

révisions PROBABILITES - MATRICES

Les 3 parties de ce problème sont totalement indépendantes, à l'exception la question 5 de la partie 2 qui utilise la partie 1.

1 Etude d'une matrice

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_4 la matrice identité d'ordre 4.

1. Calcul de M^n
 - (a) Déterminer un réel k tel que $M^2 - 2M + kI_4 = 0$
En déduire que les valeurs propres possibles de M sont -1 et 3
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P = X^2 - 2X - 3$
 - (c) En déduire une expression très simple de M^n comme combinaison linéaire de M et I_4
2. On souhaite retrouver le résultat précédent d'une autre manière.

Pour cela on considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Enoncer le théorème qui permet d'affirmer que M et N sont deux matrices diagonalisables
- (b) On souhaite déterminer les éléments propres de N
 - i. Quel est le rang de la matrice N ? En déduire que 0 est valeur propre et donner $\dim E_0(N)$.
 - ii. En déduire que χ_N est de la forme $X^4 + a.X^3$ avec $a \in \mathbb{R}$
 - iii. Déterminer la valeur de a
 - iv. Quelle relation a-t-on entre les éléments propres de M et ceux de N ?
 - v. Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $M = P.D.P^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

P est-elle forcément une matrice orthogonale?

- vi. Soit $n \in \mathbb{N}$.
En écrivant D^n comme une combinaison linéaire de D et I_4 , justifier que

$$M^n = \frac{3^n - (-1)^n}{4} . M + \frac{3^n + 3 \cdot (-1)^n}{4} . I_4$$

2 Lapin probabiliste

Un lapin se déplace sur 4 points: A, B, C et D .

Au départ il est au point A .

Chaque minute, le lapin se déplace et se retrouve de manière équiprobable sur un des trois autres points libres.

La situation est modélisée par un espace probabilisé (Ω, P, \mathcal{T})

Pour tout n , on note

- A_n l'événement "au bout de n minutes le lapin se trouve au point A "
- B_n l'événement "au bout de n minutes le lapin se trouve au point B "
- C_n l'événement "au bout de n minutes le lapin se trouve au point C "
- D_n l'événement "au bout de n minutes le lapin se trouve au point D "

• $X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \end{pmatrix}$. On a ainsi $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On note $K_n = \begin{pmatrix} P(A_{n+1}|A_n) & P(A_{n+1}|B_n) & P(A_{n+1}|C_n) & P(A_{n+1}|D_n) \\ P(B_{n+1}|A_n) & P(B_{n+1}|B_n) & P(B_{n+1}|C_n) & P(B_{n+1}|D_n) \\ P(C_{n+1}|A_n) & P(C_{n+1}|B_n) & P(C_{n+1}|C_n) & P(C_{n+1}|D_n) \\ P(D_{n+1}|A_n) & P(D_{n+1}|B_n) & P(D_{n+1}|C_n) & P(D_{n+1}|D_n) \end{pmatrix}$

1. Sans expliciter les valeurs des coefficients de K_n justifier que la somme de chaque colonne vaut 1.
En déduire que 1 est valeur propre de K_n
2. Justifier que $X_{n+1} = K_n . X_n$ pour tout entier n
3. Déterminer avec précision les deux premiers coefficients de la première ligne de K_n , puis écrire la matrice K_n .
On devra trouver que la matrice est en fait indépendante de n et on la notera dorénavant plus simplement K .
4. Donner l'expression de X_n en fonction de K, n et X_0 .
5. A l'aide de la première partie du problème, montrer que

$$X_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3(-1/3)^n \\ 1 - (-1/3)^n \\ 1 - (-1/3)^n \\ 1 - (-1/3)^n \end{pmatrix}$$

6. Au bout de n minutes, en quel point a-t-on la plus grande probabilité de trouver le lapin?
7. On note Y_n [resp. Z_n la variable égale à 1 si A_n [resp. B_n] est réalisé et 0 sinon
 - (a) Déterminer la loi de Y_n et celle de Z_n
 - (b) i) Montrer l'équivalence

$$Y_n \text{ et } Z_n \text{ sont indépendantes} \iff P(Y_n = 1 \cap Z_n = 1) = P(Y_n = 1) . P(Z_n = 1)$$

- ii) Les variables aléatoires Y_n et Z_n sont-elles indépendantes?

- (c) On note pour tout entier $n, S_n = \sum_{k=0}^n Y_k$.

Que représente S_n ?
Déterminer $E(S_n)$

8. Sachant que le lapin est de retour en A après 3 minutes, déterminer la probabilité qu'il soit passé par le point B .
9. On note X la variable aléatoire égale à la minute du premier retour du lapin en A .
 - (a) Donner $X(\Omega)$
 - (b) Justifier que $\forall k \geq 2, P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{3}$
 - (c) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
On pourra introduire la variable aléatoire $\bar{X} = X - 1$
10. Dans cette question, on suppose que le lapin n'est pas forcément en A au départ mais que, arrivant en parachute, il part de manière équiprobable d'un des 4 points.
Déterminer X_n pour tout n dans ce cas.

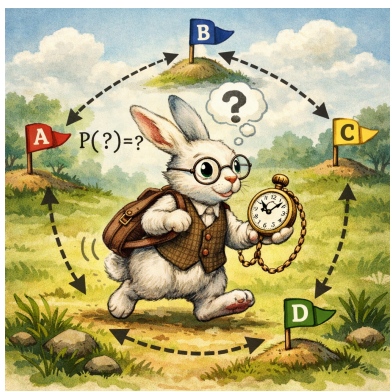
3 Matrice de covariance

Soient V_1, V_2 et V_3 trois variables aléatoires réelles

On considère la matrice $A = (cov(V_i, V_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$

On souhaite montrer que les valeurs propres de A sont toutes positives.

1. A quelle condition la matrice A est-elle diagonale?
2. A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable?
3. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Z = x.V_1 + y.V_2 + z.V_3$
 - (a) Calculer $V(Z)$ en fonctions des coefficients de la matrice A
 - (b) Calculer $X^T.A.X$
 - (c) En déduire que les valeurs propres de A sont toutes positives ou nulles



Quelques points de cours évoqués

1. Quelle inégalité a-t-on entre $m(\lambda)$ et $\dim E_\lambda$ lorsque λ est une valeur propre?
2. Théorème de la division euclidienne pour les polynômes
3. Théorème spectral
4. Définition du rang d'une matrice?
5. Définition de variables aléatoires indépendantes?
6. Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour une matrice A ?
7. $\sum_{k=0}^n q^k = ?$
8. Que sait-on de la probabilité conditionnelle P_A ?

CORRECTION

CORRECTION

1. Etude d'une matrice

1. (a) Le calcul donne $M^2 - 2M = 3I_4$ donc $k = -3$

Soit λ une valeur propre de M .

Il existe alors une matrice unicolonne X **non nulle** telle que $MX = \lambda X$

On a donc $M^2 X = M(MX) = M(\lambda X) = \lambda(MX) = \lambda^2 X$.

Comme $M^2 - 2M - 3I_4 = 0$ on a

$$(M^2 - 2M - 3I_4)X = M^2 X - 2MX - 3X = \lambda^2 X - 2\lambda X - 3X = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)X = 0$$

Comme $X \neq 0$ on a forcément $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$

Conclusion: les seules valeurs propres possibles de M sont -1 et 3

- (b) D'après le **théorème de la division euclidienne**,

il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n = P.Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(P) = 2$.

Il existe donc des réels a_n et b_n tels que

$$X^n = (X^2 - 2X - 3).Q + a_n.X + b_n$$

En remplaçant en particulier X par -1 et 3 cela donne le système

$$\begin{cases} (-1)^n &= -a_n + b_n \\ 3^n &= 3a_n + b_n \end{cases}$$

dont la résolution donne
$$\begin{cases} a_n &= \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ b_n &= \frac{3^n + 3 \cdot (-1)^n}{4} \end{cases}$$

Le reste de la division euclidienne de X^n par P est donc

$$\frac{3^n - (-1)^n}{4}.X + \frac{3^n + 3 \cdot (-1)^n}{4}$$

- (c) En remplaçant X par A dans l'égalité $X^n = (X^2 - 2X - 3).Q + a_n.X + b_n$ cela donne

$$M^n = a_n.M + b_n.I_4 = \frac{3^n - (-1)^n}{4}.M + \frac{3^n + 3 \cdot (-1)^n}{4}.I_4$$

Commentaire: question classique: recherche de M^n connaissant un polynôme annulateur de A

2. (a) Les matrices M et N sont symétriques à **coefficients réelles**.

D'après le **théorème spectral**

- les valeurs propres sont toutes réelles
- les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux
- la matrice est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

- (b) i. $\text{rg}(N) = 1$

Le théorème du rang appliqué à N donne $\dim \ker N = 4 - 1 = 3 \neq 0$.

On en déduit que 0 est valeur propre de N et $\dim E_0(N) = \dim \ker N = 3$

- ii. • Comme N est une matrice d'ordre 4, on sait que son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré 4.

C'est à dire de la forme $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

- Comme $\dim E_0(N) = 3$ on sait que la multiplicité de 0 est au moins égale à 3 (rem: comme on sait par ailleurs que N est diagonalisable, on peut même affirmer que c'est égal!)

Ceci signifie que l'on peut factoriser χ_N par X^3 à coup sûr!

On a donc forcément $b = c = d = 0$.

Conclusion: il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_N = X^4 + aX^3$

- iii. Plusieurs possibilité s'offre à nous.

Par exemple:

On sait que $\text{tr}(N)$ est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

On sait déjà que 0 est valeur propre triple.

En notant λ la dernière valeur propre de N on a donc $0 + 0 + 0 + \lambda = \text{tr}(N) = 4$ et donc $\lambda = 4$.

Ainsi 4 est racine de χ_N , d'où $a = -4$

Ou bien, on pouvait remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre évident de N associé à la

valeur propre 4.

Et donc 4 est racine de χ_N , ce qui donne encore $a = -4$

- iv. On a $N = M + I_4$.

On a donc les équivalences suivantes, avec $X \neq 0$

$$NX = \lambda X \iff MX + X = \lambda X \iff MX = (\lambda - 1)X$$

Ceci permet d'affirmer que

λ est valeur propre de N ssi $\lambda - 1$ est valeur propre de M

et que

$$E_\lambda(N) = E_{\lambda-1}(M)$$

c'est à dire que M et N ont des valeurs propres différentes mais ont les mêmes sous-espaces propres!

- v. • On sait que $sp(N) = \{0, 4\}$ donc $sp(M) = \{-1, 3\}$
- On sait que $E_0(N) = E_{-1}(M)$ et que $\dim E_0(N) = 3$ donc $\dim E_{-1}(M) = 3$

• On sait que $E_4(N) = E_3(M)$ et que $\dim E_4(N) = 1$ donc $\dim E_3(M) = 1$

• On savait déjà que M était diagonalisable,

on le retrouve ici car $\dim E_{-1}(M) + \dim E_3(M) = 4$.

On peut affirmer que M est semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, c'est à dire qu'il

existe une matrice inversible P telle que $M = P.D.P^{-1}$.

La matrice P n'est pas forcément orthogonale! Le théorème spectral affirme seulement qu'il en existe au moins une qui est orthogonale!

vi. Soit $n \in \mathbb{N}$

• On suit l'indication, on cherche donc $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D^n = x_n.D + y_n.I_4$.

On a

$$D^n = x_n.D + y_n.I_4 \iff \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = x_n \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + y_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} (-1)^n = -x_n + y_n \\ 3^n = 3x_n + y_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ y_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} \end{cases}$$

• Ainsi

$$M^n = (PDP^{-1})^n = P.D^n.P^{-1} = P(x_n D + y_n I_4).P^{-1}$$

$$= x_n P D P^{-1} + y_n P I_4 P^{-1}$$

$$= x_n M + y_n I$$

$$= \frac{3^n - (-1)^n}{4}.M + \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}.I_4$$

3. Lapin probabiliste

1. • A n fixé, (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'événements car au bout de n minutes le lapin se trouve en un des 4 points A, B, C, D et uniquement en un de ses points.

• On sait que P_{A_n} est une probabilité (théorème du cours).

Comme $(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1})$ est un système complet d'événements, on a alors

$$P_{A_n}(A_{n+1}) + P_{A_n}(B_{n+1}) + P_{A_n}(C_{n+1}) + P_{A_n}(D_{n+1}) = 1$$

Ceci prouve que la somme des coefficients de la première colonne de K_n vaut 1.

rem: c'est évidemment vraie aussi pour les autres colonnes

• On sait classiquement que si la somme de chaque ligne vaut une constante α alors α est valeur

propre associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut donc affirmer que 1 est valeur propre de K_n^T . Or on sait que K_n et K_n^T ont même polynôme caractéristique et donc même valeurs propres.

Conclusion: 1 est valeur propre de K_n

2. Comme (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales permet d'écrire que pour tout événement E on a

$$P(E) = P(E|A_n)P(A_n) + P(E|B_n)P(B_n) + P(E|C_n)P(C_n) + P(E|D_n)P(D_n)$$

En écrivant successivement cette égalité pour $E = A_{n+1}$ puis $E = B_{n+1}$ puis $E = C_{n+1}$ puis $E = D_{n+1}$, on trouve bien les égalités obtenues en développant le produit matriciel $K_n X_n$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

• $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ car si le lapin est en A au bout de n minutes, à la minute suivante il sera en un autre point que A

• $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ car si le lapin est en B au bout de n minutes, à la minute suivante il sera en un des points A, C ou D , et ce de manière équiprobable

$$K_n = K = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} M$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = K^n.X_0 = \frac{1}{3^n} M^n X_0$

5.

$$X_n = \frac{1}{3^n} M^n X_0 = \frac{1}{4} \left[\frac{3^n - (-1)^n}{3^n} M X_0 + \frac{3^n + 3(-1)^n}{3^n} X_0 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{3^n - (-1)^n}{3^n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3^n + 3(-1)^n}{3^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3(-1/3)^n \\ 1 - (-1/3)^n \\ 1 - (-1/3)^n \\ 1 - (-1/3)^n \end{pmatrix}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a les équivalences

$$P(A_n) > P(B_n) \iff 1 + 3 \left(\frac{-1}{3} \right)^n > 1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \iff \left(\frac{-1}{3} \right)^n > 0 \iff n \text{ est pair}$$

Conclusion:

• si n est pair le lapin a plus de chance d'être en A

• si n est impair le lapin a moins de chance d'être en A et a autant de chance d'être en B, C ou D

7. (a) Comme $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$Y_n \text{ est une variable de Bernoulli de paramètre } P(Y_n = 1) = P(A_n) = \frac{1 + 3(-1/3)^n}{4}.$$

Par le même raisonnement,

$$Z_n \text{ est une variable de Bernoulli de paramètre } P(Z_n = 1) = P(B_n) = \frac{1 - (-1/3)^n}{4}$$

- (b) • Commençons par établir que si Y et Z sont deux variables de Bernoulli, alors on a

$$Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes} \iff P(Y = 1 \cap Z = 1) = P(Y = 1).P(Z = 1)$$

- i) On suppose que Y et Z sont indépendantes

Par définition, ceci signifie que

$$\forall y \in Y(\Omega), \forall z \in Z(\Omega), P(Y = y \cap Z = z) = P(Y = y).P(Z = z)$$

c'est en particulier vrai pour $y = z = 1$

- ii) On suppose que $P(Y = 1 \cap Z = 1) = P(Y = 1).P(Z = 1)$

– Montrons que $P(Y = 0 \cap Z = 1) = P(Y = 0).P(Z = 1)$

Comme $((Y = 0), (Y = 1))$ est un système complet d'événements, on a

$$P(Y = 0 \cap Z = 1) + P(Y = 1 \cap Z = 1) = P(Z = 1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(Y = 0 \cap Z = 1) &= P(Z = 1) - P(Y = 1 \cap Z = 1) \\ &= P(Z = 1) - P(Y = 1).P(Z = 1) \\ &= (1 - P(Y = 1)).P(Z = 1) \\ &= P(Y = 0).P(Z = 1) \end{aligned}$$

– Montrons que $P(Y = 1 \cap Z = 0) = P(Y = 1).P(Z = 0)$
même idée

– Montrons que $P(Y = 0 \cap Z = 0) = P(Y = 0).P(Z = 0)$
même idée

- On remarque déjà que pour tout entier n on a A_n et B_n qui sont incompatibles, donc

$$P(Y_n = 1 \cap Z_n = 1) = P(A_n \cap B_n) = 0$$

- Pour $n = 0$, on a $P(Z_n = 1) = 0$ donc d'après l'équivalence ci-dessus, on peut affirmer que Y_0 et Z_0 sont indépendantes.
- Pour $n = 1$, on a $P(Y_n = 1) = 0$ donc d'après l'équivalence ci-dessus, on peut affirmer que Y_1 et Z_1 sont indépendantes.

- Pour $n \geq 2$, on a $\left| \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right| \leq \frac{1}{9}$ et $3 \cdot \left| \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right| \leq \frac{1}{3}$

On en déduit que $P(Y_n = 1) = \frac{1 + 3(-1/3)^n}{4} > 0$ et $P(Z_n = 1) = \frac{1 - (-1/3)^n}{4} > 0$.

Et ainsi

$$P(Y_n = 1).P(Z_n = 1) \neq 0 = P(Y_n = 1 \cap Z_n = 1)$$

Dans ce cas les Y_n et Z_n ne sont pas indépendantes!

- Conclusion Y_n et Z_n sont indépendantes ssi $n = 0$ ou 1

- (c) • S_n représente le nombre de passages par le point A au cours des n premières minutes.

- Par linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \sum_{k=0}^n E(Y_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1 + 3(-1/3)^k}{4} \\ &= \frac{n+1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1 - (-1/3)^{n+1}}{1 - (-1/3)} \right) \\ &= \frac{n}{4} + \frac{13}{16} + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{-1}{3} \right)^n \end{aligned}$$

8. On demande de déterminer $P_{A_3}(B_1 \cup B_2)$

- $P_{A_3}(B_1 \cup B_2) = \frac{P(A_3 \cap (B_1 \cup B_2))}{P(A_3)}$ avec $A_3 \cap (B_1 \cup B_2) = (A_3 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_2)$.

Comme il s'agit d'une union disjointe

$$P_{A_3}(B_1 \cup B_2) = \frac{P(A_3 \cap B_1) + P(A_3 \cap B_2)}{P(A_3)}$$

- On a $B_1 \cap A_3 = (B_1 \cap C_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap D_2 \cap A_3)$ et cette union est disjointe

$$P(B_1 \cap A_3) = P(B_1 \cap C_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap D_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

- On a $B_2 \cap A_3 = (C_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (D_1 \cap B_2 \cap A_3)$ et cette union est disjointe.

On trouve de même $P(B_2 \cap A_3) = \frac{2}{27}$

- Ainsi $P(A_3 \cap (B_1 \cup B_2)) = \frac{4}{27}$ et comme $P(A_3) = \frac{2}{9}$ d'après Q5, on trouve

$$P_{A_3}(B_1 \cup B_2) = \frac{4/27}{2/9} = \frac{2}{3}$$

9. • $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty[$

- Commençons par les premiers cas, avec la **formule des probabilités composées**

$$- P(X = 2) = P(A_0 \cap \overline{A_1} \cap A_2) = P(A_0).P_{A_0}(\overline{A_1}).P_{A_0 \cap \overline{A_1}}(A_2) = 1.1. \frac{1}{3}$$

$$- P(X = 3) = P(A_0 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_0).P_{A_0}(\overline{A_1}).P_{A_0 \cap \overline{A_1}}(\overline{A_2}).P_{A_0 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) = 1.1. \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$- P(X = 4) = P(A_0 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4) = 1.1. \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

- Soit $k \geq 2$.

On utilise la même idée, difficile à écrire(!),

$$P(X = 2) = 1.1. \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}}_{n-2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3} \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3}$$

10. On remarque que $\overline{X}(\Omega) = \llbracket 2, +\infty[= \llbracket 1, +\infty[\cup \mathbb{N}^*$

$$\text{et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(\overline{X} = k) = P(X = k + 1) = \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$$

Ainsi $\boxed{\bar{X} \sim \mathcal{G}(1/3)}$.

On sait alors que $E(\bar{X}) = 3$ et $V(\bar{X}) = 6$

On en déduit que

$$E(X) = E(\bar{X}) + E(1) = 3 + 1 = 4 \quad \text{et} \quad V(X) = V(\bar{X} + 1) = V(\bar{X}) = 6$$

11. Dans ce cas, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$, et en appliquant la formule de Q4, on trouve que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = X_0$

(!)

4. Matrice et covariance

- La matrice A est diagonale **ssi** les variables aléatoires sont décorréllées, càd $cov(V_1, V_2) = cov(V_1, V_3) = cov(V_2, V_3) = 0$
 - **Si** les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes **alors** A est une matrice diagonale. *car on sait que $(V_i \text{ et } V_j \text{ indépendantes})$ implique $cov(V_i, V_j) = 0$*
- La matrice A est symétrique à coefficients réels, on sait par le théorème spectral qu'elle est toujours diagonalisable! (et aussi que ses valeurs propres sont toutes réelles)

- (a) On va utiliser la bilinéarité de la covariance

$$\begin{aligned} V(Z) &= cov(x.V_1 + y.V_2 + z.V_3, x.V_1 + y.V_2 + z.V_3) \\ &= x.cov(V_1, x.V_1 + y.V_2 + z.V_3) + y.cov(V_2, x.V_1 + y.V_2 + z.V_3) + z.cov(V_3, x.V_1 + y.V_2 + z.V_3) \\ &= x^2.cov(V_1, V_1) + y^2.cov(V_2, V_2) + z^2.cov(V_3, V_3) \\ &\quad + 2xy.cov(V_1, V_2) + 2yz.cov(V_2, V_3) + 2xz.cov(V_1, V_3) \\ &= x^2.V(V_1) + y^2.V(V_2) + z^2.V(V_3) + 2xy.cov(V_1, V_2) + 2yz.cov(V_2, V_3) + 2xz.cov(V_1, V_3) \end{aligned}$$

- (b) Il suffit d'effectuer le produit matriciel $X^T V X$ pour trouver que $V(Z) = X^T . A . X$

- (c) Soit λ une valeur propre de A , et X un vecteur propre associé.

On a donc $AX = \lambda.X$ avec $X \neq 0$.

- Comme une variance est toujours positives, on a $V(Z) \geq 0$
- On a aussi

$$X^T A X = X^T (A X) = X^T (\lambda . X) = \lambda . X^T . X = \lambda . \|X\|^2$$

avec $\|X\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 > 0$

- D'après (b), on a $\lambda . \|X\|^2 = V(Z)$ donc $\lambda = \frac{V(Z)}{\|X\|^2} \geq 0$

On a bien montré que les valeurs propres de V sont positives ou nulles