

PT* 2025-26
DS 6 du 23 mars 2026

• **LA PRÉSENTATION, LA LISIBILITÉ, L'ORTHOGRAPHE, LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA CLARTÉ ET LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DES COPIES. EN PARTICULIER, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE** (*extrait de rapport de jury*)

• Les résultats sont à encadrer à la règle.

• Ce devoir est composé de 3 exercices

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}.y = \frac{1}{2}$ (E)

1. Pour tout x réel on pose $S(x) = \int_0^\infty \sin(tx).e^{-t^2}.dt$ et $C(x) = \int_0^\infty t.\cos(tx).e^{-t^2}.dt$

- (a) Justifier que les fonctions S et C sont bien définies toutes les deux sur \mathbb{R} .
- (b) Etudier la parité de la fonction C .
- (c) Montrer que la fonction S est dérivable sur \mathbb{R} et que $S' = C$
- (d) Montrer que S vérifie sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E).

2. Soit $K \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $H(x) = K.e^{-x^2/4}.\int_0^x e^{t^2/4}dt$

- (a) Justifier que la fonction H est bien définie sur \mathbb{R} tout entier.
- (b) Etudier la parité de la fonction H
- (c) Justifier que H est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}
- (d) Déterminer la valeur de K pour laquelle la fonction H vérifie sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E)

3. Montrer qu'il existe une valeur de K pour laquelle on a $H = S$

4. **(Question facultative, à ne traiter que si toutes les autres questions de ce devoir ont été traitées!)**

Montrer que S est C^∞ sur \mathbb{R} et donner l'expression de $S^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Notations et rappels

Si $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n .

On rappelle que, si $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et, si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Objectifs

Dans la première partie, on montre que, pour tout $x \in]-1, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$$

converge et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Dans la seconde partie, on utilise ce résultat pour étudier une expérience aléatoire.

Partie 1 : calcul de la somme d'une série

Dans les questions 1 et 2, k est un entier naturel fixé.

Q1. Montrer que

$$\binom{n+1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{n}{k}$$

Q2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$.

Lorsqu'elle est définie, on note $S_k(x)$ la valeur de la somme $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$.

Q3. Rappeler sans démonstration le domaine de définition de la fonction S_0 et, pour tout réel x dans ce domaine, la valeur de $S_0(x)$.

Q4. À l'aide d'un théorème de cours énoncé avec précision, justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q5. Montrer que, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Q6. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$,

$$S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x).$$

Q7. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$,

$$S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Partie 2 : étude d'une expérience aléatoire

On considère un dé équilibré comportant 1 face blanche et 5 faces noires. On réalise l'expérience aléatoire suivante.

1. On lance le dé jusqu'à obtenir la face blanche. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche.
2. Si N prend une valeur entière positive non nulle n lors de la première étape, on réalise alors une série de n lancers du dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face blanche a été obtenue lors de cette seconde série de lancers.

Q8. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N .

Q9. Calculer, en explicitant les calculs, l'espérance et la variance de N .

Q10. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, donner une expression de

$$P(N \leq n)$$

en fonction de n qui ne fasse pas intervenir le symbole Σ .

Q11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En distinguant les cas $k \leq n$ et $k > n$, déterminer la probabilité conditionnelle

$$P_{(N=n)}(X = k).$$

Q12. Démontrer que $P(X = 0) = \frac{5}{11}$ puis que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{36}{55} \left(\frac{5}{11}\right)^k$.

Q13. Vérifier que

$$\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1.$$

Q14. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Q15. Calculer $E(X(X - 1))$.

Q16. En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Exercice 3:

On s'intéresse aux fonctions réelles f (de première variable notée x , et de seconde variable notée y) qui vérifient simultanément les deux conditions suivantes:

- condition 1: f est C^1 sur \mathbb{R}^2 et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(y,x)$
- condition 2: f est C^1 sur \mathbb{R}^2 et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

1. La fonction $f_1 : (x,y) \mapsto xy$ vérifie-t-elle la condition 1? La condition 2?
Mêmes questions avec la fonction $f_2 : (x,y) \mapsto (x + y)^2$

2. En utilisant la définition de la dérivée partielle première, montrer que si f vérifie la condition 1 alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

3. Justifier que si f vérifie les conditions 1 et 2 alors f vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

4. (a) Justifier que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une bijection de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2
 $(x,y) \mapsto (u = x + y, v = x - y)$

(b) Justifier que φ^{-1} est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

(c) En introduisant la fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$, résoudre l'équation (E)

5. (a) En déduire les fonctions f qui satisfont les conditions 1 et 2

(b) **Application:**

Indiquer les fonctions f qui vérifient les conditions 1 et 2 telles que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Partie 1 : calcul d'une série

Q1.

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n+1)!k!(n-k)!}{n!k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n+1}{n+1} = 1$$

on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = 1$$

ce qui prouve bien :

$$\binom{n+1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \binom{n}{k}$$

Q2.

Soit $x \neq 0$ fixé. On pose $u_n = \binom{n}{k} x^n$.

On a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\binom{n+1}{k} x^{n+1}}{\binom{n}{k} x^n} \right| = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} |x| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |x|$$

d'après le théorème de d'Alembert sur les séries à termes positifs :

$$\begin{cases} |x| < 1 \Rightarrow \text{la série converge absolument} \\ |x| > 1 \Rightarrow \text{la série diverge grossièrement} \end{cases}$$

donc, d'après le lemme d'Abel, on peut dire que $\text{Rayon}(\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n) = 1$ Q3. On a $S_0(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ qui est une série de référence.Son ensemble de définition est $] - 1, 1[$ et $\forall x \in] - 1, 1[$, $S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Q4.

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on sait que

- S_0 est de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$
- sur cet intervalle, la dérivée est obtenue par dérivation terme à terme

Ainsi

$$\forall x \in] - 1, 1[, S_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

or

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\text{donc } \forall x \in] - 1, 1[, S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Q5.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

On a bien montré la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Q6.

Le rayon de convergence de S_k est $R = 1$; prenons donc $x \in] - 1, 1[$ et $k \leq n$.

$$\begin{aligned} S_{k+1}(x) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\ &= \sum_{m=n-1}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1} = x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \right) x^{m+1} \quad \text{d'après Q5} \\ &= x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k} x^{m+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^{m+1} \\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} x^{m+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^{m+1} \\ &= x \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} x^m + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m \end{aligned}$$

On a bien montré $\forall x \in] - 1, 1[$:

$$S_{k+1}(x) = x S_k(x) + x S_{k+1}(x)$$

Q7. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\forall x \in] - 1, 1[, S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Initialisation :

$$S_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \frac{x^0}{(1-x)^{0+1}} = \frac{1}{1-x}$$

donc la propriété est initialisée.

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
D'après la question précédente, on sait que

$$S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x) \quad \text{et donc} \quad S_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x}S_k(x)$$

Donc, par hypothèse de récurrence,

$$S_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} \times \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \quad S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Q8. La variable N est égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche. À chaque lancer la probabilité d'obtenir la face blanche est $\frac{1}{6}$.

Donc N suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$N \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$$

Q9. On sait que pour une variable N suivant une loi géométrique, les espérances $E(N)$ et $E(N^2)$ sont finies. Ensuite $\frac{5}{6} \in]-1, 1[$, donc $\frac{5}{6}$ appartient à l'ensemble de définition des fonctions S_k .

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \times 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{5} S_1\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{5} \times \frac{36}{1} \times \frac{1}{6} = 6 \end{aligned}$$

On retrouve le résultat du cours : $E(N) = \frac{1}{p} = 6$

Pour le calcul de la variance, on va exprimer n^2 en fonction des coefficients binomiaux astucieusement!

$$\begin{aligned} V(N) &= E(N^2) - (E(N))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(N=n) - 36 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + n) P(N=n) - 36 \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) P(N=n) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) - 36 \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + 6 - 36 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \times 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 30 \\ &= \frac{2}{5} S_2\left(\frac{5}{6}\right) - 30 \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} - 30 = \frac{2 \times 5^2 \times 6^3}{5 \times 6^2} - 30 = 60 - 30 \end{aligned}$$

On retrouve bien $V(N) = \frac{1-p}{p^2} = 30$

Q10. On a

$$(N \leq n) = \bigcup_{k=1}^n (N = k) \quad \text{union d'événements disjoints 2 à 2}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= \sum_{k=1}^n P(N = k) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{\ell} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \end{aligned}$$

Donc $P(N \leq n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Q11.

Si $n < k$, l'événement $(X = k) \cap (N = n)$ est impossible, et donc dans ce cas

$$P_{(N=n)}(X = k) = \frac{P(N = n \cap X = k)}{P(N = n)} = 0.$$

Si $n \geq k$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face blanche a été obtenue lorsque l'on lance n fois le dé : c'est donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$ et dans ce cas

$$P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

Pour résumer :

$$\begin{cases} \text{si } k > n : & P_{(N=n)}(X = k) = 0 \\ \text{si } k \leq n : & P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \end{cases}$$

Q12. Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $((N = n))_{n \geq 1}$ qui est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

Q13. Tout d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((N=n) \cap (X=0)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=0) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \binom{n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^k \\
&= \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} \\
&= \frac{5}{36} \times \frac{36}{11}
\end{aligned}$$

$$P(X=0) = \frac{5}{11}$$

Ce qui donne bien :

$$P(X=0) = \frac{5}{11}$$

Tout d'abord $\frac{25}{36}$ appartient bien à l'ensemble de définition des fonctions S_k .

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P((N=n) \cap (X=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{6}{5}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{25}{36}\right)^n = \frac{1}{5^{k+1}} S_k \left(\frac{25}{36}\right) \\
&= \frac{1}{5^{k+1}} \times \frac{\left(\frac{25}{36}\right)^k}{\left(1 - \frac{25}{36}\right)^{k+1}} \\
&= \frac{5^{2k} \times 36^{k+1}}{5^{k+1} \times 36^k \times 11^{k+1}} = \frac{5^k \times 36}{5 \times 11 \times 11^k}
\end{aligned}$$

On obtient bien, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) = \frac{36}{55} \left(\frac{5}{11}\right)^k$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) &= P(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \\
&= \frac{5}{11} + \frac{36}{55} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{11}\right)^k \\
&= \frac{5}{11} + \frac{36}{55} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{11}\right)^k - 1\right) \\
&= \frac{5}{11} + \frac{36}{55} \left(\frac{1}{1 - \frac{5}{11}} - 1\right) \\
&= \frac{5}{11} + \frac{36}{55} \left(\frac{11}{6} - 1\right) = \frac{5}{11} + \frac{36}{55} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{11} + \frac{6}{11}
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$$

Q14. Montrer que $E(X)$ existe revient à montrer que la série $\sum_{k \geq 1} k \cdot P(X=k)$ est ACV

$$\sum_{k \geq 1} k P(X=k) = \frac{36}{55} \sum_{k \geq 1} k \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^k$$

Or $\frac{5}{11} \in]-1, 1[$, et on reconnaît $S_1\left(\frac{5}{11}\right)$ qui est bien ACV.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{36}{55} S_1\left(\frac{5}{11}\right) \\
&= \frac{36}{55} \times \frac{\frac{5}{11}}{\left(\frac{6}{11}\right)^2} \\
&= \frac{36 \times 5 \times 11^2}{55 \times 11 \times 6^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Q15.

D'après le théorème du transfert, si la série suivante est ACV, on a

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)$$

or

$$k(k-1)P(X=k) = \frac{36}{55} \cdot k \cdot (k-1) \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^k = \frac{2 \cdot 36}{55} \binom{k}{2} \left(\frac{5}{11}\right)^k$$

Comme $\text{Rayon}(S_2) = 1$ et que $\left(\frac{5}{11}\right) \in]-1, 1[$, on est assuré de l'ACV de la série.

Et ainsi:

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \frac{36}{55} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{11}\right)^k \\ &= \frac{2.36}{55} \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{5}{11}\right)^k = \frac{2.36}{55} S_2\left(\frac{5}{11}\right) \\ &= \frac{2.36}{55} \times \frac{\left(\frac{5}{11}\right)^2}{\left(\frac{6}{11}\right)^3} = \frac{2.36.5^2.11^3}{55.11^2.6^3} = \frac{10}{6} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Q16. On a

$$E(X^2) = E(X(X-1) + X)$$

Comme $E(X(X-1))$ et $E(X)$ existent, on a $E(X^2)$ existe et

$$E(X^2) = E(X(X-1) + X) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{5}{3} + 1$$

et donc

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{3} + 1 - 1^2 = \frac{5}{3}$$

remarque: pour Q14 et Q16, il était aussi possible d'utiliser la caractérisation à l'aide de la fonction génératrice de X

CORRECTION DE L'EXERCICE 1

1. (a) • Montrons que pour tout x réel l'intégrale $S(x) = \int_0^{\infty} \sin(tx).e^{-t^2} dt$ est convergente.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
La fonction $s : t \mapsto \sin(tx).e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$; l'intégrale $S(x)$ est donc généralisée en $+\infty$.
On a $s(t) = o_{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ est absolument convergente, donc par théorème de comparaison on peut affirmer que $\int_0^{\infty} s(t)dt$ est absolument convergente.
- Montrons que pour tout x réel l'intégrale $C(x) = \int_0^{\infty} t \cdot \cos(tx).e^{-t^2} dt$ est convergente.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
La fonction $c : t \mapsto t \cdot \cos(tx).e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$; l'intégrale $S(x)$ est donc généralisée en $+\infty$.
On a $s(t) = o_{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ est absolument convergente, donc par théorème de comparaison on peut affirmer que $\int_0^{\infty} c(t)dt$ est absolument convergente.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme la fonction \cos est paire, on peut écrire

$$C(-x) = \int_0^{\infty} t \cdot \cos(-tx).e^{-t^2} .dt = \int_0^{\infty} t \cdot \cos(tx).e^{-t^2} .dt = C(x)$$

Conclusion: C est une fonction paire.

(c) Nous allons utiliser le **théorème de dérivation sous le signe intégral**.

Notons
$$f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto \sin(tx).e^{-t^2}$$

i) à x réel, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question précédente.

ii) à $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et l'on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t \cdot \cos(tx).e^{-t^2}$

iii) à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$

iv) posons
$$\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$r \mapsto t.e^{-t^2}$$

- la fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$
- la fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet:

Soit $T \geq 0$

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \left[\frac{-1}{2} e^{-t^2} \right]_0^T = \frac{1}{2} - \frac{e^{-T^2}}{2}$$

On a $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{e^{-T^2}}{2} = \frac{1}{2}$ (limite finie)

- On a $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$

En effet: soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

Comme $|\cos(tx)| \leq 1$ on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = t \cdot |\cos(tx)|.e^{-t^2} \leq t.e^{-t^2} = \varphi(t)$

Par théorème, on peut donc affirmer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R} ,

et l'on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{\infty} t \cdot \cos(tx).e^{-t^2} dt = C(x)$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} S'(x) + \frac{x}{2}S(x) &= \int_0^{\infty} t \cdot \cos(tx).e^{-t^2} + \frac{x}{2} \cdot \sin(tx).e^{-t^2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t \cdot \cos(tx).e^{-t^2} + \frac{x}{2} \cdot \sin(tx).e^{-t^2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{2} \cos(tx).e^{-t^2} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(Tx).e^{-T^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers zéro.

On a bien montré que S vérifie l'équation (E) sur \mathbb{R}

2. (a) • Notons $f : t \mapsto e^{-t^2}$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} donc d'après le **théorème fondamental de l'analyse** la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur \mathbb{R} . Il s'agit donc d'une fonction définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

• La fonction $G : x \mapsto e^{-x^2/4}$ est de classe C^{∞} sur \mathbb{R} comme composée de fonctions de classe C^{∞} .

• Ainsi la fonction H est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$H(-x) = K.e^{-(-x)^2/4} \cdot \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = K.e^{-x^2/4} \cdot \int_0^{-x} e^{-t^2} dt$$

En effectuant le changement de variable $\theta = -t$ (et donc $dt = -d\theta$) cela donne

$$H(-x) = K.e^{-x^2/4} \cdot \int_0^x e^{-(-\theta)^2} (-d\theta) = -K.e^{-x^2/4} \cdot \int_0^x e^{-\theta^2} d\theta = -H(x)$$

Conclusion: H est une fonction impaire

- (c) • On a par définition $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = G(x).F(x)$ càd $H = G.F$
- On sait que F est C^1 sur \mathbb{R} et que $F' = f$
Or la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} (car composée de fonctions C^∞)
Comme F' est C^∞ on a F qui est C^∞ aussi!
Comme G et F sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , on peut affirmer que H est C^∞ sur \mathbb{R} comme produit de fonctions de classe C^∞
- (d) On a $H'(x) = -\frac{x}{2}.K.e^{-x^2/4} + K.e^{-x^2/4}.e^{x^2/4} = -\frac{x}{2}.H(x) + K$

On trouve donc que H vérifie l'équation (E) lorsque $K = \frac{1}{2}$

3. On pose $K = \frac{1}{2}$.

Considérons le problème de Cauchy linéaire du premier ordre constitué de l'équation (E) et de la condition initiale $y(0) = 0$.

Par théorème, on sait qu'il existe une **unique** fonction y définie sur \mathbb{R} telle que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & y'(x) + \frac{x}{2}y(x) = \frac{1}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Comme S et H vérifient toutes les deux ce problème, on peut affirmer que $S = H$!

4. Il s'agit de procéder par récurrence en posant

$$\mathcal{P}_n : "S \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } S^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^n \cdot \sin(tx + n\pi/2) \cdot e^{-t^2} dt"$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3

1. • Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f_1(y,x) = yx = xy = f_1(x,y) \quad \text{et} \quad f_2(y,x) = (y+x)^2 = (x+y)^2 = f_2(x,y)$$

Ainsi, f₁ et f₂ vérifient la condition 1

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = x$

f₁ ne vérifie pas la condition 2

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 2(y+x) = 2(x+y)$

f₂ vérifie la condition 2

2. Soit f une fonction vérifiant la condition 1.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

D'après la définition de la dérivée partielle première, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h,x) - f(y,x)}{h}$$

Comme f vérifie la condition 1, on a $f(y+h,x) = f(x,y+h)$ et $f(y,x) = f(x,y)$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

3. Soit f une fonction vérifiant les conditions 1 et 2.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Comme f vérifie la condition 2, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

Comme f vérifie la condition 1, on a d'après Q2, $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

On a donc bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Conclusion: f vérifie l'équation (E) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

4. (a) φ est clairement une application linéaire: pour vérifier que φ est bijective il suffit de vérifier que son déterminant est non nul. Ce qui est le cas car $\det \varphi = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$
- (b) Pour établir l'expression de φ^{-1} on s'intéresse au système suivant avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

et donc $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(u,v) \mapsto (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$

Comme les fonctions coordonnées $(u,v) \mapsto \frac{u+v}{2}$ et $(u,v) \mapsto \frac{u-v}{2}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , on peut dire que f φ^{-1} est C^1 sur \mathbb{R}^2

- (c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x,y) = g(u,v) = g(x+y, x-y)$.

On a

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, x-y) + 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, x-y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, x-y) - 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, x-y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

Et ainsi

$$(E) \iff \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$$

La solution générale de cette dernière équation est $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $K \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $(u,v) \mapsto K(u)$

Les fonctions f de classe C^1 qui vérifient (E) sont ainsi définies par

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $K \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $(x,y) \mapsto K(x+y)$

5. (a) • Soit f une fonction qui vérifie les conditions 1 et 2.

D'après Q3, on sait que f vérifient (E), et **donc nécessairement** il existe une fonction $K \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = K(x+y)$

- **Réciproquement**, soit f une fonction telle qu'il existe une fonction $K \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = K(x+y)$.

– f vérifie la condition 1, car f est C^1 sur \mathbb{R}^2 comme composée de fonctions de classe C^1 , et l'on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(y,x) = K(y+x) = K(x+y) = f(x,y)$

– f vérifie la condition 2, car f est C^1 sur \mathbb{R}^2 comme composée de fonctions de classe C^1 , et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = K'(x+y)$.

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = K'(y+x) = K'(x+y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y)$

Conclusion : les fonctions f qui vérifient les conditions 1 et 2 sont définies par

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } K \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (x, y) \longmapsto K(x + y) \end{array}}$$

(b) Avec les notations précédentes, cela revient à déterminer K tel que $\forall x \in \mathbb{R}, K'(2x) = \frac{1}{1+x^2}$

En posant $t = 2x$, la condition s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}, K'(t) = \frac{1}{1 + (\frac{t}{2})^2}$

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$K(t) = \int^t \frac{d\theta}{1 + (\frac{\theta}{2})^2} = \int^{t/2} \frac{2dw}{1+w^2} = 2 \arctan \frac{t}{2} + Cste$$

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto 2 \cdot \arctan \left(\frac{x + y}{2} \right) + C \end{array}}$