

## CALCUL de L'INTEGRALE DE DIRICHLET

Dans ce problème,  $f$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

### I. Etude d'une fonction

- 1) Montrer que  $f$  est continue en 0
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et préciser  $f'(0)$ .  
 $f$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$ ?
- 3) Montrer que  $f$  est une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$ ,  
et tracer son tableau de variation en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

### II. Convergence de l'intégrale de Dirichlet

- 1) Montrer que l'intégrale  $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$  est une intégrale convergente.
- 2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  est une intégrale convergente.

$$\text{Dans la suite, on note } I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

### III. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \cdot \frac{\sin t}{t} dt$

On pose également  $h(x) = I - g(x)$

- 1) Montrer que  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .
- 2) a) Rappeler l'inégalité des accroissements finis, puis montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$   
b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
- 3) a) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur tout segment inclus dans  $]0, +\infty[$ .  
b) En déduire que  $g$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$   
c) Montrer que pour tout  $x > 0, g'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$   
d) Donner l'expression explicite de  $g(x)$  pour  $x > 0$
- 4) Montrer que pour tout  $x > 0, h(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t} \cdot \sin(t) \cdot dt$   
puis que  $h(x) = \int_0^\infty f(u) \cdot \sin\left(\frac{u}{x}\right) du$
- 5) Soit  $x > 0$ .  
Montrer que  $\left| \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \right| \leq 1$  puis que  $h(x) = x + x \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du$
- 6) En déduire que pour tout  $x > 0, |h(x)| \leq 2x$
- 7) En déduire que  $I = \frac{\pi}{2}$

#### IV. Une partie indépendante des autres

- 1) Rappeler le développement en série entière de la fonction  $\sin$  (on précisera le rayon de convergence, ainsi que le domaine de convergence).
- 2) On considère la fonction  $\varphi$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $\varphi$  est développable en série entière, puis donner son développement en série entière.

- 3) Dans cette question,  $N$  désigne un entier strictement positif, et  $x$  est un réel quelconque. On introduit le polynôme  $P_N$  tel que :

$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X}{\pi}\right) \left(1 + \frac{X}{\pi}\right) \left(1 - \frac{X}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{X}{2\pi}\right) \cdots \left(1 - \frac{X}{N\pi}\right) \left(1 + \frac{X}{N\pi}\right).$$

Quel est le coefficient, noté  $\alpha_N$ , de  $X^2$  dans  $P_N(X)$ ?

- 4) On admet, pour tout réel non nul  $x$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(x) = \varphi(x).$$

On désigne par  $\alpha$  le coefficient de  $x^2$  dans le développement en série entière de  $\varphi$ , et on suppose, de plus, que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = \alpha.$$

En déduire, grâce au développement en série entière de  $\varphi$ , la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

- 5) En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ , ainsi que celle de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

### Quelques points de cours évoqués

1. Inégalité des accroissements finis
2. Définition de la dérivabilité
3. Propriétés de la fonction arctan
4. Changement de variable dans une intégrale généralisée
5. Intégrale faussement généralisée
6. Inégalité triangulaire intégrale
7. Séries entières de référence
8. Théorème de dérivabilité sous le signe intégral
9. Calcul de  $\int_0^{\infty} e^{-xt} \cdot \sin(t) \cdot dt$

I. 1) On sait que  $e^X = 1 + X + o_0(X)$ .

On a donc ici au voisinage de zéro

$$f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} = \frac{1 - (1 - t + o_0(t))}{t} = 1 + o_0(1)$$

Ainsi  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$ , ce qui prouve que  $f$  est continue en 0

2) – On sait que  $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o_0(X^2)$ .

On a donc

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{(1 - e^{-t}) - t}{t^2} = \frac{1 - (1 - t + \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)) - t}{t^2} = \frac{-1}{2} + o_0(1)$$

Ainsi  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{-1}{2}$  (limite finie).

ce qui prouve que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = \frac{-1}{2}$

– Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f$  est le quotient de fonctions dérivables ( $C^\infty$  même) le dénominateur ne s'annulant pas, donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$

– Ainsi au final  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

3) – Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f'(t) = \frac{e^{-t} \cdot (t+1) - 1}{t^2}$ .

Notons pour tout  $t \neq 0$ ,  $g(t) = e^{-t} \cdot (t+1) - 1$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $g'(t) = -t \cdot e^{-t}$ .

$t$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(t)$	+		-
$g$	$-\infty$	0	-1

On a donc sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f'(t) = \frac{g(t)}{t^2} \leq 0$ .

Comme on a  $f'(0) = \frac{-1}{2}$ , on a bien  $f'(t) \leq 0$  sur  $\mathbb{R}$ , et donc  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f$	$+\infty$	0

II. 1) La fonction  $i : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est continue sur  $]0,1]$ , donc  $I_1$  est généralisée en sa borne inférieure.

On a  $\frac{\sin t}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$  ce qui prouve que  $\lim_{t \rightarrow 0} i(t) = 1$  (limite finie).

Ainsi la fonction  $i$  est prolongeable par continuité en 0,

et donc  $I_1$  est une intégrale faussement généralisée

2) Soit  $X \geq 1$ .

On réalise une intégration par parties en posant  $u(t) = \frac{1}{t}$  et  $v(t) = -\cos t$ , qui sont bien deux fonctions  $C^1$

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[ \frac{-\cos t}{t} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt = \cos(1) - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt \quad (*)$$

– On a  $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\cos X}{X} = 0$  comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0

– L'intégrale  $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$  est une intégrale absolument convergente.

En effet

$$\forall t \geq 1, \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

et comme  $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$  est une intégrale de référence convergente,

par comparaison on en déduit que  $\int_1^\infty \frac{|\cos t|}{t^2} dt$  converge.

– Sachant que  $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$  converge, on peut affirmer que  $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$  existe et est finie.

– Au final, on a bien montré que  $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t} dt$  existe et est finie, ce qui est la définition

de  $I_2$  est une intégrale convergente

III. 1) **Il s'agit de montrer que pour tout  $x > 0$  fixé, l'intégrale  $g(x)$  est convergente.**

Soit  $x > 0$  fixé.

La fonction  $i_x : t \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{\sin t}{t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

L'intégrale  $g(x)$  est donc doublement généralisée.

– Etude de la borne 0.

On a  $i_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1 \cdot t}{t} = 1$  ce qui prouve comme précédemment que

l'intégrale  $\int_0^1 i_x(t) dt$  est faussement généralisée en 0

– Etude de la borne  $+\infty$ .

Comme  $x > 0$ , d'après le théorème des croissances comparées, on a  $i_x(t) = o_\infty\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

Comme  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable en  $+\infty$ , par comparaison on a  $i_x$  intégrable en  $+\infty$ ,

et ainsi  $\int_1^\infty i_x(t) dt$  converge

2) a) – **Inégalité des accroissements finis.**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$

telle qu'il existe un réel  $M$  tel que  $|f'| \leq M$ .

Alors  $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$

– La fonction sin est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ .

On en déduit donc que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ :

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leq 1 \cdot |t - 0| \quad \text{càd} \quad |\sin(t)| \leq |t|$$

b) Soit  $x > 0$ .

On a d'après l'inégalité ci-dessus

$$\forall t > 0, |i_x(t)| = e^{-xt} \cdot \frac{|\sin t|}{|t|} \leq e^{-xt}$$

Ainsi inégalité triangulaire intégrale et croissance de l'intégrale

$$|g(x)| = \left| \int_0^\infty i_x(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |i_x(t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-xt} dt$$

or

$$\int_0^\infty e^{-xt} dt = \left[ \frac{-e^{-xt}}{x} \right]_0^\infty = \frac{1}{x} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-xt}}{x} = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}$$

Comme

$$\forall x > 0, |g(x)| \leq \frac{1}{x}$$

et que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

On a bien  $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0}$

3) a) *On va bien sûr utiliser le théorème de dérivabilité sous le signe intégral avec une domination locale.*

Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Posons  $\boxed{k : ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}}$   
 $(x, t) \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{\sin t}{t}$

i) à  $x \in ]0, +\infty[$  fixé, la fonction  $k_x : t \mapsto k(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  d'après QIII1)

ii) à  $t \in ]0, +\infty[$  fixé, la fonction  $k_t : x \mapsto k(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  d'après les théorèmes généraux, et  $\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \cdot \sin t$ .

iii) à  $x \in ]0, +\infty[$  fixé, la fonction  $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$

iv) **hypothèse de domination avec**  $x \in [a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Posons  $\boxed{\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}}$   
 $t \mapsto e^{-at}$

– La fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  (intégrale de référence)

–  $\forall (x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[, \left| \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$

En effet:

Soit  $x \in [a, b]$  et  $t > 0$ .

On a donc

$$at \leq xt \leq bt$$

et donc

$$-bt \leq -xt \leq -at$$

En composant par la fonction exponentielle qui est croissante

$$e^{-bt} \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

Comme on a évidemment

$$|\sin t| \leq 1$$

On en déduit que

$$|-e^{-xt} \cdot \sin(t)| = e^{-xt} \cdot |\sin t| \leq e^{-at} \cdot 1 = \varphi(t)$$

Par application du théorème, on peut affirmer que:

$$g \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b], \text{ et sur cet intervalle } g'(x) = - \int_0^\infty e^{-xt} \cdot \sin t \cdot dt$$

- b) On a montré que  $g$  est  $C^1$  sur tout segment  $[a,b]$  inclus dans  $]0, +\infty[$ , donc  $g$  est  $C^1$  sur  $\bigcup_{[a,b] \subset ]0, +\infty[} [a,b] = ]0, +\infty[$ ,

et que  $\forall x > 0, g'(x) = - \int_0^\infty e^{-xt} \cdot \sin t \cdot dt$

- c) Calcul classique par double intégrations par parties ou en passant en complexe.

- d) Par primitivation, on en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\forall x > 0, g(x) = -\arctan(x) + C$ .

Avec cette expression, on a  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\frac{\pi}{2} + C$ ,

et donc d'après QIII.2)b), on en déduit que  $C = \frac{\pi}{2}$ .

Conclusion:  $\forall x > 0, g(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$

rem: on pourrait aussi écrire  $\forall x > 0, g(x) = \arctan \frac{1}{x}$

- 4) – Soit  $x > 0$ .

Par simple linéarité pour les intégrales convergentes, on a

$$h(x) = I - g(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^\infty e^{-xt} \cdot \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t} \cdot \sin(t) dt$$

- Soit  $x > 0$ .

On effectue le changement de variable affine  $u = \varphi(t) = x \cdot t$  qui est  $C^1$ , strictement croissant et réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$ . ( $du = x \cdot dt$ )

Comme  $h(x)$  est une intégrale convergente, on sait que celle obtenue par changement de variable sera encore convergente et lui sera égale.

D'où

$$h(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u}}{\frac{u}{x}} \cdot \sin\left(\frac{u}{x}\right) \cdot \frac{du}{x} = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u}}{u} \cdot \sin\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du = \int_0^\infty f(u) \cdot \sin\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du$$

- 5) a) – Soit  $x > 0$ .

D'après l'inégalité triangulaire intégrale, on a

$$\left| \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \right| \leq \int_0^\infty \left| f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) \right| du$$

– Soit  $x > 0$ .

On a

$$\forall u > 0, \left| f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) \right| \leq |f'(u)| = -f'(u) \quad \text{car } f' \leq 0 \text{ d'après QI3}$$

On a donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^\infty \left| f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) \right| du \leq \int_0^\infty -f'(u) du = [-f(u)]_0^\infty = f(0) - \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = 1 - 0 = 1$$

– Au final, on a bien montré que  $\boxed{\forall x > 0, \left| \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \right| \leq 1}$

b) On va réaliser une intégration par parties (*en faisant attention car ce sont des intégrales généralisées*).

Soit  $x > 0$ .

Soit  $U \geq 0$ .

En posant  $v(t) = f(t)$  et  $w(t) = x \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^U f(u) \cdot \sin\left(\frac{u}{x}\right) dt &= \left[ -x \cdot f(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \right]_0^U + x \int_0^U f'(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du \\ &= -x \cdot f(U) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) + x \cdot f(0) + x \int_0^U f'(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du \\ &= -x \cdot f(U) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) + x + x \int_0^U f'(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du \end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre  $U \rightarrow +\infty$

– déjà  $\lim_{U \rightarrow \infty} \int_0^U f'(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du = h(x)$

– ensuite  $\lim_{U \rightarrow \infty} f(U) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) = 0$  comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.

– on en déduit donc que forcément  $\lim_{U \rightarrow \infty} \int_0^U f'(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du = \int_0^\infty f'(u) \cdot \cos\left(\frac{u}{x}\right) \cdot du$  existe et est finie

Le passage à la limite donne donc bien l'égalité demandée.

6) Soit  $x > 0$ .

On applique simplement l'inégalité triangulaire à l'égalité ci-dessus

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left| x + x \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \right| \\ &\leq |x| + \left| x \cdot \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \right| \\ &= |x| + |x| \cdot \left| \int_0^\infty f'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \right| \\ &= |x| + |x| \cdot 1 \quad \text{d'après l'inégalité ci-dessus} \\ &= 2x \quad (\text{car } x > 0) \end{aligned}$$

7) – On sait que

$$\forall x > 0, I = h(x) + g(x) = h(x) + \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad (*)$$

- On a  $\forall x > 0, |h(x)| \leq 2x$  et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ , on a déjà  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0}$
- Ensuite, grâce à la continuité de la fonction arctan en 0, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan x = \arctan 0 = 0$
- En effectuant un passage à la limite dans l'égalité (\*), on a donc

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) + \frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

IV. 1)  $\boxed{\text{Rayon}=\infty}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- 2) - Soit  $x \neq 0$ .  
On a d'après le développement précédent

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

- On remarque que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 0^{2n}}{(2n+1)!} = 1$$

- On a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$$

- 3) En regroupant les facteurs 2 à 2 cela donne

$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{X^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{X^2}{3^2\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{X^2}{N^2\pi^2}\right)$$

Le coefficient de  $X^2$  dans ce polynôme est donc

$$\alpha_N = - \left( \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \dots + \frac{1}{N^2\pi^2} \right) = -\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$$

- 4) On a d'après le DSE  $\alpha = \frac{-1}{3!} = \frac{-1}{6}$ .

Comme  $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = \alpha$ , on en déduit que  $\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} = \frac{-1}{6}$  c'est à dire que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Conclusion  $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

- 5) - Notons  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$   $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

- On remarque que

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot n^2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot S = \frac{\pi^2}{24}$$

ainsi

$$S_1 = S - S_2 = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$$

- On remarque aussi que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -S_1 + S_2 = -\frac{\pi^2}{12}$$