Transformée de Laplace

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions et l'applique à la résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Notations

- On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs complexes. On admet que $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
- Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-pt}\,dt$$
converge.

Articulation des parties

Le résultat de la partie I est utilisé dans les parties II et III. Certains résultats de la partie II sont utilisés dans la partie IV. Les parties II et III sont indépendantes.

I Questions préliminaires

Q0. Démontrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Q1. Démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées :

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\lim\limits_{t\to+\infty}(u(t)v(t))$ existe et est finie, alors les intégrales
$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt$$
sont de même nature. En cas de convergence,
$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt$$
où
$$[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0).$$

II Transformée de Laplace, généralités

II.A –

Q2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$
converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

On définit ainsi une fonction F, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Q3. Démontrer que l'application
$$\mathcal{L} : \begin{cases} E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \\ f \mapsto F \end{cases}$$
est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la transformation de Laplace et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la transformée de Laplace de f.

II.B – Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}_+$.

II.B.1)

Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.

On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$.

Q5. Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.

Q7. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

II.B.2)

Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto e^{-at+ibt}$.

Q8. Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.

Q9. En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.

II.B.3)

Q10. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.

Q11. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ n'appartenant pas à E.

II.C – Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0$.

Q12. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, que $f'' \in E$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)e^{-pt} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$.

Q13. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

III Approximation de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment par des fonctions polynomiales

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|\right) = 0.$$

III.A – Une famille de fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$. On note

$$B_n^k : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{cases}$$

Q14. Donner le degré de B_n^k.
Q15. Pour tout $t \in [0,1]$, calculer $\sum_{k=0}^{n} B_n^k(t)$.

III.B – Deux résultats généraux

Q16. Montrer que, si Z est une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(Z) \geq 0$. En déduire que, si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
Q17. Question de cours. X étant une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, rappeler la définition de sa variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et démontrer que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Q18. En déduire que $|\mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

III.C –

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in [0,1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, t). On pose

$$X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t).$$

Q19. Rappeler la valeur de l'espérance de S_n ainsi que sa variance.
Q20. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = \frac{t(1-t)}{n}.$$

Q21. En citant de manière explicite les théorèmes utilisés, montrer qu'il existe $M_\varphi \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M_\varphi |b-a|.$$

Q22. En utilisant les résultats des questions 18, 21 et 16 puis 20, montrer que

$$|\mathbb{E}(X_n)| \leq \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}.$$

Q23. En citant le théorème utilisé, en déduire que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| \leq \frac{M_\varphi \sqrt{t(1-t)}}{n}.$$

Q 24. Justifier que la fonction

$$w : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t(1-t) \end{cases}$$

admet un maximum et déterminer la valeur de ce maximum.

Q 25. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \geq 1}$ telle que la suite $\left(\sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

IV Injectivité de la transformation de Laplace et applications

IV.A

[Q 26-34.] On suppose avoir montré l'implication ($\forall f \in E,\ \mathcal{L}(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$).
Que peut-on en déduire sur l'application $\mathcal{L}$?

IV.B

Le but de cette sous-partie est de résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{IV.1}$$

IV.B.1) Résolution classique

Q 35. Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'équation $y''(t)+2y'(t)+2y(t) = t+1$ de la forme $y(t) = at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Q 36. Résoudre alors le problème (IV.1).

IV.B.2) Résolution utilisant la transformation de Laplace

On suppose que y est une solution du problème (IV.1) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie II.C.

Q 37. Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{1 + p + p^2}{p^2}$.

Q 38. Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{*+}, \qquad \frac{1 + p + p^2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p + 1)^2 + 1}.$$

Q 39. En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de $\mathcal{L}$ et les résultats de la sous-partie II.B.

Q 40. Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème (IV.1).

IV.C

Le but de cette sous-partie est de déterminer les fonctions x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ solutions du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 7y(t) \end{cases} \tag{IV.2}$$

et vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

IV.C.1) Résolution classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de sorte que le système (IV.2) s'écrit matriciellement :

$$X'(t) = AX(t).$$

Q 41. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Q 42. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$. Déterminer les fonctions u et v et en déduire les fonctions x et y vérifiant le système (IV.2) et les conditions initiales imposées.

IV.C.2) Résolution en utilisant la transformation de Laplace

On suppose que x et y sont solutions du problème (IV.2), vérifiant en plus les conditions de la sous-partie II.C.

Q 43. Montrer alors que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{-3}{(p+1)(p+4)} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{p-2}{(p+1)(p+4)} \end{cases}$$

Q 44. Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{b}{p+4} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{c}{p+1} + \dfrac{d}{p+4} \end{cases}$$

Q 45. En déduire une expression de x et de y.

Q 46. Établir la réciproque et conclure.

Quelques points de cours évoqués

1. théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées
2. Espérance, variance pour une variable aléatoire réelle finie (càd d'ensemble image fini)
3. Inégalité des accroissements finis
4. Diagonalisation d'une matrice
5. Définition et caractérisation de l'injectivité d'une application
6. Equation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre

Pierre-Simon de Laplace ou Pierre-Simon Laplace, comte Laplace, puis 1er marquis de Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge et mort le 5 mars 1827 à Paris, est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

Q 0. On va montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$
— $E \subset C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ par définition
— E est non vide car la fonction constante nulle appartient à E.
En effet :

$$\forall p > 0, \int_0^\infty |0|.e^{-pt}.dt = \int_0^\infty 0.dt = 0$$

— E est stable par combinaison linéaire.
En effet : Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Notons $h = \lambda.f + g$.
Soit $p > 0$.
On a

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ 0 \leqslant |h(t)|.e^{-pt} = |\lambda.f(t) + g(t)|.e^{-pt} \leqslant |\lambda|.|f(t)|.e^{-pt} + |g(t)|.e^{-pt}$$

Comme $\int_0^\infty |f(t)|.e^{-pt}.dt$ et $\int_0^\infty |g(t)|.e^{-pt}.dt$ convergent, par théorème de comparaison, on peut dire que $\int_0^\infty |h(t)|.e^{-pt}.dt$ converge

Q 1. [**On suppose que la formule d'intégration par parties est vraie sur un segment, pour des fonctions complexes.**]

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, toutes les intégrandes considérées sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Les intégrales manipulées n'ont donc qu'une seule singularité : $+\infty$.

Soit $A > 0$, par intégration par parties sur le segment $[0, A]$ (les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ dessus) :

$$\int_0^A u'(t)v(t)\, dt = [u(t)v(t)]_0^A - \int_0^A u(t)v'(t)\, dt.$$

Par hypothèse, ce crochet admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$, cette limite étant notée $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$. Ainsi, on a l'équivalence

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A u'(t)v(t)\, dt \quad \text{existe et est finie} \iff \lim_{A\to+\infty} \int_0^A u(t)v'(t)\, dt \quad \text{existe et est finie}$$

les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\, dt$ sont donc de même nature.

En cas de convergence, on obtient donc immédiatement par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\, dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\, dt.$$

Q 2. Soit $p > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, par opération sur les fonctions continues.

Par positivité de l'exponentielle, pour tout $t \geq 0$, $|f(t)\mathrm{e}^{-pt}| = |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}$.

Par hypothèse, comme $f \in E$, alors $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\, dt$ converge.

Q 3. Si $f \in E$, on a bien $\mathcal{L}(f)$ qui est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a bien $\lambda f + \mu g \in E$.

De plus, par linéarité de l'intégrale généralisée convergente, pour $p > 0$,

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{e}^{-pt}\, dt = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\, dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\, dt.$$

On a donc bien écrit : pour tout $p > 0$,

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda\mathcal{L}(f)(p) + \mu\mathcal{L}(g)(p).$$

On a donc l'égalité des fonctions :

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g).$$

Ainsi, $\mathcal{L}$ est linéaire.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, si $p > 0$, alors par croissances comparées :

$$t^n e^{-pt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$

Par comparaison de fonctions intégrables, la fonction $t \mapsto t^n e^{-pt}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} |t^n| e^{-pt}\, dt$ converge donc.

Ainsi, $f_n \in E$.

Q 5. On a immédiatement par le cours $F_0(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \dfrac{1}{p}$.

On le retrouve par primitivation directe : pour $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^A = \frac{1 - e^{-pA}}{p}.$$

Lorsque $A \to +\infty$, on à la valeur demandée par passage à la limite.

Q 6. On utilise le théorème d'intégration par parties généralisé avec $v : t \mapsto t^n$ et $u : t \mapsto -\dfrac{1}{p} e^{-pt}$. Ces fonctions u, v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a par croissances comparées $u(t)v(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'on a $u' : t \mapsto e^{-pt}$ et $v' : t \mapsto nt^{n-1}$. Remarquons qu'alors $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = 0$.

On a alors (la première intégrale convergeant, ce qui assure la convergence de la deuxième),

$$F_n(t) = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\, dt = 0 - \left(-\frac{n}{p}\right) \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt}\, dt,$$

soit

$$F_n(p) = \frac{n}{p} F_{n-1}(p).$$

Q 7. On fixe $p > 0$, et on montre le résultat demandé par récurrence simple sur n.

Pour $n = 0$, on a déjà obtenu $F_0(p) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{0!}{p^{0+1}}$.

Soit $n \geq 1$, supposons que $F_{n-1}(p) = \dfrac{(n-1)!}{p^n}$. On a alors par la relation précédente :

$$F_n(p) = \frac{n}{p} \cdot \frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

On a donc bien démontré par récurrence simple que pour tout $n \geq 0$: $F_n(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Q 8. La fonction $t \mapsto e^{-a+ibt}$ est bien continue, comme exponentielle complexe d'une fonction continue. Soit $p > 0$, on a

$$|f_{a,b}(t)|\, e^{-pt} = e^{-(a+p)t}.$$

Or, comme $a \geq 0$ et $p > 0$, on a $a + p > 0$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_{a,b}(t)|\, e^{-pt}\, dt$ converge (intégrale de référence), donc $f_{a,b} \in E$.

On a ensuite par primitivation directe, pour $A > 0$:

$$\int_0^A f_{a,b}(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^A e^{-(a+p-ib)t}\, dt = \left[-\frac{1}{a+p-ib} e^{-(a+p-ib)t}\right]_0^A = \frac{1 - e^{-(a+p-ib)A}}{a+p-ib}$$

Or, on a

$$|e^{-(a+p-ib)A}| = |e^{-(a+p)A}\, e^{-ibA}| = e^{-(a+p)A},$$

et comme $a + p > 0$, on a $e^{-(a+p)A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par passage à la limite lorsque $A \to \infty$:

$$F_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{a+p-ib}.$$

Q 9. On a pour $t \in \mathbb{R}$, par les formules d'Euler :

$$g_{a,b}(t) = \mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{e}^{ibt} + \mathrm{e}^{-ibt}}{2} = \frac{1}{2}\left(f_{a,b}(t) + f_{a,-b}(t)\right)$$

Ainsi, $g_{a,b} = \frac{1}{2}f_{a,b} + \frac{1}{2}f_{a,-b}$.

On obtient de même $h_{a,b} = \frac{1}{2i}f_{a,b} - \frac{1}{2i}f_{a,-b}$.

Comme $f_{a,b}$ et $f_{a,-b}$ appartiennent à E et comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $g_{a,b}$ et $h_{a,b}$ appartiennent à E.

On a alors par linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(p) &= \frac{1}{2}F_{a,b}(p) + \frac{1}{2}F_{a,-b}(p) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+p-ib} + \frac{1}{a+p+ib}\right) \\ &= \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2} \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned} H_{a,b}(p) &= \frac{1}{2i}F_{a,b}(p) - \frac{1}{2i}F_{a,-b}(p) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{a+p-ib} - \frac{1}{a+p+ib}\right) \\ &= \frac{b}{(a+p)^2+b^2} \end{aligned}$$

Remarque : on aurait aussi pu démontrer, en utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$, que pour une fonction $f \in E$, $\mathcal{L}(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(\mathcal{L}(f))$ (idem pour la partie imaginaire), puis observer que $g_{a,b} = \mathrm{Re}(f_{a,b})$ et $h_{a,b} = \mathrm{Im}(f_{a,b})$.

Q 10. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue et bornée. Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0 : |f(t)| \leq M$.

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $p > 0$:

$$|f(t)|\mathrm{e}^{-pt} \leq M\mathrm{e}^{-pt}.$$

Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} M\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, $f \in E$.

Q 11. La fonction exponentielle (exp) est bien continue, or pour $p = \frac{1}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t/2}\mathrm{d}t$$

diverge (intégrale de référence).

On vient donc de trouver une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui n'appartient pas à E : la fonction exponentielle.

Q 12. On applique le théorème d'intégration par parties pour f et à $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$. Ces deux fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $v' : t \mapsto -p\mathrm{e}^{-pt}$ et par hypothèse on a bien $f(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a notamment, comme $v(0) = 1$, $[f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} = -f(0)$.

Alors, toutes les intégrales écrites ici convergeant :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = [f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

soit exactement

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

Q 13. La fonction f' vérifie donc les hypothèses de la question précédente : pour tout $p > 0$ fixé, on a donc par linéarite de $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0) = p(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)) - f'(0) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

Q 14. La fonction $t \mapsto t^k$ est de degré k, et la fonction $t \mapsto (1-t)^{n-k}$ est de degré $n-k$, donc par produit B_n^k est de degré n.

Q 15. Par la formule du binôme de Newton (sur les réels) : pour tout $t \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} B_n^k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = (t+1-t)^n = 1.$$

Q 16. En notant $Z(\Omega) = \{z_1, \ldots, z_p\} \subset \mathbb{R}^+$ l'image (finie) de Z, on a alors (on utilise la définition d'espérance de première année) :

$$E[Z] = z_1 P(Z = x_1) + \cdots + z_p P(Z = x_p).$$

Or, tous ces termes sont positifs, donc $E[Z] \geq 0$.

On utilise maintenant la linéarité de l'espérance : comme X, Y sont finies, alors $Y - X$ est aussi finie, de plus $Y - X \geq 0$, donc $E[Y - X] \geq 0$, donc $E[Y] - E[X] \geq 0$, donc $E[Y] \geq E[X]$.

Q 17. On a par linéarité de l'espérance, et vu que l'espérance d'une constante est égale à cette constante,

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2. \end{aligned}$$

Q 18. Comme on a toujours $(X - E[X])^2 \geq 0$, et comme $(X - E[X])^2$ est une variable aléatoire finie, alors

$$V(X) \geq 0,$$

donc

$$E[X]^2 \leq E[X^2],$$

ce qui donne donc par croissance de la fonction racine carrée :

$$|E[X]| \leq \sqrt{E[X^2]}.$$

Q 19. On a $E[S_n] = nt$ et $V(S_n) = nt(1-t)$.

Q 20. On a donc par linéarité de l'espérance et en utilisant $E[t] = t$ (loi constante) :

$$E\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = \frac{1}{n}E(S_n) - t = \frac{nt}{n} - t = 0.$$

De plus, comme $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = t$, alors

$$E\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{t(1-t)}{n}.$$

Q 21. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, φ' est continue sur ce segment.

Par **le théorème des bornes atteintes**, φ' est bornée sur $[0,1]$: il existe donc $M_\varphi > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$: $|\varphi'(t)| \leq M_\varphi$.

On peut alors utiliser **l'inégalité des accroissements finis** sur $[0,1]$:
pour tout $a, b \in [0,1]$, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq M_\varphi |b - a|$.

rem :On pouvait aussi écrire en utilisant le théorème fondamental du calcul différentiel : $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$*, puis majorer cet intégrale par l'inégalité triangulaire intégrale*

Q 22. On a par la question Q 18. :

$$|E(X_n)| \leq \sqrt{E(X_n^2)}.$$

Or,

$$X_n^2 = \left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right|^2$$

Or, on a toujours $0 \leq S_n \leq n$, donc $0 \leq \dfrac{S_n}{n} \leq 1$, donc on peut appliquer la question précédente :

$$\left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right| \leq M_\varphi \left|\frac{S_n}{n} - t\right|.$$

Ainsi, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$\left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right|^2 \leq M_\varphi^2 \left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2.$$

Ainsi, par croissance de l'espérance (Q 16.) :

$$E(X_n^2) \leq M_\varphi^2 E\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right)$$

soit par les valeurs obtenues en Q 20.

$$E(X_n^2) \leq M_\varphi^2 \frac{t(1-t)}{n}.$$

Par croissance de la racine carrée, comme $M_\varphi > 0$ et $t(1-t) \geq 0$, on a donc

$$|E(X_n)| \leq \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}.$$

Q 23. On applique **la formule de transfert**, appliquée à S_n et à la fonction $t \mapsto \varphi\left(\dfrac{t}{n}\right)$:

$$E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t).$$

On a donc par linéarité de l'espérance :

$$E(X_n) = E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t) - \varphi(t).$$

On obtient donc en appliquant le résultat obtenu à la question précédente :

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| \leq M_\varphi \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

IV Injectivité de la transformation de Laplace et applications

IV.A

Q26-Q34. $\mathcal{L}$ est ainsi une application linéaire dont le noyau est réduit au vecteur nul, on en déduit que $\boxed{\mathcal{L} \text{ est injective}}$

IV.B

Le but de cette sous-partie est de résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{IV.1}$$

On sait par théorème que ce problème de Cauchy linéaire du second ordre possède une unique solution

IV.B.1) Résolution classique

Q 35. On considère une fonction y de la forme $y : t \mapsto at + b$. On a alors pour tout t, $y'(t) = a$ et $y''(t) = 0$. Ainsi,

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2at + 2b + 2a.$$

On voit immédiatement que $y : t \mapsto \frac{t}{2}$ est solution.

Q 36. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui a pour racines $-1 \pm i$ pour solutions simples. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (\lambda \cos(t) + \mu \sin(t))e^{-t} + \frac{t}{2}.$$

Soit y une telle fonction. On a $y(0) = \lambda$, donc $y(0) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$. On considère donc que $\lambda = 0$, donc $y : t \mapsto \mu \sin(t)e^{-t} + \frac{t}{2}$. On calcule alors $y'(t) = \mu \cos(t)e^{-t} - \mu \sin(t)e^{-t} + \frac{1}{2}$. On a alors $y'(0) = \mu + \frac{1}{2}$, donc $y'(0) = 1$ si et seulement si $\mu = \frac{1}{2}$. Ainsi, l'unique solution à ce problème de Cauchy est

$$t \mapsto \frac{1}{2} \sin(t)e^{-t} + \frac{t}{2}.$$

IV.B.2) Résolution utilisant la transformation de Laplace

On suppose que y est une solution du problème (IV.1) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie II.C.

Q 37. Comme

$$\mathcal{L}(y')(p) = p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) = p\mathcal{L}(y)$$

et

$$\mathcal{L}(y'')(p) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - py(0) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - 1,$$

on a par linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + 2y) = \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = (p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1.$$

Or, avec $d : t + 1$, on a $d = f_0 + f_1$, donc par linéarité de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}(d)(p) = F_0(p) + F_1(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}.$$

On obtient donc

$$(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2},$$

soit

$$(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1 + p + p^2}{p^2}.$$

Q 38. On trouve

$$\frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Q 39. On a donc linéarité de $\mathcal{L}$ et les résultats obtenus en II.C :

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1} = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}G_{1,1} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(f_1 + h_{1,1})\right).$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc

$$y = \frac{1}{2}(f_1 + h_{1,1}),$$

soit

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}(t + \sin(t)e^{-t}).$$

Q 40. Cette fonction y est bien de classe $\mathcal{C}^2$, par opérations usuelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On a bien $y(0) = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$y'(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(t)e^{-t} - \sin(t)e^{-t}),$$

donc $y'(0) = 1$, et

$$y''(t) = \frac{1}{2}(-\sin(t) - \cos(t) - \cos(t) + \sin(t))e^{-t} = -\cos(t)e^{-t}.$$

On a donc bien

$$y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = -\cos(t)e^{-t} + 1 + \cos(t)e^{-t} - \sin(t)e^{-t} + t + \sin(t)e^{-t} = t + 1.$$

Ainsi, y est bien solution du problème de Cauchy (IV.1).

IV.C

Le but de cette sous-partie est de déterminer les fonctions x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ solutions du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 7y(t) \end{cases} \tag{IV.2}$$

et vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

rem : ici, on n'a pas de théorème de cours qui nous permete de parler d'existence et/ou unicité de la solution.

IV.C.1) Résolution classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de sorte que le système (IV.2) s'écrit matriciellement :

$$X'(t) = AX(t).$$

Q 41. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 3 \\ -6 & X+7 \end{vmatrix} = X^2 + 5X + 4 = (X+1)(X+4)$.
Comme χ_A est scindé à racines simples, d'après **la condition suffisante de diagonalisabilité**, on sait que A est diagonalisable et que chaque sous-espace propre est de dimension un. On voit immédiatement que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $E_1(A) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

Une recherche classique de sous-espace propre donne Ainsi, $E_4 = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

Une matrice de passage vers une base de diagonalisation est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Q 42. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$. Déterminons les fonctions u et v et en déduisons les fonctions x et y vérifiant le système (IV.2) et les conditions initiales imposées. On voit que pour tout t,

$$U'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}PDP^{-1}X(t) = DU(t).$$

Ainsi, X est solution si et seulement si U vérifie le système différentiel $U' = DU$, donc si et seulement si $u' = -u$ et $v' = 4v$, donc si et seulement si u est de la forme $u : t \mapsto \lambda e^{-t}$ et v est de la forme $t \mapsto \mu e^{-4t}$. Comme $X = PU$, on a $x = u + v$ et $y = u + 2v$, donc les solutions du système différentiel sont les couples de fonctions (x, y) de la forme

$$x : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-4t} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto \lambda e^{-t} + 2\mu e^{-4t}.$$

Pour deux fonctions de cette forme, on a alors $x(0) = \lambda + \mu$ et $y(0) = \lambda + 2\mu$. On a alors $y(0) - x(0) = \mu$ et $2x(0) - y(0) = \lambda$. Ainsi, (x, y) est solution si et seulement si $\mu = 1$ et $\lambda = -1$. Le couple solution est donc

$$x : t \mapsto -e^{-t} + e^{-4t} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto -e^{-t} + 2e^{-4t}.$$

IV.C.2) Résolution en utilisant la transformation de Laplace

On suppose que x et y sont solutions du problème (IV.2), vérifiant en plus les conditions de la sous-partie II.C.

Q 43. Montrons alors que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{-3}{(p+1)(p+4)} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{p-2}{(p+1)(p+4)} \end{cases}$$

Soit $p > 0$. On a donc

$$\mathcal{L}(x')(p) = p\mathcal{L}(x)(p) - x(0) = p\mathcal{L}(x)(p)$$

et

$$\mathcal{L}(y')(p) = p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) = p\mathcal{L}(y)(p) - 1,$$

donc par linéarité de $\mathcal{L}$ on obtient le système

$$\begin{cases} p\mathcal{L}(x)(p) &= 2\mathcal{L}(x)(p) - 3\mathcal{L}(y)(p) \\ p\mathcal{L}(y)(p) - 1 &= 6\mathcal{L}(x)(p) - 7\mathcal{L}(y)(p) \end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} (p-2)\mathcal{L}(x)(p) + 3\mathcal{L}(y)(p) &= 0 \\ -6\mathcal{L}(x)(p) + (p+7)\mathcal{L}(y)(p) &= 1 \end{cases}.$$

En effectuant l'opération $6L_1 + (p-2)L_2$, on obtient

$$(18 + (p-2)(p+7))\mathcal{L}(y)(p) = p - 2.$$

Or, $(18 + (p-2)(p+7)) = p^2 + 5p + 4 = (p+1)(p+4)$, donc on a bien

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+4)}.$$

En effectuant l'opération $(p+7)L_1 - 3L_2$, on obtient

$$((p-2)(p+7) + 18)\mathcal{L}(x)(p) = -3,$$

soit

$$\mathcal{L}(x)(p) = \frac{-3}{(p+1)(p+4)}.$$

Q 44. Trouvons $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{b}{p+4} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{c}{p+1} + \dfrac{d}{p+4} \end{cases}$$

On écrit $-3 = (p+1) - (p+4)$, donc en simplifiant

$$\mathcal{L}(x)(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{1}{p+4}.$$

De même, on écrit $p - 2 = 2(p+1) - (p+4)$, donc

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{2}{p+4}.$$

Q 45. En déduisons une expression de x et de y. On observe donc que

$$\mathcal{L}(x) = -G_{1,0} + G_{4,0} = \mathcal{L}(-g_{1,0} + g_{4,0}).$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc

$$x = -g_{1,0} + g_{4,0},$$

soit

$$x : t \mapsto -e^{-t} + e^{-4t}.$$

De même,

$$\mathcal{L}(y) = -G_{1,0} + 2G_{4,0} = \mathcal{L}(-g_{1,0} + 2g_{4,0}).$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc

$$y = -g_{1,0} + 2g_{4,0},$$

soit

$$y : t \mapsto -e^{-t} + 2e^{-4t}.$$

Q 46. Ces deux fonctions x, y sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient bien $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = e^{-t} - 4e^{-4t} = 2(-e^{-t} + e^{-4t}) - 3(-e^{-t} + 2e^{-4t}) = 2x(t) - 3y(t)$$

et

$$y'(t) = e^{-t} - 8e^{-4t} = 6(-e^{-t} + e^{-4t}) - 7(-e^{-t} + 2e^{-4t}) = 6x(t) - 7y(t).$$

Le couple des solutions de ce problème de Cauchy est donc bien composé des deux fonctions trouvées précédemment, ce qui conclut ce problème.