

PT* 2025-26
DS 4 du 12 janvier 2026 - durée 4h

• LA PRÉSENTATION, LA LISIBILITÉ, L'ORTHOGRAPHE, LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA CLARTÉ ET LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DES COPIES. EN PARTICULIER, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE (*extrait de rapport de jury*)

• Les résultats sont à encadrer à la règle.

EXERCICE 1

A) Calculs préliminaires

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

- a) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 ; on notera φ ce prolongement.
- b) Montrer que φ admet un développement en série entière autour de 0.
- c) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

B) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$.

a) Montrer que l'intégrale I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$.

i) Justifier que les deux intégrales ci-dessous sont convergentes, puis prouver l'égalité indiquée

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = 3 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx.$$

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que :

$$I(a) = C \int_a^{3a} \varphi(x) dx + D,$$

iii) En déduire la valeur de I

EXERCICE 2

On considère l'intégrale

$$K = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

1. Étudier la nature de l'intégrale K .

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_k = \int_0^1 t^k \sin(\pi t) dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \sin(\pi t) dt$$

et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n J_k = \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \sin(\pi t) dt.$$

3. Montrer que la fonction

$$t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$$

se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

4. On pose

$$J = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt.$$

Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n J_k - J \right| \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} t^{n+1} dt.$$

En déduire qu'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n J_k - J \right| \leq \frac{M}{n+2}.$$

5. Montrer que $J = K$. En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = K$

PROBLEME

A Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3 .

Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x , par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On pose, pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}.$$

1. En calculant, de deux façons différentes :

$$\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1)g(x),$$

établir que :

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

2. On suppose désormais que, pour tout réel x :

$$P(x) = 1,$$

avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3 .

B Etude d'une série entière

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition D_F , associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right).$$

1. Déterminer D_F . Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.

2. Justifier que F est dérivable sur D_F . On désigne par f sa dérivée.

3. Montrer que, pour tout réel x de D_F :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}.$$

4. On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série entière

$$\sum f(n)x^{2n+1}.$$

(a) Déterminer son rayon de convergence R .

(b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$, ainsi que son rayon de convergence.

(c) (i) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ en précisant le rayon de convergence.

(ii) Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$\frac{1}{1-x^2} \text{ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de } \frac{1}{1-x} \text{ et } \frac{1}{1+x}.$$

(d) Dédurre de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

en précisant le rayon de convergence, que l'on comparera à la valeur R obtenue en (a).

(e) Montrer que, pour tout réel $x \in]-R, R[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2).$$

(f) Pour tout réel $x \in]-R, R[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

(g) Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right).$$

5. On considère désormais la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$.

(a) Étudier la convergence de la série de terme général $f(n)$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n).$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

(d) En admettant le développement asymptotique suivant au voisinage de l'infini

$$H(n) = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad \text{où } \gamma \text{ est la constante de Catalan}$$

Déterminer $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Ce résultat a-t-il un lien avec celui trouvé en QB-4(g)? Pourquoi?

Corrigé de l'exercice 2

- $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, \pi]$.
L'intégrale K est donc généralisée en sa borne supérieure.
 - On sait que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (limite finie).
Ainsi f est prolongeable par continuité en 0, et K est une intégrale faussement généralisée
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - $f_n : t \mapsto \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t)$ est continue sur $[0, 1[$.
L'intégrale $\int_0^1 f_n(t) dt$ est donc généralisée en sa borne supérieure.
 - Que ce soit avec un DL en posant $t = 1 + h$ ou en reconnaissant le taux d'accroissement en 1 de la fonction $t \mapsto t^{n+1}$, on trouve que $\lim_{t \rightarrow 1} f_n(t) = n + 1$ (limite finie).
et donc l'intégrale proposée est faussement généralisée elle aussi.
 - *remarque: on pouvait aussi utiliser la règle des équivalents ou la comparaison avec un équivalent pour ces deux premières questions.*
 - On utilise la somme partielle géométrique

$$\sum_{k=0}^n t^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } t = 1 \\ \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} & \text{si } t \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^n J_k = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^k \cdot \sin(\pi t) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n t^k \cdot \sin(\pi t) \cdot dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t) \cdot dt$$

- $g : t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{1 - t}$ est continue sur $[0, 1[$, comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.
 - On pose $t = 1 + h$.

$$g(t) = \frac{\sin(\pi(1 + h))}{-h} = \frac{\sin(\pi + \pi \cdot h)}{-h} = \frac{-\sin(\pi \cdot h)}{-h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi \cdot h}{h} = \pi$$

Comme $\lim_1 g$ existe et est finie, on a montré que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$

- Par linéarité de l'intégrale et Q2

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n J_k - J &= \int_0^1 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t) \cdot dt - \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1 - t} dt = \int_0^1 \left(\frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} - \frac{1}{1 - t} \right) \cdot \sin(\pi t) \cdot dt \\ &= - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t) \cdot dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale

$$\left| \sum_{k=0}^n J_k - J \right| = \left| - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t) \cdot dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t) \cdot dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t^{n+1}}{1 - t} \cdot \sin(\pi t) \right| \cdot dt$$

En introduisant la fonction g de Q3, on a

$$\left| \sum_{k=0}^n J_k - J \right| \leq \int_0^1 |g(t) \cdot t^{n+1}| \cdot dt = \int_0^1 |g(t)| \cdot t^{n+1} \cdot dt$$

La fonction g étant continue sur le segment $[0, 1]$, on sait d'après **le théorème des bornes atteintes**, qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1], |g(t)| \leq M$$

En repartant de l'inégalité ci-dessus, et par croissance de l'intégrale on a finalement

$$\left| \sum_{k=0}^n J_k - J \right| \leq \int_0^1 |g(t)| \cdot t^{n+1} \cdot dt \leq \int_0^1 M \cdot t^{n+1} \cdot dt = \left[M \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{M}{n+2}$$

- (a) Nous allons procéder par changement de variable (comme les intégrales sont faussement généralisées, il suffit que les changements de variable soient de classe C^1).
En posant $\theta = \pi - t$ ($d\theta = -dt$), on a

$$J = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1 - t} \cdot dt = \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{1 - \theta/\pi} \cdot \frac{d\theta}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\pi - \theta} d\theta$$

En posant maintenant $v = \pi - \theta$ ($dv = -d\theta$), on a

$$J = - \int_\pi^0 \frac{\sin(\pi - v)}{v} dv = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - v)}{v} dv = \int_0^\pi \frac{\sin(v)}{v} dv = K$$

car pour tout v on a $\sin(\pi - v) = \sin v$

- (b) On reprend Q4, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+2} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n J_k = J$$

ce qui signifie que la série $\sum_{k \geq 0} J_k$ converge et l'on a donc

$$\sum_{k=0}^\infty J_k = J = K$$

Corrigé de l'exercice 1

- (a) On linéarise classiquement $\sin^3 x$ en passant en complexe .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, on a ainsi

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{ix} - e^{-ix})^3 \\ &= \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \end{aligned}$$

En isolant $\sin^3(x)$ on trouve la relation demandée.

- (b) i. On sait que $\sin(x) =_0 x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Ainsi

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + o(x)$$

Et ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (limite finie).

On a montré que f est prolongeable par continuité, et on note φ son prolongement.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$$

- ii. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- Ainsi, pour tout x non nul

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \cdot \frac{x^{2p+1}}{(2p+3)!} \quad (p = n+1) \end{aligned}$$

- On remarque que $\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \cdot \frac{0^{2p+1}}{(2p+3)!} = 0 = \varphi(0)$

- On a montré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \cdot \frac{x^{2p+1}}{(2p+3)!}}$

ce qui prouve bien que φ est DSE (avec un rayon infini)

- iii. La fonction φ est ainsi la fonction somme d'une série entière, on sait par théorème que φ est C^∞ sur $] -R, +R[$, donc ici sur $\mathbb{R}$

2. (a) • La fonction $g : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

L'intégrale I est donc doublement généralisée.

- Etude de $\int_1^{+\infty} g(t) dt$

On a $g(t) = O(\frac{1}{t^2})$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc par comparaison g est intégrable en $+\infty$

- Etude de $\int_0^1 g(t) dt$

$g(t) \sim_O \frac{t^3}{t^2} = t$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ (limite finie).

L'intégrale est faussement généralisée en 0

On a bien montré que $\boxed{I \text{ converge}}$

- (b) i. Soit $a > 0$

- La fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{x^2}$ est continue sur $[a, +\infty[$, donc $\int_a^\infty g(x) dx$ est généralisée en $+\infty$ uniquement.

Comme $g(x) = O_\infty(\frac{1}{x^2})$ et que $t \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc $\int_a^\infty g(x) dx$ converge.

- même preuve avec $\int_{3a}^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$

- On utilise le changement de variable affine $t = 3x = \gamma(x)$, où γ est C^1 , strictement croissante, et bijective de $]a, +\infty[$ sur $]3a, +\infty[$.

Comme l'intégrale $\int_a^\infty \frac{\sin(3x)}{x^2} dx$ converge, on sait que l'intégrale obtenue par changement de variable sera égale à la celle-là.

$$\int_a^\infty \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = \int_{3a}^\infty \frac{\sin(t)}{(t/3)^2} \cdot \frac{dt}{3} = 3 \cdot \int_{3a}^\infty \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

- ii. On utilise la linéarisation de A1), et la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^\infty \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{4x^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int_a^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{1}{4} \int_a^\infty \frac{\sin(3x)}{x^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int_a^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{3}{4} \int_{3a}^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx \quad (\text{question ci-dessus}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx + \int_\infty^{3a} \frac{\sin(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad \text{Relation de Chasles} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int_a^{3a} \varphi(x) + \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int_a^{3a} \varphi(x) dx + \frac{3}{4} \cdot \int_a^{3a} \frac{dx}{x} \quad \text{avec } \int_a^{3a} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{3a} = \ln 3 \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int_a^{3a} \varphi(x) dx + \frac{3}{4} \cdot \ln 3 \end{aligned}$$

- iii. • La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle possède des primitives sur cet intervalle, notons Ψ l'une d'elles.

Ψ étant C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc continue en 0), on a

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{3}{4} \cdot \int_a^{3a} \varphi(x) dx + \frac{3}{4} \cdot \ln 3 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{3}{4} (\Psi(3a) - \Psi(a)) + \frac{3}{4} \cdot \ln 3 \\ &= \frac{3}{4} (\Psi(0) - \Psi(0)) + \frac{3}{4} \cdot \ln 3 \\ &= \frac{3}{4} \cdot \ln 3 \end{aligned}$$

1.

Soit $x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3\}$. D'une part,

$$(x - x_1)g(x) = (x - x_1) \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_2)(x - x_3)},$$

donc

$$(x - x_1)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_1} \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

car les x_i sont distincts et P est continue en x_1 .

Or

$$Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2),$$

donc

$$Q'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1)g(x) = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

D'autre part,

$$(x - x_1)g(x) = a_1 + a_2 \frac{x - x_1}{x - x_2} + a_3 \frac{x - x_1}{x - x_3},$$

donc

$$(x - x_1)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_1} a_1.$$

Par unicité de la limite,

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Par permutation des indices,

$$a_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}, \quad a_3 = \frac{P(x_3)}{Q'(x_3)}.$$

2.

Avec $P = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ et $x_3 = -\frac{1}{2}$, on a

$$Q'(x_1) = \frac{1}{2}, \quad Q'(x_2) = \frac{1}{2}, \quad Q'(x_3) = -\frac{1}{4},$$

d'où

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = -4.$$

On obtient la décomposition en éléments simples :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+\frac{1}{2})} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+\frac{1}{2}}.$$

On l'écrit plutôt sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1}. \quad (\star)$$

Partie B

1. Le tableau de signes est simple donne $\boxed{D_F =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$ car $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
x	$-$			0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		
$(2x+1)^2$	$+$		0	$+$	
$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$	$+$	0	$-$	$-$	0 $+$

2. F est la composée d'une fraction rationnelle, donc dérivable sur D_F et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de la fonction $\ln$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc F dérivable sur D_F

rem: ici, il ne suffisait pas de répondre "d'après les théorèmes généraux", il fallait bien préciser les ensembles de définition et d'arrivée pour la composée

3. • Pour $x > 0$,

$$F(x) = \ln x + \ln(x+1) - 2\ln(2x+1),$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1} = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}.$$

• Pour $x < -1$,

$$F(x) = \ln(-x) + \ln(-x-1) - 2\ln(-2x-1),$$

et on obtient la même expression pour $f(x)$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = |f(n)x^{2n+1}|.$$

On a $u_n > 0$ et, comme

$$f(n) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^3},$$

on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)} x^2 \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

$\boxed{\text{Le rayon de convergence est donc } R = 1.}$

(b) On rappelle que

$$\forall x \in [-1, 1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

avec un rayon de convergence égal à 1.

(c) (i)

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}. \quad \text{de rayon } 1$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

(d) **Le théorème de primitivation terme à terme des séries entières**, permet d'écrire.

Pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

et que **le rayon de la série obtenue est le même que celui de la série de départ**, càd 1.

(e) Il suffit de remplacer x par x^2 dans la question 4.(b), puis de multiplier par $-x$.

(f) Pour $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

En utilisant la décomposition $(\star)$,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right) x^{2n+1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n}}_A + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1}}_B - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

avec d'après 4(e)

$$\begin{aligned} \bullet A &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \cdot \ln(1-x^2) \\ \bullet B &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{p} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{p} - x^3 \right) = \frac{1}{x^2} (-x \ln(1-x^2) - x^3) \end{aligned}$$

En remplaçant également par le développement de 4d, on obtient

$$G(x) = 3x - \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln(1-x^2) - 2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

et $G(0) = 0$.

(g) Pour $x \neq 0$,

$$G(x) = 3x - \frac{(x-1)^2}{x} \ln(1-x) - \frac{(x+1)^2}{x} \ln(1+x).$$

Comme $u \ln u \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0^+$,

$$\lim_{x \rightarrow 1} G(x) = 3 - 4 \ln 2.$$

5. (a) Comme $f(n) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^3}$, et que $\frac{1}{2n^3} > 0$, par comparaison à une série de Riemann convergente,

on a la série $\sum f(n)$ est convergente

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, (en distinguant termes pairs et impairs)

$$H(2n+1) = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2} \cdot H(n)$$

(c) En utilisant la décomposition en éléments simples du préliminaire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4 \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - 1 \right) \\ &= H(n) + H(n) - 1 + \frac{1}{n+1} - 4 \left(H(2n+1) - \frac{1}{2} H(n) - 1 \right) \\ &= 4H(n) - 4H(2n+1) + 3 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(d) D'après la question ci-dessus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= 4 \cdot (\ln(n) + \gamma + o(1)) - 4 \cdot (\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) + 3 + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{=o(1)} \\ &= -4 \cdot \ln \left(\frac{2n+1}{n} \right) + 3 + o(1) = -4 \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 3 + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité de la fonction $\ln$ en 2, on a $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k) = -4 \ln 2 + 3$

La fonction somme est définie en fait sur $] -1, +1]$ car la série converge aussi pour $x = R = 1$. Par théorème, on sait que la fonction somme d'une série entière est continue sur son intervalle de définition: ainsi, ici G est continue sur $] -1, 1]$.

En particulier, la continuité en 1 donne $G(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} G(x)$.

Ce n'est donc pas un hasard si on retrouve le résultat de B4(g)