre 4 en 0 et le calculer

ANA 49

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Réduire le domaine d'étude
3. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative
4. Montrer que f réalise une bijection de $I = [0, \pi/4]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g la fonction réciproque.
5. Donner les variations de g et représenter sa courbe représentative sur le graphique précédent
6. Justifier que $\forall x \in J, \begin{cases} \cos(g(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(g(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$
7. Montrer que g est dérivable sur $J - \{1\}$ et qu'alors $g'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

ANA 50 (fonction tangente hyperbolique)

On considère la fonction $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$

1. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser
2. Dresser le tableau de variation de la fonction réciproque de th , que l'on nomme argth . Justifier que argth est de classe C^∞ et préciser sa dérivée.
3. Justifier que $\forall x \in J, \text{argth}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ et en déduire alors une expression simple de argth à l'aide des fonctions usuelles

ÉTUDE DE PROLONGEMENTS.**ANA 51 (prolongement C^1)**

Montrer que la fonction $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 2\pi x}{4\pi \sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

ANA 52 (prolongement)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n \cdot \sin(\frac{1}{x})$ lorsque $x \neq 0$

1. La fonction f_n peut-elle toujours être prolongeable par continuité en 0. Lorsque c'est la cas, on note encore f_n son prolongement
2. Montrer que f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f'_2 n'est pas continue en 0
3. Montrer que f_3 est C^1 sur $\mathbb{R}$ mais que f'_3 n'est pas dérivable en 0

ANA 53 (prolongement et C^∞)

Soit f la fonction définie sur $[-1, +1]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -1, +1[$

ANA 54 (prolongement et C^2)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x - x^2}$

1. Déterminer la limite l de f en 0, puis un équivalent de $f(x) - l$ lorsque $x \rightarrow 0$
2. On pose $f(0) = l$. Étudier si ce prolongement est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$? Dérivable? C^1 ?

ANA 55

Soit $f : x \mapsto \frac{x \cdot e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

1. La fonction f est-elle C^∞ sur son ensemble de définition?
2. La fonction f a-t-elle une parité particulière?
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable?

ANA 56

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 \cdot \ln x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?

DÉRIVÉES n -IÈME**ANA 57**

Soit $f :] -\pi/2, +\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\cos x}$$

1. Calculer f' et f''
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in] -\pi/2, +\pi/2[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$ et justifier que $P_{n+1} = (1 - X^2) \cdot P'_n + (n+1) \cdot X \cdot P_n$
3. Donner le monôme de plus haut degré de P_n

ANA 58 (dérivée n -ième)

1. Déterminer la dérivée n -ième de $x \mapsto e^x \cdot \cos x$
2. (a) Donner la dérivée n -ième de $x \mapsto e^{ix}$
 (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
 (c) Déterminer la dérivée n -ième de $x \mapsto \sin^2 x \cdot \cos x$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$
 Déterminer la dérivée n -ième de $x \mapsto \frac{1}{x+a}$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$
 Déterminer la dérivée n -ième de $x \mapsto e^{x \cdot \text{ch } a} \cdot \text{ch}(x \cdot \text{sh } a)$

ANA 59

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f_n : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^{n-1} \cdot e^{1/x}$.

Montrer que f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot x^{-n-1} \cdot e^{1/x}$ pour tout $x \neq 0$

FONCTIONS VECTORIELLES**ANA 60**

1. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est-elle une fonction bornée?

$$t \longmapsto \left(\frac{e^{-t}}{t^2 + 1}, \arctan(t) \right)$$
2. Montrer que la fonction $g : t \in [0, 1000] \mapsto (\sin(\text{ch}(t) + t^4), e^t - 10^{50}t + \pi)$ est bornée

ANA 61

Calculer, si elle existe, la limite en 0 de $f : t \mapsto \left(\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}, \frac{\sin t - \tan t}{t^3} \right)$

ANA 62

On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{\sin^2 t}{e^{t^2} - 1}, t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) & \text{si } t \neq 0 \\ (1, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

ANA 63

On note $f : t \in I \mapsto (t^2 \cdot \ln(1+t), e^{2t}, \cos t)$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de cette fonction
2. Justifier que f est C^∞ sur I
3. Donner $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$

ANA 64

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction vectorielle

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{cases} (\sin t, e^t - 1 - \lambda t) & \text{si } t \geq 0 \\ (t, t^2) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0
2. Etudier l'existence de la dérivée à droite et à gauche en 0.

ANA 65

Déterminer les DL suivants

1. $DL_2(0)$ de $f : t \mapsto (2^t - 1, e^{\sqrt{1+t}})$
2. $DL_2(1)$ de $f : t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{t^3 \cdot \ln t}{t^2 - 1})$
3. $DL_2(\pi/3)$ de $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(2t))$

ANA 66

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable sur I telle que $\forall t \in I, f(t) \neq 0$.

On pose $\forall t \in I, g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$

1. Montrer que g est dérivable sur I , et calculer $g'(t)$
2. Que dire du vecteur $g(t)$? En déduire la dérivée de la fonction $h : t \mapsto \|g(t)\|$.

ANA 67

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction dérivable telle que $\forall t \in I, (f(t), f'(t))$ soit une famille liée.

On pose $\varphi : t \in I \rightarrow f(t) \wedge f'(t)$.

Montrer que φ est une fonction constante.

ANA 68

On considère une particule dont la trajectoire est donnée par la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2

1. On note $g : t \mapsto \|f'(t)\|^2$.
Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner g'
2. En déduire que la particule accélère [décélère] lorsque l'angle entre $f'(t)$ et $f''(t)$ est inférieur [supérieur] à $\frac{\pi}{2}$

ANA 69

Donner la dérivée n -ième de la fonction $f : t \mapsto t^2 \cdot (\cos(t), \sin(t))$

NORME

ANA 70

A l'aide de l'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, montrer que $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$

QUELQUES CORRIGÉS

6

1. On commence par réaliser une intégration par parties.

Soit $x \neq 0$ fixé

Comme la fonction f et la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, on peut donc réaliser une intégration par parties, ce qui donne:

$$\int_a^b f(t) \sin(xt) dt = \left[-f(t) \frac{\cos(xt)}{x} \right]_a^b + \int_a^b f'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt$$

soit

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt &= f(a) \frac{\cos(xa)}{x} - f(b) \frac{\cos(xb)}{x} + \int_a^b f'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt \\ &= \frac{1}{x} (f(a) \cdot \cos(xa) - f(b) \cdot \cos(xb)) + \frac{1}{x} \cdot \int_a^b f'(t) \cdot \cos(xt) dt \end{aligned}$$

2. On montre que la partie du crochet tend vers zéro.

Comme la fonction $\cos$ est une fonction bornée et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on peut affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (f(a) \cdot \cos(xa) - f(b) \cdot \cos(xb)) = 0$$

3. On montre que la deuxième intégrale tend elle aussi vers zéro

Soit $x \neq 0$ fixé.

- La fonction f étant C^1 sur $[a, b]$, on sait que f' est continue sur le segment $[a, b]$.
Le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que f' est bornée sur $[a, b]$.
Il existe donc $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$
- On en déduit que

$$\forall t \in [a, b], |f'(t) \cdot \cos(xt)| = |f'(t)| \cdot |\cos(xt)| \leq M \cdot 1 = M$$

et donc par **croissance de l'intégrale** on a

$$\int_a^b |f'(t) \cdot \cos(xt)| dt \leq \int_a^b M dt = M \cdot (b - a)$$

L'inégalité triangulaire intégrale permet d'écrire

$$\left| \int_a^b f'(t) \cdot \cos(xt) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t) \cdot \cos(xt)| dt \leq \int_a^b M dt = M \cdot (b - a)$$

ce qui prouve que la fonction $x \mapsto \int_a^b f'(t) \cdot \cos(xt) dt$ est une fonction bornée.

- On peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \int_a^b f'(t) \cdot \cos(xt) dt = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0
- 4. Au final, on a bien montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0 + 0 = 0$

12

1. Nous allons montrer que pour tout $x > 0$ fixé, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$ existe bien.
Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t+x}$ est définie et **continue** sur le **segment** $[0,1]$ (en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas), on peut donc affirmer que $\int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$ existe

rem: il ne faut surtout pas considérer la fonction $x \mapsto \frac{e^t}{t+x}$

2. – **première idée.**

Soit $0 < x_1 < x_2$.

On a

$$\forall t \in [0,1], 0 < t + x_1 < t + x_2$$

comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{t+x_2} < \frac{1}{t+x_1}$$

en multipliant par $e^t > 0$ cela donne

$$\forall t \in [0,1], \frac{e^t}{t+x_2} < \frac{e^t}{t+x_1}$$

par **croissance de l'intégrale***

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_1} dt$$

On a montré que

$$(0 < x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$$

,

Conclusion: $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[}$

rem*: quand on intègre une inégalité stricte, elle devient large

– **seconde idée.**

Soit $0 < x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2} dt - \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2} - \frac{e^t}{t+x_1} dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (x_1 - x_2) \cdot \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)} dt \end{aligned}$$

Or

$$\forall t \in [0,1], \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)} \geq 0$$

d'où par positivité de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)} dt \geq 0 \quad \text{et ainsi} \quad f(x_2) - f(x_1) \leq 0$$

On a montré que

$$(0 < x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$$

,

Conclusion: $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[}$

3. (a) Soit $x > 0$.

On a

$$\forall t \in [0,1], 1 \leq e^t \leq e$$

et ainsi

$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{t+x} \leq \frac{e^t}{t+x} \leq \frac{e}{t+x}$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t+x} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt \leq \int_0^1 \frac{e}{t+x} dt = e \cdot \int_0^1 \frac{1}{t+x} dt$$

et comme

$$\int_0^1 \frac{1}{t+x} dt = [\ln |t+x|]_0^1 = \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x}$$

On a bien montré que

$$\ln \frac{x+1}{x} \leq f(x) \leq e \cdot \ln \frac{x+1}{x}$$

(b) – On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x+1}{x} = +\infty$, donc par l'encadrement précédent on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$

– On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$,

donc par l'encadrement précédent on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$

4. (a) – Nous allons montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt = 0$

et pour cela on va commencer par encadrer l'intégrale pour 'l'évaluer'

– Soit $x > 0$

On a

$$\forall t \in [0,1], 0 \leq \frac{e^t}{(t+x)^2} \leq \frac{e}{x^2}$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt \leq \int_0^1 \frac{e}{x^2} dt = \frac{e}{x^2}$$

– On a donc pour tout $x > 0$

$$0 \leq x \cdot \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt \leq \frac{e}{x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt = 0$$

Ce qui signifie exactement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt}{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{càd} \quad \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b) Soit $x > 0$ fixé.

On réalise une intégration par parties en posant $\begin{cases} u'(t) &= e^t \\ v(t) &= \frac{1}{t+x} \end{cases}$ qui sont bien C^1 .

Cela donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{e^t}{t+x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt \\ &= \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(e-1)x}{x^2} = \frac{e-1}{x}$$

ce qui permet d'affirmer que

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$$

5. Soit $x > 0$.

– On commence par opérer le changement de variable affine proposé $\theta = t+x$ ($d\theta = dt$)

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{\theta-x}}{\theta} d\theta = e^{-x} \cdot \underbrace{\int_x^{x+1} \frac{e^\theta}{\theta} d\theta}_{=K(x)} = e^{-x} \cdot K(x) \quad (*)$$

– Notons $h : \theta \mapsto \frac{e^\theta}{\theta}$

La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$, elle possède donc des primitives sur cet intervalle.

Notons H l'une d'elles. On a ainsi $H' = h$, et H est C^1 sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\forall x > 0, K(x) = H(x+1) - H(x)$$

Ainsi la fonction K est aussi C^1 sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions C^1 .

– Avec $(*)$ on sait que f est un produit de fonctions C^1 donc f est C^1 sur $]0, +\infty[$, avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \cdot K(x) + e^{-x} \cdot K'(x) \\ &= -e^{-x} \cdot K(x) + e^{-x} \cdot (H'(x+1) - H'(x)) \\ &= -e^{-x} \cdot K(x) + e^{-x} \cdot (h'(x+1) - h'(x)) \\ &= -e^{-x} \cdot K(x) + e^{-x} \cdot \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \right) \\ &= -f(x) + \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} - \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt}$$

rem: on a prouvé que f vérifie l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)}$

21

1. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a+b}{2}$

2. On commence par utiliser l'égalité donnée

$$I = \int_a^b t \cdot f(t) \cdot dt = \int_a^b t \cdot f(a+b-t) \cdot dt$$

Dans cette seconde intégrale, on effectue le changement de variable affine $\theta = a+b-t$ (et ainsi $d\theta = -dt$.)

Cela donne

$$\begin{aligned} \int_a^b t \cdot f(a+b-t) \cdot dt &= - \int_b^a (a+b-\theta) \cdot f(\theta) \cdot d\theta \\ &= \int_a^b (a+b-\theta) \cdot f(\theta) \cdot d\theta \\ &= (a+b) \int_a^b f(\theta) d\theta - \underbrace{\int_a^b \theta \cdot f(\theta) \cdot d\theta}_{=I} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$I = (a+b) \int_a^b f(\theta) d\theta - I$$

càd

$$I = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(\theta) d\theta$$

3. – Notons $f : t \mapsto \sin^3(t)$

On commence par vérifier que c'est bien une application possible de cet exercice

$$\forall t \in [0, \pi], f(0+\pi-t) = \sin^3(\pi-t) = (\sin t)^3 = f(t)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \cdot \sin^3(t) dt &= \frac{0+\pi}{2} \cdot \int_0^\pi \sin^3(t) \cdot dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin^2 t \cdot dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(t) \cdot (1 - \cos^2 t) \cdot dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi \sin(t) - \sin(t) \cdot \cos^2 t \cdot dt \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\cos(t) + \frac{1}{3} \cdot \cos^3 t \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

rem: il était aussi possible de linéariser $\sin^3(t)$:

$$\sin^3(t) = \frac{3}{4} \cdot \sin(t) - \frac{1}{4} \cdot \sin(3t)$$

- 26** – La fonction f est définie et continue sur $I =]-\pi, +\pi[$ comme quotient de fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas
- elle possède des primitives sur cet intervalle
 - et les primitives sont égales à une constante près

– Notons F une primitive de f sur I .

On a donc pour tout $y \in I$, $F(y) = \int^y \frac{dx}{1 + \sin x}$

– En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$ on a

- d'une part, $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2(\frac{x}{2})\right) dx$ c'est à dire $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
- et d'autre part, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

– Et ainsi

$$\begin{aligned} F(y) &= \int^{\tan(y/2)} \frac{2dt}{(1+t^2)(1+\frac{2t}{1+t^2})} \\ &= \int^{\tan(y/2)} \frac{2dt}{1+2t+t^2} \\ &= 2 \int^{\tan(y/2)} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \left[\frac{-2}{1+t} \right]^{\tan(y/2)} \\ &= \frac{-2}{1+\tan(\frac{y}{2})} + Cste \end{aligned}$$

– On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$F : x \mapsto \frac{-2}{1 + \tan(\frac{x}{2})} + Cste$$

- 27** – Comme

$$4x - x^2 > 0 \iff x(4-x) > 0 \iff 0 < x < 4$$

La fonction f est définie et continue sur $I =]0,4[$ donc

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

– Notons F une primitive de f sur I .

On a donc pour tout $x \in I$, $F(y) = \int^y \frac{-dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

Le changement de variable $x = 2t + 2$ (et donc $dx = 2dt$) donne

$$F(y) = \int^{(y-2)/2} \frac{-2dt}{\sqrt{4(2t+2)-(2t+2)^2}} = \int^{(y-2)/2} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arccos t]^{(y-2)/2} = \arccos\left(\frac{y}{2} - 1\right) + Cste$$

– On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$F : x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + Cste$$

de nombreux autres exemples sont sur le site ;-)

- 28** – **Etude de e_n**

– On remarque que $e_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \exp(-\frac{k}{n})$

– Considérons $\boxed{\begin{array}{ccc} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \cdot e^{-t} \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$e_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

– On réalise une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$, et l'on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$.
(ces fonctions sont de classe C^1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cdot e^{-t} dt &= [-t \cdot e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt \\ &= -e^{-1} + [-e^{-t}]_0^1 \\ &= -2e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

– On a prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 1 - 2 \cdot e^{-1}$$

– **Etude de g_n**

– On remarque que $g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp(\frac{k}{n} \cdot \ln 2)$

– Considérons $\boxed{\begin{array}{ccc} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{t \cdot \ln 2} \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a, b] = [0, 1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$e_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt$$

– On a

$$\int_0^1 e^{t \cdot \ln 2} dt = \left[\frac{e^{t \cdot \ln 2}}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{e^{\ln 2} - 1}{\ln 2} = \frac{2 - 1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

– On a prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \frac{1}{\ln 2}$$

remarque: sur le site, d'autres sommes de Riemann sont disponibles :-))

36

1. Le théorème de Taylor-Young donne le résultat
2. Ici, on ne peut utiliser le même théorème car $\arcsin$ n'est pas dérivable en 1!
Notons $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$.
 - lorsque $y \rightarrow 1$, on a $x \rightarrow 0$
 - $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \sin(\arcsin y) = y$
 - Comme $x \rightarrow 0$, on peut utiliser le DL en 0 de référence

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

càd

$$2(1 - \cos x) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$$

Comme $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin y \geq 0$ car $\arcsin(y) \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a donc

$$\sqrt{2(1 - \cos x)} \sim x$$

– En remplaçant $\cos x$ par y cela donne bien

$$x \sim \sqrt{2(1 - y)}$$

38

On devra trouver $f(x) = x + 2 + \frac{7/2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

41

- Comme f est une fonction (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}$, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1$ existe avec $l_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2$ existe avec $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- Notons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$
 - On en déduit que forcément $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

– La fonction g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (car différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

Compte tenu des limites précédentes, le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

– Ceci prouve que $0 \in g(\mathbb{R})$ et ainsi qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}, g(x_0) = 0$

A ce stade, nous N'avons PAS utilisé la STRICTE décroissance

– Prouvons maintenant que g s'annule en une seule valeur, en tenant un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe $x_0 < x_1$ tels que $g(x_0) = 0$ et $g(x_1) = 0$.

Ceci signifie que $f(x_0) = x_0$ et $f(x_1) = x_1$,

et ainsi on a $f(x_0) = x_0 < x_1 = f(x_1)$.

Cependant comme f est strictement décroissante et que $x_0 < x_1$, on a forcément $f(x_0) > f(x_1)$! **contradiction!**

– Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x_0) = x_0}$

42

1. – Vérifions que g est périodique, de période 1.
Pour tout x réel

$$g(x+1) = f(x+1) - (x+1) \quad (1)$$

$$= (f(x) + 1) - x - 1 \quad (2)$$

$$= f(x) - x = g(x) \quad (3)$$

– Comme la fonction g est 1-périodique, on a $g(\mathbb{R}) = g([0, 1])$. **(remarque très importante!)**

– Comme la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que g est bornée sur $[0, 1]$

Comme $g(\mathbb{R}) = g([0, 1])$, on a donc montré que g est bornée sur $\mathbb{R}$ également

2. – On a montré en Q1 que g est bornée sur $\mathbb{R}$, càd

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq g(x) \leq M$$

ce qui revient à dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, m + x \leq f(x) \leq M + x} \quad (*)$$

– Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} m + x = +\infty$, on a donc forcément $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

– En divisant chaque membre de $(*)$ par $x > 0$ on a

$$\forall x > 0, \frac{m+x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{M+x}{x}$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M+x}{x} = 1,$$

on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\boxed{\text{Conclusion: on a montré que } f(x) \underset{+\infty}{\sim} x}$$

49

1. $\cos x = 0$ lorsque $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

L'ensemble de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

2. – La fonction f est 2π -périodique

– La fonction f est paire

On en déduit qu'il suffit de faire l'étude sur $[0, \pi] \cap D_f$

(La courbe sera symétrique par rapport à l'axe (Oy))

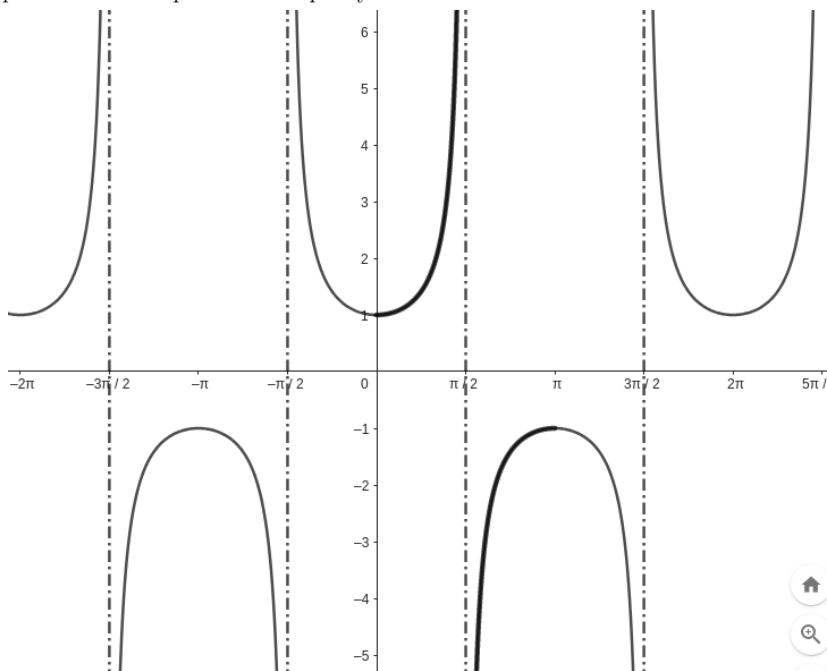
3. Sur $[0, \pi] - \{\pi/2\}$, la fonction f est de classe C^∞ comme quotient de fonctions C^∞ , le dénominateur ne s'annulant pas.

et l'on a $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \geq 0$ sur cet ensemble.

On obtient le TV suivant:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	1 $\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -1$	

ainsi que la courbe complète obtenue par symétrie et translation

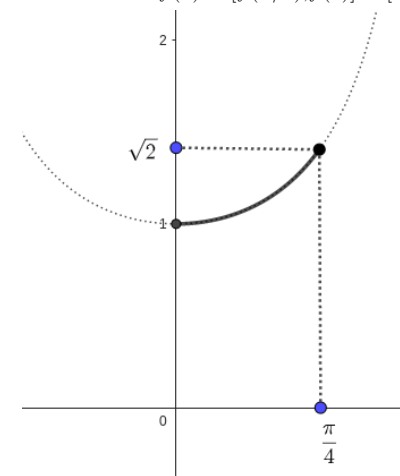


Question Bonus: sauriez-vous justifier que la courbe est symétrique par rapport au point $(0, \frac{\pi}{2})$

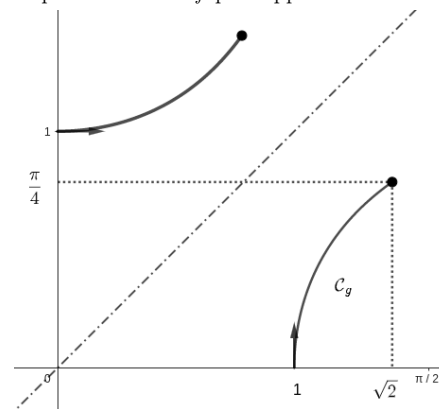
4. On va appliquer le **théorème de la bijection**

– La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0, \pi/4]$, on peut donc affirmer

que f réalise une bijection de I sur $J = f(I) = [f(\pi/4), f(0)] = [1, \sqrt{2}]$



5. – Le théorème de la bijection permet d'affirmer que g possède le même sens de variation que f , donc g est strictement décroissante de $J = [1, \sqrt{2}]$ sur $I = [0, \pi/4]$
- Le théorème de la bijection, toujours lui, permet de dire que la courbe représentative de g est symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$



rem: comme C_f possède une tangente horizontale en $(0, 1)$, on a une tangente horizontale à C_g en $(1, 0)$

6. Soit $x \in J$.

– Comme $g : J \rightarrow I$ et l'application réciproque de $f : I \rightarrow J$, on a l'équivalence pour $(x, t) \in J \times I$

$$g(x) = t \iff x = f(t)$$

– Soit $x \in J$.

On a $f(g(x)) = x$ par définition de l'application réciproque.

On a donc

$$\frac{1}{\cos(g(x))} = x$$

En passant à l'inverse, cela donne bien

$$\cos(g(x)) = \frac{1}{x}$$

– Soit $x \in J$.

On sait que $g(x) \in I = [0, \pi/4]$ et donc que $\sin g(x) \geq 0$.

On sait aussi que

$$\cos^2 g(x) + \sin^2(g(x)) = 1$$

Comme $\sin(g(x)) \geq 0$, on a donc

$$\sin(g(x)) = +\sqrt{1 - \cos^2(g(x))} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

7. – On applique (encore!) le théorème de la bijection, qui affirme que: si f est bijective de I_1 sur J_1 , dérivable sur I_1 , et de **dérivée non nulle** sur I_1 , alors f^{-1} est dérivable sur J_1 avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
- Ici, comme f est dérivable à dérivée non nulle sur $]0, \pi/4]$, on peut affirmer que g est dérivable sur $]1, \sqrt{2}]$
(ce qui se comprend bien sur le dessin précédent avec la tangente verticale uniquement au point (1,0))
- Soit $x \in J - \{1\} =]1, \sqrt{2}]$.
D'après la formule rappelée on a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{\cos^2(g(x))}{\sin g(x)}$$

En utilisant Q6, cela donne bien

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

51 1. Etude sur $]0, \pi]$ par les théorèmes généraux

La fonction f est C^1 (C^∞ même) sur l'intervalle $]0, \pi]$ d'après les théorèmes généraux, car c'est le quotient de fxs C^1 (C^∞) le dénominateur ne s'annulant pas.

Et l'on a par formules de dérivation

$$\forall x \in]0, \pi], f'(x) = \frac{4(x - \pi) \cdot \sin \frac{x}{2} + (2x\pi - x^2) \cdot \cos \frac{x}{2}}{8\pi \sin^2(\frac{x}{2})}$$

2. Etude du recollement en 0

Nous allons montrer que $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } 0 \\ f' \text{ est continue en } 0 \end{cases}$

(a) Montrons que f est dérivable en 0

– pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dots = \frac{x^2 - 2\pi x + 4\pi \sin \frac{x}{2}}{4\pi x \sin \frac{x}{2}}$$

On va maintenant déterminer un équivalent du numérateur et du dénominateur en 0^+ afin de trouver la limite de ce quotient en 0^+

– Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0$, on a $\sin \frac{x}{2} \sim_{0^+} \frac{x}{2}$
et donc

$$4\pi x \sin \frac{x}{2} \sim_{0^+} 4\pi x \frac{x}{2} = 2\pi x^2$$

– Comme on ne peut additionner les équivalents, on va utiliser un DL pour le numérateur.
On sait que $\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$
et donc

$$x^2 - 2\pi x + 4\pi \sin \frac{x}{2} = x^2 - 2\pi x + 4\pi \left(\frac{x}{2} + o(x^2)\right) = x^2 + o(x^2)$$

ce qui permet d'affirmer que

$$x^2 - 2\pi x + 4\pi \sin \frac{x}{2} \sim_{0^+} x^2$$

– On en déduit ainsi que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \sim_{0^+} \frac{x^2}{2\pi x^2} = \frac{1}{2\pi}$$

ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2\pi}$.

Comme cette limite est finie, on a montré que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2\pi}$

(b) Montrons que f' est continue en 0

Il s'agit que montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0)$.

Nous allons déterminer un équivalent de $f'(x)$ calculé en Q1

– On a déjà pour le dénominateur

$$8\pi \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim_{0^+} 8\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2\pi x^2$$

– Pour le numérateur, on passe par des DLS

$$4(x - \pi) \cdot \sin \frac{x}{2} + (2x\pi - x^2) \cdot \cos \frac{x}{2} = 4(x - \pi) \left(\frac{x}{2} + o(x^2)\right) + (2x\pi - x^2)(1 + o(x)) = x^2 + o(x^2)$$

et donc

$$4(x - \pi) \cdot \sin \frac{x}{2} + (2x\pi - x^2) \cdot \cos \frac{x}{2} \sim_{0^+} x^2$$

– On a ainsi

$$f'(x) \sim_{0^+} \frac{x^2}{2\pi x^2} = \frac{1}{2\pi}$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2\pi}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0)$, on a montré que f' est continue en 0

3. Conclusion: on a montré que f est C^1 sur $[0, \pi]$

54 1. Un développement limité donne $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

D'où $l = \frac{1}{3}$ et $f(x) - l \sim_{0^+} \frac{x^2}{15}$

2. On définit ainsi $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) f est évidemment continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Puisque

– f est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^*$ par les théorèmes généraux

– f est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3} = f(0)$

(on a effectué un prolongement par continuité en Q1)

(b) f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

En effet:

– sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^*$, f est dérivable (et même C^∞) d'après les théorèmes généraux

– f est dérivable en 0 car
pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{3}}{x} = \frac{x}{15} + o(\frac{1}{x})$$

On a ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

ceci prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$

(c) f' est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

En effet:

– Sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^*$, f' est continue (théorème généraux)

– f' est continue en 0

En effet:

Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{-2 \cdot \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3}$

$$\begin{aligned} \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x} &= -2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^{-3} \\ &= -2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \cdot x^{-3} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)^{-3} \\ &= \frac{-2}{x^3} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \left(1 - (-3) \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right) \\ &= \frac{-2}{x^3} (1 + o(x^3)) \\ &= \frac{-2}{x^3} + o(1) \end{aligned}$$

et ainsi on a montré que

$$f'(x) = o(1)$$

càd que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$

Conclusion: on a montré que f' est continue en 0

rem: on se rappelle que l'on NE peut PAS dériver les DLs, ceci signifie que l'on N'aurait PAS pu dire dès le départ que le DL de $f'(x)$ était celui obtenu à partir de $f(x)$ (càd $\frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(\frac{1}{x^2})$) en dérivant)

62

– Nous allons montrer que la fonction vectorielle f est continue sur $\mathbb{R}$ en montrant que ses fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}$

– On note $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin^2 t}{e^{t^2} - 1} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \begin{cases} t \cdot \sin \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

– Comme on a $e^{t^2} - 1 = 0 \iff t = 0$, on peut affirmer d'après les théorèmes généraux, **les fonctions x et y sont continues sur $\mathbb{R}^*$**

– Etude de la continuité de x en 0

– Comme $\sin t \sim_0 t$, on a $\sin^2 t \sim_0 t^2$

– Comme $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0$, on a $e^{t^2} = 1 + t^2 + o(t^2)$, et donc $e^{t^2} - 1 \sim_0 t^2$

– Ainsi $x(t) \sim_0 \frac{t^2}{t^2} = 1$, ce qui prouve que $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 1 = x(0)$

On a ainsi prouvé que **x est continu en 0**

– Etude de la continuité de y en 0

– On a $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$ comme **produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0**.

On a bien vérifié que $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = y(0)$, ce qui prouve **la continuité de y en 0**

– Conclusion: x et y sont continues sur $\mathbb{R}$, et ainsi f aussi

66

1. Il s'agit de bien décomposer la fonction

– La fonction $f_1 : t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = x^2(t) + y^2(t)$ est une fonction dérivable sur I .

On note également que f_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$ car $\forall t \in I, f(t) \neq 0$

Ainsi $f_1 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^{*+})$

– La fonction $f_2 : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ est une fonction dérivable.

$$u \longmapsto \sqrt{u}$$

(On rappelle que la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est PAS dérivable en 0)

– Par composition la fonction $f_3 : t \mapsto f_2(f_1(t)) = \|f(t)\|$ est ainsi dérivable sur I , puis précisément $f_3 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^{*+})$

– Comme la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$,

par composition la fonction $f_4 : t \mapsto \frac{1}{f_3(t)} = \frac{1}{\|f(t)\|}$ est dérivable sur I

– Ainsi $g : t \mapsto f_4(t) \cdot f(t)$ est dérivable, en tant que produit de deux fonctions dérivables, Ouf!

On a d'ailleurs

$$g'(t) = f_4'(t) \cdot f(t) + f_4(t) \cdot f'(t)$$

En détaillant les dérivées des différentes composées, cela donne

$$- f_4'(t) = - \frac{f_3'(t)}{f_3^2(t)}$$

- $f_3'(t) = \frac{f_1'(t)}{2 \cdot \sqrt{f_1(t)}}$
- $f_1'(t) = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$
- Ainsi $f_3'(t) = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}$
- et en reportant

$$g'(t) = -\frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|^3} \cdot f(t) + \frac{1}{\|f(t)\|} \cdot f'(t) = \frac{1}{\|f(t)\|^3} (\|f(t)\|^2 \cdot f'(t) - \langle f'(t), f(t) \rangle \cdot f(t))$$

2. Le vecteur g est un vecteur unitaire (de norme un).

La fonction h est donc la fonction numérique constante égale à un; sa dérivée est la fonction nulle!

$$\boxed{h' = 0}$$