

## 8 Intégrales à paramètres

### ANA 310

Pour tout  $x$  réel, on pose  $g(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + 2t + 1 + x^2}$ .

1. Montrer que la fonction  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, c'est à dire que l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + 2t + 1 + x^2}$  est convergente pour tout réel  $x$ .
2. Etudier la parité de la fonction  $g$ .
3. On souhaite, de deux manières différentes, prouver la continuité de  $g$ 
  - (a) En calculant  $g(x)$ , montrer que  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) En utilisant le théorème ad hoc, montrer que  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
4. On souhaite montrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , en utilisant le calcul de 3(a).
  - (a) Montrer que  $g$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
  - (b) Déterminer le développement en série entière de la fonction arctan.
  - (c) En déduire que  $g$  est aussi développable en série entière.
  - (d) Justifier que  $g$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et donner  $g^{(n)}(0)$  pour tout entier  $n$ .

### ANA 311 (très classique, à savoir refaire)

On note pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  et  $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(t^2 + 1))}{t^2 + 1} dt$

1. Justifier que  $F$  est définie et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner  $F'$ .
2. Justifier que  $G$  est définie et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner  $G'$ .
3. Montrer que la fonction  $F^2 + G$  est une fonction constante sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer cette constante.
4. Après avoir montré que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ , en déduire que  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

### ANA 312

On pose  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $g$
2. Montrer que  $g$  est continue sur  $]0,1[$ . (indication: on pourra montrer que  $g$  est continue sur tout segment  $[a,b]$  inclus dans  $]0,1[$ )

### ANA 313

On note pour tout  $x$  réel  $g(x) = \int_0^1 \arctan(xt) dt$ .

1. Montrer que  $g$  est une fonction définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $g$  vérifie l'équation différentielle  $(E) xy' + y = \arctan(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer la solution générale de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
4. Montrer que  $g$  est la seule solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$

### ANA 314

On pose  $g(x) = \int_0^1 e^{-x/t} dt$

1. Montrer que  $g$  est définie sur  $[0, +\infty[$
2. Montrer que  $g$  est  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et vérifier que  $\forall x > 0, g''(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

### ANA 315

On pose  $g(x) = \int_{[0, \infty[} \frac{\sin(tx)}{1+t^3} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier
2. Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$
3. La fonction  $g$  est-elle paire? impaire?

### ANA 316

Pour  $x > 0$  on pose  $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$

1. (a) Sans utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral, montrer que la fonction  $g$  est définie et croissante sur  $]0, +\infty[$ .  
(b) Déterminer les limites de  $g$  en  $0^+$  et en  $+\infty$
2. (a) Les fonctions  $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$  et  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$  sont intégrables sur  $]0,1[$ ?  
(b) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur tout segment  $[a,b] \subset ]0, +\infty[$   $g$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .  
(c) Que peut-on dire de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln^2 x}{2} + g(x) + g(1/x)$ ?

### ANA 317 (extrait de la banque PT 2007)

On note  $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} dt$   
 $(x,t) \mapsto \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}$

1. La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ ?
2. Montrer que pour tout  $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, |f(x,t)| \leq \frac{2}{e^t}$
3.  $g$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? (on énoncera le théorème utilisé)

### ANA 318

On pose  $g(x) = \int_{[0, +\infty[} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ .

1. montrer que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est paire
2. montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$
3. montrer que  $g$  vérifie l'équation différentielle  $2y'(x) + xy(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}$
4. en admettant que  $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , montrer que  $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$

### ANA 319 (cas d'une intégrale non généralisée)

On considère la fonction  $g : x \mapsto \int_{[0, \pi]} \cos(x \sin(\theta)) d\theta$

1. Montrer que  $g$  est définie et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$
2. Justifier que  $\forall x \in \mathbb{R}, xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$
3. En déduire que  $g$  est développable en série entière: donner ce développement et le rayon

### ANA 320

On considère la fonction  $g : x \mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$  et justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
2. Montrer que  $g$  est de classe  $C^2$  sur tout segment inclus dans  $]0, +\infty[$ .
3. Montrer que  $\forall x > 0, g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$

**ANA 321**

On considère la fonction  $g : x \mapsto \int_0^\infty \exp(-x.t). \arctan(t). dt$

Montrer que  $g$  est continue sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $]0, +\infty[$ .

En déduire que  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**ANA 322**

i) Montrer que  $g : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t)}{1+t^2} dt$  est  $C^\infty$  sur un intervalle que l'on précisera.

ii) Montrer que  $h : x \mapsto \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$

**ANA 323**

On pose, lorsque cela est possible

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$$

- Déterminer l'ensemble de définition  $I$  de  $f$ .
- En justifiant son existence, calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ .
- Calculer  $g(1)$ . On pourra utiliser l'application  $\varphi : u > 0 \mapsto \operatorname{ch}(u)$ .
- Calculer  $g(2)$ . On pourra remarquer que la dérivée de  $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$  est égale à  $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$ .
- Vérifier que  $g$  est positive sur  $I$ .
- Montrer que  $g$  est décroissante sur  $I$ .
- Prouver que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et préciser l'expression de  $g'(x)$ . Retrouver alors le résultat de la question précédente.
- Soit  $x \in I$ . Démontrer la relation

$$g(x+2) = \frac{x}{x+1} g(x)$$

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

- Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Donner l'expression de  $g(2p)$  à l'aide de factorielles.
- Pour tout réel  $x > 0$ , on pose

$$\phi(x) = xg(x)g(x+1)$$

Prouver que  $\phi(x+1) = \phi(x)$ . Calculer  $\phi(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de  $g(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .
- Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n)g(n+1) = \frac{\pi}{2n}$ . En déduire que

$$g(n) \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

- En utilisant des parties entières, prouver que

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

- Déduire des questions précédentes le tableau des variations de  $g$  sur  $I$  et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- Prouver que la fonction  $\phi$  est constante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**ANA 324**

On considère la fonction  $g : x \mapsto \int_0^1 e^{x.t^2} . dt$

- Montrer que  $g$  est continue sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .
- Justifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $g$  est-elle bornée?

**ANA 325**

On pose  $g : x \mapsto \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt$

- Montrer que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$
- Montrer que  $g$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et donner  $g'$  sous forme intégrale
- Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- En déduire une expression très simple de  $g$

**ANA 326**

On pose  $g : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$$

- Etudier les limites de la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$  en  $0^+$  et en  $1^-$
- Vérifier que  $g$  est une fonction bien définie sur  $] -1, +\infty[$
- Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur tout segment inclus dans  $] -1, +\infty[$
- En déduire que  $g$  est  $C^1$  sur son ensemble de définition, et donner une expression de  $g'$  sans intégrale
- En déduire une expression de  $g$  à une constante additive près
- Montrer que  $\forall t \in ]0, 1[, 0 \leq \frac{t-1}{\ln t} \leq 1$
- En déduire que  $\forall x > -1, 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x+1}$
- En déduire l'expression de  $g$

**ANA 327**

1. Montrer que la fonction  $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. En déduire  $\lim u_n$  avec  $u_n = \int_0^{1/n} \frac{n \cdot \cos t}{1+n^2 t^2} dt$

**ANA 328**

On note  $g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$

- Montrer que  $g(x)$  existe pour tout  $x > 0$
- Montrer que  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$  (on majorera sur tout segment inclus dans  $]0, +\infty[$ )
- Calculer  $g(x) + g(x+1)$  pour  $x > 0$
- Donner un équivalent de  $g$  en  $0^+$  et préciser sa limite  $+\infty$

**ANA 329**

On considère les intégrales impropres suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad , \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t \cdot dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad , \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2 \cdot dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

- Justifier l'existence des intégrales  $I_1$  et  $I_2$  et les calculer
- Justifier l'existence de  $I_3$  et la calculer en introduisant la fonction  $\varphi : u \mapsto \sin u$
- On considère la fonction  $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ 
  - Démontrer que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$
  - Démontrer que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$
  - Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, xg''(x) + g'(x) + xg(x) = 0$$

**ANA 330**

On note  $g(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$

1. Montrer que  $g(x)$  est bien défini pour  $x \geq 0$
2. Montrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$
3. Justifier que  $\forall n \geq 0, g^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n!)^2$

**ANA 331**

On pose  $g(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$  Montrer que :  $g(x) = x \arctan x - 1/2 \ln(1+x^2)$

**ANA 332**

Etudier et représenter graphiquement la fonction  $g : x \mapsto \int_0^1 \sqrt{x+t^3} dt$

**ANA 333 (Transformée de Fourier)**

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$ .

1. Démontrer que  $g$  est définie, continue et bornée sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que si  $f$  est une fonction paire alors  $g$  l'est aussi et que  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2 \cdot \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(xt) dt$ . Quel résultat obtient-on si  $f$  est impaire?
3. On considère désormais  $f : t \mapsto \exp(-\frac{t^2}{2})$ 
  - (a) Montrer que  $g$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$
  - (b) Calculer  $g'$  et en déduire  $g$ .

On admettra que  $\int_0^\infty \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**ANA 334 (fonction  $\Gamma$ , fonction très populaire en mathématique!)**

On note  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ .

Pour  $0 < a < b$ , on pose  $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} t^{a-1} \cdot e^{-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1} \cdot e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

1. Montrer que  $\varphi_{a,b}$  est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$
2. En déduire que  $\Gamma$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$
3. Calculer la valeur de  $\Gamma(1/2)$  sachant que  $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
4. Montrer que  $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
5. En déduire la valeur de  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
6. Montrer, à l'aide d'une domination locale, que  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln(t) \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

**ANA 335 (fonction  $\Gamma$ , fonction très populaire en mathématique!)**

On note  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction  $\Gamma$  est  $]0, +\infty[$
2. A l'aide d'une intégration par parties montrer que  $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. (a) Calculer  $\Gamma(1)$   
(b) En déduire  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
4. Montrer que  $\Gamma$  est une fonction de classe  $C^1$ , puis  $C^2$ , sur tout segment inclus dans  $]0, +\infty[$
5. Démontrer, par récurrence, que  $\Gamma$  est une fonction de classe  $C^k$  sur tout segment inclus dans  $]0, +\infty[$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$

**ANA 336 (Transformée de Laplace)**

On appelle transformée de Laplace d'une fonction  $f$  en  $p$  l'intégrale, lorsqu'elle converge:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

1. On note  $H$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}^{*+}$ , prolongeables par continuité à droite en 0 et telles que pour tout réel  $A > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-At} f(t) = 0$ 
  - (a) Montrer que si  $f \in H$  alors pour tout réel  $p > 0$ , l'intégrale  $\mathcal{L}(f)(p)$
  - (b) Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ .  
Montrer que si  $f \in H$  et  $f' \in H$  alors on a

$$\mathcal{L}(f')(p) = p \cdot \mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

- où  $f(0^+)$  désigne la limite de  $f$  à droite en 0
2. Dans chaque cas, montrer que  $f \in H$  et calculer  $\mathcal{L}(f)(p)$ :
    - (a)  $f(t) = U(t)$ , où  $U(t) = 1$  si  $t > 0$  et  $U(t) = 0$  sinon;
    - (b)  $f(t) = t^n \cdot U(t)$ , où  $n \in \mathbb{N}$ ;
    - (c)  $f(t) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot U(t)$ , où  $(\omega, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ ;
    - (d)  $f(t) = t \cdot \sin(t) \cdot U(t)$  (on pourra utiliser le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ )
  3. A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre  $\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

**ANA 337**

Dans cet exercice,  $g$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. Etude de  $g$ 
  - (a) Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$
  - (b) Montrer que  $g$  admet un DL en 0 à l'ordre un.  
En déduire que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et préciser  $g'(0)$
  - (c) Déterminer le signe pour  $t \in \mathbb{R}$  de  $(1+t)e^{-t} - 1$
  - (d) Dresser le tableau de variations de  $g$  et tracer le graphe de  $g$
  - (e) i. Donner le DSE au voisinage de 0 de la fonction  $g$ , préciser le rayon de convergence.  
ii. Montrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser pour tout  $k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(0)$  (énoncer le (ou les) théorème(s) utilisé(s))
2. On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{t} \sin(t) dt$

- (a) Montrer que l'intégrale impropre  $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$  converge (on pourra utiliser une intégration par parties)

On notera alors  $\alpha$  la valeur de cette intégrale et on pourra écrire  $h(x) = \alpha - \int_0^\infty e^{-xt} \cdot \frac{\sin t}{t} dt$

- (b) En déduire que  $h$  est définie sur  $[0, +\infty[$ . Que vaut  $h(0)$ ?
- (c) Montrer que  $h$  est de classe  $C^1$  sur tout segment inclus dans  $]0, +\infty[$ , en déduire que pour tout  $x > 0, h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- (d) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = \int_0^\infty g(u) \sin\left(\frac{u}{x}\right) du$
- (e) En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = x + x \int_0^\infty g'(u) \cos\left(\frac{u}{x}\right) du$
- (f) En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $|h(x)| \leq 2x$
- (g) Montrer que  $h$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et que pour tout  $x \geq 0$ ,  $h(x) = \arctan x$
- (h) En déduire que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

### ANA 338 (transformée de Laplace)

$f$  étant une fonction définie sur  $[0, +\infty[$ , on appelle *transformée de Laplace* de  $f$ , et on note  $L_f$ , la fonction définie par  $L_f(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt} dt$

- Montrer que si  $f$  est une fonction continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ , alors  $L_f$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$
- Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes

$$t \mapsto \cos \omega t \text{ (avec } \omega \neq 0) \quad t \mapsto t \quad f_n : t \mapsto t^n \text{ (avec } n \geq 1)$$

- On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $[0, +\infty[$  telles que

$$\exists A > 0, \exists M > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, |f(t)| \leq M.e^{at}$$

- Montrer que  $E$  est un espace vectoriel
  - Montrer que si  $f \in E$  alors  $L_f$  est définie et continue sur  $]a, +\infty[$
- Montrer que  $L : f \mapsto L_f$  est une application linéaire sur  $E$
  - Montrer que lorsque  $f$  et  $f'$  sont dans  $E$ , on a  $L_{f'} = xL_f - f(0)$
  - On note  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$   $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$  telle que  $\exists A > 0, \exists M > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall t \geq A, |f(t)| \leq M.t^n.e^{at}$ 
    - Montrer que  $F$  est un ev.
    - Montrer que si  $f \in F$  alors  $t \mapsto tf(t)$  est encore dans  $F$
    - Montres que si  $f \in F$  alors  $L_f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $]a, +\infty[$ . Donner  $(L_f)'$ . (indic. on pourra montrer que  $L_f$  est de classe  $C^1$  sur tout segment inclus dans  $]a, +\infty[$ )

### ANA 339 (transformée de Fourier)

A toute fonction  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on associe sa transformée de Fourier

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt} dt$$

- Montrer que  $\hat{f}$  est une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$
- Montrer que si  $f$  est une fonction paire alors  $\hat{f}$  l'est aussi et que  $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(xt) dt$ . Quel résultat obtient-on si  $f$  est impaire?
- On suppose que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et que  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ 
  - Justifier que  $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$
  - En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\hat{f}'(x) = ix\hat{f}(x)$

### ANA 340

On pose  $g(x) = \int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} dt$  pour  $x > 0$ , montrer qu'on a  $g(x) = \pi \ln(1 + x)$

### ANA 341

Soit  $f$  une fonction continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ .

On pose  $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$ .

- Montrer que  $F$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  (on pourra majorer localement)
- Montrer que  $F$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$
- Calculer  $F$  dans le cas où  $f : t \mapsto \sin(t)$

### ANA 342

Pour  $x > -1$  on pose  $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \sin^2(t)) dt$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $] -1, +\infty[$
- Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, +\infty[$  et exprimer  $f'(x)$  sous forme d'intégrale
- A l'aide du changement de variable  $u = \tan(t)$ , déterminer explicitement  $f'(x)$  (on distinguera les cas  $x = 0$  et  $x \neq 0$ )
- En déduire une expression explicite de  $f(x)$  pour  $x > -1$

### ANA 343

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  et  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$ .

- Vérifier que  $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$ . En déduire que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$
- Montrer de même que la fonction

$$g_k : x \rightarrow \frac{f(x) - f(0) - xf'(0) - \dots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0)}{x^k}$$

se prolonge en une fonction de classe  $C^\infty$  en 0.

### ANA 344 (produit de convolution)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux réels. On pose  $h(x) = \int_a^b f(t)g(x-t) dt$ .

- Montrer que  $h$  est continue
- Montrer que si  $g$  est  $C^k$  alors  $h$  l'est aussi
- Montrer que si  $f$  est  $C^1$  et  $g$  seulement continue alors  $h$  est  $C^1$

## 9 Fonctions de plusieurs variables

### ANA 345

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on note  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 < \frac{3}{2}\}$  et  $B$  la boule ouverte de centre (0,0) et de rayon 1.

- Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on sait qu'il existe  $r \geq 0$  et  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $\begin{cases} x &= r \cdot \cos t \\ y &= r \cdot \sin t \end{cases}$ .

Que dire de  $r$  lorsque  $(x, y) \in B$ ?

- Montrer que  $B \subset D$

**ANA 346 (démonstration: une boule ouverte est une partie ouverte)**

On considère  $B$  la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon un.

On considère  $x$  un élément de  $B$ .

On note  $\delta = d(x, a)$  et  $\delta_1 = \frac{1-\delta}{2}$

Enfin, on note  $B_1 = B_0(x, \delta_1)$

1. Faire un dessin dans le cas où l'on est dans  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $y \in B_1$ . Montrer que  $y \in B$
3. En déduire que  $B_1$  est une partie ouverte.

**ANA 347**

Indiquer si les ensembles suivants sont des ouverts, des fermés, ou rien du tout!

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 3x + y\} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 4\} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4\}$$

**ANA 348**

Soit 
$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

1. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2|xy| \leq x^2 + y^2$
2. En déduire que  $f$  est une fonction bornée.  $f$  possède-t-elle une limite en  $(0, 0)$ ?

**ANA 349**

Indiquer l'ensemble de définitions des fonctions suivantes puis montrer qu'elles ne possèdent pas de limite en  $(0, 0)$

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^3} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{x + 2y}{x^2 - y^2}$$

**ANA 350**

Soit 
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4}{y(y - x^2)} & \text{si } y(y - x^2) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter dans le plan l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $y(y - x^2) = 0$
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$  et  $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$
3. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  fixé, déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x)$
4. Montrer que  $f$  n'est cependant pas continue en  $(0, 0)$  !

**ANA 351**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est bien définie partout
2. Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$
3. Montrer que pourtant les applications  $x \mapsto f(x, 0)$  et  $y \mapsto f(0, y)$  sont continues en 0

**ANA 352 (Attention! L'existence des dérivées partielles n'impliquent pas la continuité!!!)**

Soit 
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$
2. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles premières en  $(0, 0)$  et les calculer
3. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles premières en tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$  et que l'on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cdot \frac{xy(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2}$
4.  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est-elle de classe  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^2$ ?

**ANA 353 (méthode classique pour montrer qu'une fonction de 2 variables est  $C^0$  en  $(0, 0)$ )**

On sait que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  il existe  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$

1. A quelle condition équivalente portant sur  $(r, \theta)$  a-t-on  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ?

2. Application: Soit 
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ , puis justifier que  $f$  est continue partout sur  $\mathbb{R}^2$

**ANA 354**

Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On pose  $f(x, y) = \int_x^y \phi(t) dt$

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et déterminer les dérivées partielles premières.
3. Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

**ANA 355**

On note  $D = ]0, +\infty[^2$ .

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable.

On pose  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$(x, y) \mapsto g\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \sqrt{xy}$$

1. Justifier que  $f$  admet des dérivées partielles premières en tout point de  $D$
2. Montrer que  $\forall (x, y) \in D, x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f$

**ANA 356**

Déterminer les fonctions  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(xy) = xy^2$  (on pourra s'intéresser à  $f'(1)$ )

**ANA 357**

Comparer les ensembles de définition de  $f : (x, y) \mapsto \ln x + \ln y$  et  $g : (x, y) \mapsto \ln(xy)$

**ANA 358**

Soit  $k \in \mathbb{R}$ .

On considère la fonction  $f : (x, y) \mapsto k \cdot e^{xy}$

1. Montrer que  $f$  vérifie l'équation (E) :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y \cdot f(x,y) = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$
2. Donner d'autres solutions de cette équation.

#### ANA 359

Soit  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$

On note  $f : (x,y) \mapsto A(y) \cdot \cos(x + \varphi)$

1. Montrer que  $f$  vérifie l'équation (E) :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + f(x,y) = 0$
2. Y a-t-il d'autres solutions à cette équation?

#### ANA 360

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^*)$ .

On définit la fonction  $F$  sur  $]0, \infty[^2$  par  $F(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ .

Déterminer les fonctions  $F$  telles que  $\forall x > 0, y > 0, x \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$  (E)

On pourra commencer par montrer que si de telles fonctions existent alors nécessairement

- $f$  vérifie une équation diff du type  $\forall x > 0, f'(x) + \frac{K}{x} f(x) = 0$  avec  $K \in \mathbb{R}$
- $g$  vérifie une équation diff du type  $\forall x > 0, g'(x) + \frac{L}{x} g(x) = 0$  avec  $L \in \mathbb{R}$

#### ANA 361

On note  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, | \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \}$ .

On considère  $\boxed{f : D \rightarrow \mathbb{R} \atop (x,y) \mapsto x + y}$

1. Sur un même dessin, représenter le domaine  $D$  ainsi que quelques lignes de niveau de la fonction  $f$ .
2. Justifier que la fonction  $f$  est bornée et qu'elle atteint ses bornes
3. Graphiquement, comment feriez-vous pour déterminer le maximum et le minimum de  $f$ ?
4. Soit  $(x_0, y_0) \in D$  un point en lequel  $f$  possède une valeur extrême.  
Justifier que  $x_0 + 4y_0 = 0$ , puis en déduire le minimum et le maximum de  $f$ .  
On pourra introduire  $F : \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$  et calculer son gradient

#### ANA 362

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable.

On note  $\boxed{g : ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \atop (x,y) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2})}$

1. Calculer  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$  en fonction de  $f'$  et  $f''$ .
2. Déterminer toutes les fonctions  $f$  telles que  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$

#### ANA 363

Déterminer les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ ,

où l'on définit  $g$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  par  $g(x,y) = f(\frac{x}{y})$ .

#### ANA 364

Soient  $A$  et  $B$  deux fonctions de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

On pose  $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x,y) \mapsto A(y/x) + x \cdot B(y/x)$

1. Montrer que  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
2. Justifier que pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  on a

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

#### ANA 365

Soit  $f$  et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $C^2$  et  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x,y) = f(x + \varphi(y))$ .

1. Justifier que  $F$  est de classe  $C^2$ .
2. Vérifier l'égalité :  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ .

#### ANA 366

Soit le fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x,y) \mapsto \begin{cases} y^2 \cdot \arctan \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$  et que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$

#### ANA 367

Soit  $\boxed{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \atop (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

1. Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$  pour  $y \neq 0$ , puis pour  $y = 0$
2. Calculer  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$  pour  $x \neq 0$ , puis pour  $x = 0$
3. Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

#### ANA 368

Soit  $f : (x,y) \mapsto \mathbb{R}$  et  $g : (r,\theta,z) \mapsto \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^2$ .

On considère  $a : t \mapsto f(t^2, 3t)$  et  $b : t \mapsto g(t^2, -t, e^t)$

1. Exprimer  $a'(t)$  et  $b'(t)$  en fonctions des dérivées partielles de  $f$  et  $g$
2. Exprimer  $a''(t)$  et  $b''(t)$  en fonctions des dérivées partielles de  $f$  et  $g$

#### ANA 369

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ .

On considère  $\boxed{g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \atop (x,y,z) \mapsto f(y-z, z-x, x-y)}$

Calculer  $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}$

**ANA 370**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telles que  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$  avec  $U$  la fonction définie par  $U : \mathbb{R}^2 \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$$

**ANA 371**

Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -f(y, x)$

1. Donner des exemples de telles fonctions.
2. En revenant à la définition de la dérivée partielle, montrer  $\partial_1 f(x, y) = -\partial_2 f(y, x)$
3. Montrer que  $\partial_2 \partial_1 f(x, y) = -\partial_1 \partial_2 f(y, x)$
4. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, \partial_1 \partial_2 f(x, x) = 0$
5. (HP) Que vaut le laplacien de  $f$  en  $(x, x)$ ?

**ANA 372**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + t, y + t) = f(x, y)$ .

1. La fonction  $f$  est-elle constante?
2. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) + \partial_2 f(x, y) = 0$

**ANA 373**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$ .

1. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixé, on pose 

|                                         |
|-----------------------------------------|
| $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $t \mapsto f(tx, ty)$                   |

Justifier que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $g'(t)$

2. On suppose que  $\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, f(tx, ty) = t.f(x, y)$

(a) Montrer que  $\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$  on a  $f(x, y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$

(b) En déduire qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \alpha x + \beta y$

(c) Etudier la réciproque

**ANA 374 (équation d'ordre deux à coefficients constants)**

Soient  $a, b, c$  trois réels tous non nuls.

On considère l'e.d.p. :  $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0(*)$  où  $f$  est une fonction inconnue de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ .

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  distincts, fixés.

On considère le changement de variable :  $u = x + \alpha y$  et  $v = x + \beta y$

et on note  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $g(u, v) = f(x, y)$

1. Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiées par  $g$
2. En déduire que l'on peut ramener  $(*)$  à l'une des trois formes réduites :

$$(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \quad (2) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \quad (3) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

3. Résoudre (1) et (2)

**ANA 375**

La fonction  $f$  des deux variables  $x$  et  $y$  vérifie :  $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Montrer que la fonction  $g : (s, t) \mapsto f(e^s, e^t)$  vérifie la relation  $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$ .

**ANA 376**

1. Montrer que l'application  $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v) = (xy, \frac{y}{x})$  est une bijection de  $]0, +\infty[^2$  sur  $]0, +\infty[^2$

2. On souhaite déterminer les fonctions  $f \in C^1(]0, +\infty[^2, \mathbb{R})$  qui vérifient (E) :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ .

Pour cela on pourra considérer  $g = f \circ \varphi^{-1}$

3. Déterminer les fonctions  $f$  qui vérifient (E) et  $\forall x > 0, f(x, x^3) = x^4 + 3x^2 + 1$

**ANA 377**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On s'intéresse aux solutions sur  $\mathbb{R}^2$  de l'e.d.p.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha$  (E)

1.  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  étant fixés, la fonction  $f : (x, y) \mapsto \lambda.(\cos(2x) + \sin(2x)).(\cos y + \sin y) + \mu.(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16})$  est-elle solution?
2. A l'aide du changement de variable  $u = 2x + y, v = 2x - y$  résoudre l'e.d.p. (E)

**ANA 378**

Déterminer les fonctions de classe  $C^2$  solutions des équations suivantes.

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y - 5 \quad (2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x + y - 5 \quad (3) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sin(x) + \sin(y) \quad (4) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = x$$

**ANA 379**

Dans chaque cas, déterminer les fonctions  $f$  telles que

$$(1) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + y^2 \end{cases} \quad (2) \forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2+x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2+y}{x} \end{cases}$$

$$(3) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla_{(x, y, z)} f = (xy, xz, yz) \quad (4) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla_{(x, y, z)} f = (yz - x^2, zx - y^2, xy - z^2)$$

**ANA 380 (équations aux dérivées partielles VS équations différentielles)**

On souhaite déterminer toutes les solutions de classe  $C^2$  de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + f(x, y) = 0 \quad (E)$$

Pour cela, à  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on pose  $g : x \mapsto f(x, y)$

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $g$ , et la résoudre
2. En déduire les solutions de (E)
3. En suivant une méthode identique, résoudre les edp suivantes

$$(a) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2f(x, y) = 0$$

$$(b) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2xy.f(x, y) = xy$$

$$(c) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - \frac{z}{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) = 0$$

**ANA 381 (application possible aux intégrales à paramètre qd non généralisées)**

On pose  $g(x) = \int_0^x \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$  pour  $x \neq \pm 1$

1. Montrer que pour  $x \neq \pm 1$  l'intégrale existe bien car elle est non généralisée
2. Montrer que  $g$  est continue sur tout segment  $[a, b] \subset I$  avec  $I = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

**ANA 382 (démonstration de cours)**

On considère  $\Sigma$  la surface d'équation cartésienne  $F(x, y, z) = 0$ .

On considère un arc paramétré  $(I, \gamma)$  tracé sur  $\Sigma$  avec  $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

On note  $\Gamma$  le support de cet arc.

Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0)$  un point de l'arc paramétré  $\gamma$ .

On note

- $D_{M_0}$  la droite tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$
- $\mathcal{P}_{M_0}$  le plan tangent à  $\Sigma$  en  $M_0$

Montrer que  $D_{M_0} \subset \mathcal{P}_{M_0}$

**ANA 383**

Soient  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  et  $g : (u, v, w) \mapsto g(u, v, w)$  deux fonctions de classe  $C^2$ .

On suppose que  $f(x, y) = g(u, v, w)$

(on a donc les variables  $x$  et  $y$  qui sont liées aux variables  $u, v$  et  $w$  (et réciproquement!))

1. Exprime  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .
2. Exprimer  $\frac{\partial g}{\partial v}$  puis  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$  en fonction des dérivées partielles de  $f$

**ANA 384**

Dans cet exercice  $f$  est une fonction des deux variables  $x$  et  $y$  :

1. Nous allons résoudre l'edp  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  sur le domaine  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ 
  - (a) Montrer que l'application  $\begin{matrix} \varphi : ]0, +\infty[ \times ]-\pi/2, +\pi/2[ & \longrightarrow & ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{matrix}$  est une bijection de classe  $C^1$ . Donner  $\varphi^{-1}$ .
  - (b) On définit la fonction  $g$  par  $g = f \circ \varphi$ .  
Donner  $\partial_1 g$  et  $\partial_2 g$  en fonction de  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$
  - (c) En déduire que les solutions de l'équation  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  sont les fonctions définies par  $f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$  où  $h$  est une fonction  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Même question avec l'edp  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$  où  $\alpha$  est une constante réelle

**ANA 385**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  (E)

On pose  $u = x$  et  $v = x - y$

On définit la fonction  $g$  par  $g(u, v) = f(x, y) = f(u, u - v)$

1. Déterminer les dérivées partielles de  $g$  en fonction de celles de  $f$
2. En déduire les fonctions  $f$  qui vérifient (E)

**ANA 386**

1. En posant  $u = x + y^2$  et  $v = y$  résoudre l'edp  $-2y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  (E)
2. En déduire les solutions de l'edp (E) qui vérifient  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, x) = x^2 + 2x^3 + x^4$
3. En déduire les solutions de l'edp (E) qui vérifient  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = x^2 + 2x^3 + x^4$

**ANA 387**

Soit  $c > 0$ .

On cherche les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , dépendant des variables  $x$  et  $t$ , qui vérifient l'équation aux

dérivées partielles (E)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

1. Transformer et résoudre cette équation en faisant le changement de variables  $u = x - ct$  et  $v = x + ct$  (on introduira la fonction  $g : (u, v) \mapsto g(u, v) = f(x, t)$ )
2. Déterminer les fonctions solutions de (E) vérifiant en outre les deux conditions:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(0, t) = a \cos \omega t \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = 0$$

**ANA 388**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$
2. montrer que  $f$  admet en  $(0, 0)$  des dérivées partielles premières.
3. étudier l'existence des dérivées partielles secondes

**ANA 389 (aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle)**

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ .

Etant donné un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(R, 0), B(R \cos \beta, R \sin \beta)$  et  $C(R \cos \gamma, R \sin \gamma)$  avec  $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$

1. Montrer que l'aire du triangle  $ABC$  est  $\frac{R^2}{2}(\sin(\gamma - \beta) - \sin \gamma + \sin \beta)$ .  
Dans la suite, cette aire sera notée  $f(\beta, \gamma)$
2. Montrer que  $f$  admet un maximum atteint en un point  $(\beta_0, \gamma_0)$  tel que  $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$
3. Déterminer  $\beta_0$  et  $\gamma_0$ . Quelle est alors la nature du triangle obtenu?
4. Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans  $\mathcal{C}$ .

**ANA 390**

On considère  $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

1. Etudier les extrema de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$
2. Etudier les extrema de  $f$  sur  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \geq 0, |y| \geq 0, x - y \leq 1\}$

**ANA 391**

Soit  $f : (x, y) \mapsto 2x + y + 5$

1. Etudier les extrema de  $f$  sur le disque ouvert de centre  $(0, 0)$  et de rayon un.
2. Etudier les extrema de  $f$  sur le disque fermé de centre  $(0, 0)$  et de rayon un.
3. Etudier les extrema de  $f$  sur  $[-1, +1] \times [-1, +1]$

**ANA 392**

Etudier les extrema de  $f : (x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x + y)$  sur  $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$

**ANA 393**

Déterminer les extrema des fonctions suivantes:

1.  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + \frac{x^3}{4}$  sur  $\mathbb{R}^2$
2.  $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy + 27$  sur  $\mathbb{R}^2$ , puis sur  $[-1, 1] \times [-1, 1]$
3.  $f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$  sur  $\mathbb{R}^2$ , puis sur  $[-1, 1] \times [-1, 1]$
4.  $f : (x, y) \mapsto 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$  sur  $\mathbb{R}^2$
5.  $f : (x, y) \mapsto \sin x + \sin y + \cos(x + y)$  sur  $]0, \pi[ \times ]0, \pi[$
6.  $f : (x, y) \mapsto xy + 8(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$
7.  $f : (x, y) \mapsto -2x + 2y + 3x^2 - y^3$  sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$

**ANA 394**

Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$ .

1. Montrer que  $f$  admet un et un seul extremum local sur  $\mathbb{R}^2$
2.  $f$  admet-elle un extremum global sur  $\mathbb{R}^2$ ?

**ANA 395**

On souhaite déterminer les extrema de la quantité  $xyz$

lorsque  $x, y$  et  $z$  sont trois réels positifs tels que  $x + y + z = 1$

On note  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  et

|                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------|
| $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$<br>$(x, y) \longmapsto xy(1 - x - y)$ |
|--------------------------------------------------------------------------|

1. Montrer que le problème posé revient à déterminer les extrema de la fonction  $f$  sur  $D$ .
2.  $D$  est-il un ouvert? un fermé?  $D$  est-il borné?
3. Montrer que  $f$  admet des extrema globaux.
4. Etudier les valeurs prises par  $f$  sur la frontière de  $D$ .
5. Indiquer  $\Delta$ , l'intérieur de  $D$ .
6. Etudier les extrema de  $f$  sur  $\Delta$
7. Conclure

**ANA 396**

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$  et  $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y < 1\}$

On remarque que  $D$  est un ensemble fermé et que  $\tilde{D}$  est un ensemble ouvert.

1. Dessiner sommairement l'ensemble  $D$
2. Montrer que l'ensemble  $D$  est borné
3. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 e^y$ .  
Montrer que  $f$  admet un maximum global et un minimum global sur  $D$
4. Chercher les extrema locaux de  $f$  sur l'intérieur de  $D$
5. Déterminer les extrema globaux de  $f$  sur  $D$

**ANA 397**

On ôte une de ses faces à une boîte parallélépipédique, de volume  $V$  donné (il reste donc 5 faces!).

Comment doit-on choisir ses côtés pour que sa surface soit minimum?

|                   |
|-------------------|
| QUELQUES CORRIGÉS |
|-------------------|

|                       |
|-----------------------|
| FIN des exercices ANA |
|-----------------------|