

PT* 2025-26
DS 5 du 9 février 2026 - durée 4h

-
- **LA PRÉSENTATION, LA LISIBILITÉ, L'ORTHOGRAPHE, LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA CLARTÉ ET LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DES COPIES. EN PARTICULIER, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE** (*extrait de rapport de jury*)

- Les résultats sont à encadrer à la règle.

- Ce devoir est composé de 5 exercices
-

EXERCICE 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On s'intéresse à la surface S d'équations paramétriques $\begin{cases} x &= uv \\ y &= u \\ z &= v^2 \end{cases}$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

On considère également les deux points $A(5, 0, 3)$ et $B(1, 2, 3)$

1. Justifier que le plan xOz est un plan de symétrie de S
2. Déterminer les points réguliers de S
3. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent est horizontal. Cet ensemble de points est-il remarquable? Le décrire
4. Montrer que S est une surface réglée, puis déterminer la génératrice parallèle à la droite (AB)
5. Déterminer une équation cartésienne de S

EXERCICE 2

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique orthonormée directe $\mathcal{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on s'intéresse à l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{I} = \frac{\vec{i} + \sqrt{3}\vec{k}}{2} \quad \varphi(\vec{j}) = \vec{J} = \vec{j} \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{K} = \frac{\vec{k} - \sqrt{3}\vec{i}}{2}$$

1. Justifier que φ est une isométrie vectorielle.
2. Déterminer la nature et les éléments de φ

EXERCICE 3

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = e^t + e^{-t} \\ y(t) = 2 - e^t \\ z(t) = 1 + e^{-t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note $M(t)$ le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t .

1. Déterminer une représentation paramétrique et des équations cartésiennes de la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(\ln(2))$.
2. Déterminer le projeté de $M(t)$ sur la droite D passant par le point $A(0, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (1, 1, -1)$. Que peut-on en déduire?
3. Soit T un réel strictement positif. On note $L(T)$ la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ entre les points $M(0)$ et $M(T)$.

a. Établir que pour tout $t \geq 0$, $2(e^t - e^{-t})^2 \leq \left\| \frac{d\vec{OM}}{dt}(t) \right\|^2 \leq 2e^{2t}$.

b. En déduire un encadrement de $L(T)$ puis un équivalent de $L(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$.

4. Soient Σ la surface d'équation $x^2 - (y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 2$ et Ω le point de coordonnées $(0, 2, 1)$. Pour tout réel α , on note Π_α le plan d'équation $x = \alpha$.

- a. Démontrer que $\mathcal{C} \subset \Sigma$.
- b. Déterminer une équation du plan tangent en $M(\ln(2))$ à Σ .
- c. Déterminer la nature de la courbe $\Lambda_\alpha = \Sigma \cap \Pi_\alpha$ lorsque $|\alpha| \geq \sqrt{2}$. On précisera ses éléments caractéristiques. Qu'en est-il lorsque $|\alpha| < \sqrt{2}$?
- d. Justifier soigneusement que Σ est une surface de révolution dont on précisera l'axe Δ .
- e. Rappeler la définition d'une méridienne pour une surface de révolution.
- f. Préciser la nature des méridiennes de Σ , et les dessiner.

- h. La surface de révolution obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de $\Delta_1 : \begin{cases} y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$ est-elle égale à Σ ?

EXERCICE 4

Dans le repère orthonormé affine euclidien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation cartésienne

$$5(x^2 + y^2) - 6xy + 8\sqrt{2} \cdot (x - y) = 0$$

1. Déterminer la nature de cette courbe et préciser ses éléments géométriques remarquables.
2. Représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ

EXERCICE 5

- I. Dans cette question, $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux à coefficients réels.

Pour tout couple $(P, Q) \in E^2$, on note

$$\langle P, Q \rangle = P(1) \cdot Q(1) + P'(1) \cdot Q'(1) + P''(1) \cdot Q''(1)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P , et P'' le polynôme dérivé de P'

- 1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E
- 2) Déterminer une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E telle que $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $\deg P_k = k$
(on pourra chercher des polynômes de coefficient dominant égaux à un)
- 3) Donner la décomposition du polynôme $U = X^2 - 4$ dans la base (P_0, P_1, P_2) puis en déduire la distance du polynôme U à l'espace $\mathbb{R}_1[X]$
- 4) On note H l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $P(1) = 0$
 - a) Justifier que H est un hyperplan de E .
 - b) Soit f la réflexion par rapport à H .
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

- II. Dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$ où n désigne un entier supérieur ou égal à deux.

On munit cet espace du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^n P^{(j)}(1) \cdot Q^{(j)}(1) = P(1) \cdot Q(1) + P'(1) \cdot Q'(1) + P''(1) \cdot Q''(1) + \dots + P^{(n)}(1) \cdot Q^{(n)}(1)$$

(Comme d'habitude, $P^{(j)}$ désigne la dérivée j -ième du polynôme P avec la convention habituelle $P^{(0)} = P$)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P_k = (X - 1)^k$ (on a par convention $P_0 = 1$)

- 1) Rappeler les deux manières de caractériser le fait que " le réel α est une racine de multiplicité r du polynôme Q "
- 2) a) Indiquer ce que vaut $P_0^{(j)}(1)$ lorsque $j \in \mathbb{N}$
b) Indiquer ce que vaut $P_k^{(j)}(1)$ lorsque $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ avec $k \geq 1$. Justifier.
c) Que vaut $P_k^{(k)}(1)$ lorsque $k \geq 1$?
d) Que vaut $P_k^{(j)}(1)$ pour $j > k \geq 1$?
- 3) Justifier que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale de E .
Déterminer $\|P_k\|$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$
- 4) Soit q un entier fixé dans l'intervalle $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
On note $F = \text{vect}(1, X, X^2, \dots, X^q)$
 - a) Donner la dimension de F et celle de $F^\perp$
 - b) $(1, X, X^2, \dots, X^q)$ est-elle une base orthogonale de F ?
 - c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket q+1, n \rrbracket$ on a $P_k \in F^\perp$
 - d) On note G le sev de E constitué des polynômes qui ont 1 comme racine de multiplicité au moins $q+1$.
Montrer que $G = F^\perp$

correction de l'exercice 1

Notons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u,v) \longmapsto (uv, u, v^2)$

1. On remarque que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x(-u, -v) = x(u,v) \\ y(-u, -v) = -y(u,v) \\ z(-u, -v) = z(u,v) \end{cases}$

ce qui prouve que $M(u,v)$ et $M(-u, -v)$ sont symétriques par rapport au plan xOz

2. On a $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ -2v^2 \\ -u \end{pmatrix}$

Ccl: $\boxed{\text{Seul le point } M(0,0) = (0,0,0) \text{ est un point singulier}}$

3. • Soit $(u,v) \neq (0,0)$.
 Le plan tangent au point $M(u,v)$ est le plan qui passe par ce point et a pour vecteur normal le vecteur ci-dessus.
 Son équation $\begin{pmatrix} x-uv \\ y-u \\ z-v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v \\ -2v^2 \\ -u \end{pmatrix} = 0$
 On trouve $\boxed{2vx - 2v^2y - uz + uv^2 = 0}$ (ce n'était pas demandé!)
 • Ce plan est un plan horizontal ssi le vecteur normal est colinéaire à $\vec{k}$ c-à-d ssi $v = 0$.

Notons E l'ensemble des points de S en lesquels le plan tangent est horizontal.

Conclusion: les points de S en lesquels le plan tangent est horizontal sont les points $M(u,v)$ avec $(u,v) \neq (0,0)$ et $v = 0$, c-à-d les points $M(u,v)$ avec $u \neq 0$ et $v = 0$

Ainsi $E = \{M(u,0) \mid u \neq 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \mid u \neq 0 \right\}$

On reconnaît $\boxed{\text{l'axe } (Oy) \text{ privé du point } O}$

4. • Une surface réglée est une surface qui est une réunion de droites.

- Les lignes coordonnées à v fixé sont les arcs paramétrés $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $u \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On reconnaît que ces lignes coordonnées sont des droites, ce qui prouve que S est une surface réglée.

- On a prouvé ci-dessus que les génératrices sont les droites D_v qui passent par le point $(0,0,v^2)$ et de vecteur directeur $\vec{d}_v = (v,1,0)$

- la droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\vec{d}_v$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires uniquement lorsque $v = -2$: la génératrice parallèle à la droite (AB) est donc la droite qui passe par le point $(0,0,4)$ et de vecteur directeur $(-2,1,0)$

5. On procède par double inclusion, en commençant par élimination du paramètre.

- (a) Soit $M(x,y,z) \in S$

On sait qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = uv \\ y = u \\ z = v^2 \end{cases}$
 On remarque que $x^2 = u^2.v^2 = y^2.z$

Notons S_1 la surface d'équation cartésienne $x^2 = y^2.z$

On a montré que $S \subset S_1$

- (b) Soit $M(x,y,z) \in S_1$

On sait donc que $x^2 = y^2.z$

On s'intéresse au système $\begin{cases} x = uv \\ y = u \\ z = v^2 \end{cases}$

Il est clair que l'on pose $u = y$.

Deux cas sont alors à envisager.

- premier cas: $y \neq 0$

On pose $v = \frac{x}{y}$

On a alors $x = yv = uv$ car $y = u$ et comme $x^2 = y^2.z$ on a $z = \frac{x^2}{y^2} = \frac{(uv)^2}{u^2} = v^2$.

On a bien montré qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = uv \\ y = u \\ z = v^2 \end{cases}$

c-à-d que $M \in S$

- second cas: $y = 0$

Comme $x^2 = y^2.z$ on a alors $x = 0$ et z quelconque dans $\mathbb{R}$.

(on constate par exemple que le point $(0,0,-1)$ est un point de S_1 mais n'est pas un point de S ... Aie!Aie!Aie!)

En ayant posé $u = y = 0$, on a déjà $y = 0 = u$ et $x = 0 = uv$ (et ce pour tout v)

On voit alors qu'il n'y a que la dernière égalité qui va fournir une condition. Il s'agit de savoir s'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $z = v^2$.

On voit que cela n'est possible que si $z \geq 0$.

Dans ce cas, on sait qu'il existe un v tel que $z = v^2$ (par exemple $v = \sqrt{z}$).

On a alors prouvé que sous la condition $z \geq 0$ et uniquement sous cette condition, il existe

$v \in \mathbb{R}$ et $u(=0) \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = uv \\ y = u \\ z = v^2 \end{cases}$

c-à-d $M \in S_1$

- (c) Conclusion: $\boxed{\text{on a montré que } S \text{ a pour équation cartésienne } x^2 = y^2.z \text{ avec } z \geq 0}$

correction de l'exercice 2

1. Nous allons vérifier que φ envoie une BON sur une BON.

On sait que $\mathcal{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une BON.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est aussi une BON.

En effet:

- $\|\vec{I}\| = \sqrt{(1/2)^2 + 0^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 1$
 $\|\vec{J}\| = \|\vec{j}\| = 1$
 $\|\vec{K}\| = \sqrt{(-\sqrt{3}/2)^2 + 0^2 + (1/2)^2} = 1$
- $\langle \vec{I}, \vec{J} \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$
 $\langle \vec{I}, \vec{K} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$
 $\langle \vec{K}, \vec{J} \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$

2. • On a $\vec{I} \wedge \vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{i} \wedge \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k} \wedge \vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{k} - \sqrt{3}\vec{i}) = \vec{K}$.

Comme φ envoie une BOND sur une BOND, on en déduit que φ est une rotation.

- Comme $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$, on en déduit que l'axe de la rotation est $D = \text{vect } \vec{j}$

- Ecrivons la matrice de φ dans la BOND $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$.
On obtient

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta = -\pi/3$$

Conclusion : φ est la rotation d'axe $\text{vect } \vec{j}$ et d'angle $-\pi/3$

correction de l'exercice 3

1. Le point $M(\ln 2)$ a pour coordonnées $(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2})$.

avec $\overrightarrow{M'(t)} = \overrightarrow{OM(t)} = (e^t - e^{-t}, -e^t, -e^{-t})$, et donc $\overrightarrow{M'(\ln 2)} = (\frac{3}{2}, -2, -\frac{1}{2})$.

Comme $\overrightarrow{M'(\ln 2)} \neq \vec{0}$, le point $M(\ln 2)$ est régulier, et $\overrightarrow{M'(\ln 2)}$ dirige la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(\ln 2)$. Cette tangente admet donc comme représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour définir cette droite comme l'intersection de deux plans, on peut par exemple éliminer le paramètre λ de cette représentation paramétrique pour obtenir un système d'équations cartésiennes de la tangente

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}y \\ z = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}y \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 4z - y = 6. \end{cases}$$

2. On va utiliser la formule du projeté orthogonal.

Notons $P(t)$ le projeté orthogonal de $M(t)$ sur la droite D .

On a

$$\overrightarrow{AP(t)} = \frac{\langle \overrightarrow{AM(t)}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

Or

$$\langle \overrightarrow{AM(t)}, \vec{d} \rangle = \langle \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ -e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

On en déduit que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = A} \quad (!)$

On en déduit que le point $M(t)$ est toujours dans le plan de vecteur normal $\vec{d}$ qui passe par A , ce qui permet de conclure que **la courbe $\mathcal{C}$ est plane, tracée dans ce même plan.**

3. a. Soit t un réel positif ou nul.

On a $\|\overrightarrow{M'(t)}\|^2 = (e^t - e^{-t})^2 + (-e^t)^2 + (-e^{-t})^2 = 2e^{2t} + 2e^{-2t} - 2$.

Or, d'une part,

$$2(e^t - e^{-t})^2 = 2e^{2t} + 2e^{-2t} - 4 \leq \|\overrightarrow{M'(t)}\|^2$$

et d'autre part $e^{-2t} \leq 1$ donc $2e^{-2t} - 2 \leq 0$ donc

$$\|\overrightarrow{M'(t)}\|^2 \leq 2e^{2t}$$

- b. Soit $T > 0$.

On sait que

$$L(T) = \int_0^T \|\overrightarrow{M'(t)}\|^2 dt$$

De l'encadrement précédent, on déduit que

$$\forall t \in [0, T], \sqrt{2}(e^t - e^{-t}) \leq \|\overrightarrow{M'(t)}\| \leq \sqrt{2}e^t$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\sqrt{2}(e^T + e^{-T} - 2) = \int_0^T \sqrt{2}(e^t - e^{-t}) dt \leq L(T) = \int_0^T \|\tau(t)\| dt \leq \int_0^T \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}(e^T - 1).$$

De cet encadrement, on déduit que

$$1 + e^{-2T} - 2e^{-T} \leq \frac{L(T)}{\sqrt{2}e^T} \leq 1 - e^{-T},$$

et donc que $\frac{L(T)}{\sqrt{2}e^T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 1$, c'est-à-dire que $L(T) \sim_{+\infty} \sqrt{2}e^T$.

4. a. Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a $M(t) \in \Sigma$, car

$$x(t)^2 - (y(t) - 2)^2 - (z(t) - 1)^2 = (e^t + e^{-t})^2 - (e^t)^2 - (e^{-t})^2 = \dots = 2$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \subset \Sigma}$

- b. Notons, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = x^2 - (y - 2)^2 - (z - 1)^2 - 2$, de sorte que l'équation de Σ soit $F(x, y, z) = 0$.

La fonction polynomiale F est de classe C^1 , et on a

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla F(x, y, z) = (2x, -2(y - 2), -2(z - 1))$$

et en particulier au point $M = M(\ln 2)$, on a

$$\nabla F(M) = (5, 4, -1) \neq \vec{0}$$

, ce qui montre que M est un point régulier de Σ .

On en déduit une équation du plan tangent à Σ en M :

$$5\left(x - \frac{5}{2}\right) + 4(y - 0) - 1\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0 \iff 5x + 4y - z = 11.$$

- c. Supposons $|\alpha| \geq \sqrt{2}$. Un système d'équations cartésiennes de Λ_α est

$$\begin{cases} x^2 - (y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 2 \\ x = \alpha. \end{cases} \iff \begin{cases} (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = \alpha^2 - 2 \\ x = \alpha \end{cases}$$

On reconnaît donc le **cercle tracé dans le plan Π_α , de centre le point de coordonnées $\Omega_\alpha = (\alpha, 2, 1)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2 - 2}$.**

rem: dans le cas où $\alpha = \pm\sqrt{2}$, Λ_α est réduit à un point.

Si on suppose $|\alpha| < \sqrt{2}$, l'équation $(y - 2)^2 + (z - 1)^2 = \alpha^2 - 2$ n'a pas de solution, donc $\Lambda_\alpha = \emptyset$.

- d. Σ est la réunion des courbes Λ_α lorsque α décrit $\mathbb{R}$, Σ est donc une réunion de cercles de centre Ω_α .

Or lorsque α décrit $\mathbb{R}$, Λ_α décrit la **droite qui passe par le point $A = (0, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{i}$** : notons Δ cette droite.

Récapitulons, Σ est la réunion de cercles centrés sur Δ et tracés dans des plans perpendiculaires à Δ : on peut en déduire que Σ est une surface de révolution d'axe Δ .

- e. Une méridienne de Σ est la section(=l'intersection) de Σ par un plan contenant l'axe de révolution.

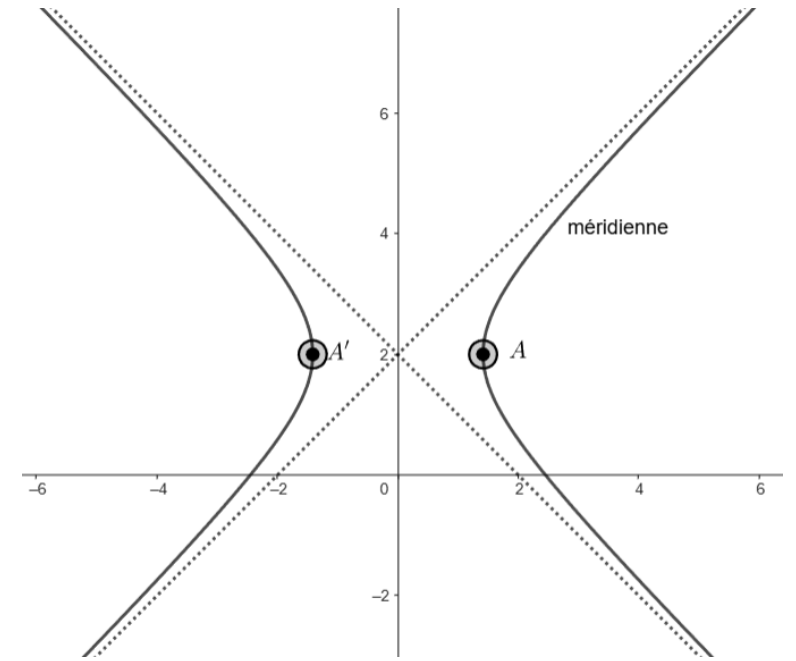
- f. Par exemple le plan $z = 1$ est un plan qui contient Δ .

Ainsi une méridienne est caractérisée par le système

$$\begin{cases} x^2 - (y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - (y - 2)^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{(y - 2)^2}{2} = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

On reconnaît une hyperbole:

- de centre $(0, 2, 1)$
- de sommets $(\pm\sqrt{2}, 2, 1)$
- d'asymptotes, dans le plan $z = 1$, $y - 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x = \pm x$



- g. La réponse est non!

Sans calcul on peut par exemple dire que

- 1) La courbe $\mathcal{C}$ étant paramétrée par une fonction vectorielle **continue**, la surface engendrée par sa rotation autour d'un axe est une surface "d'un seul morceau"
- 2) or, on a vu en Q4c), que la fonction Σ n'était pas une surface "d'un seul morceau"!

correction de l'exercice 4

- On note $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $L = (8\sqrt{2} \quad -8\sqrt{2})$

Dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de Γ s'écrit

$$U^T \cdot A \cdot U + L \cdot U = 0$$

- $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - 5 & 3 \\ 3 & X - 5 \end{vmatrix} = (X - 5)^2 - 3^2 = (X - 5 + 3)(X - 5 - 3) = (X - 2)(X - 8)$
ainsi $sp(A) = \{2, 8\}$

Chaque valeur propre est simple, donc chaque sep est de dimension 1

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre évident de A associé à 2

On en déduit que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à 8

- Considérons le nouveau repère orthonormé $\mathcal{R}' = (0, \vec{I}, \vec{J})$
avec $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$

On note P la matrice de passage de la BOND $(\vec{i}, \vec{j})$ vers la BOND $(\vec{I}, \vec{J})$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est ainsi une matrice orthogonale.

- Notons (X, Y) les coordonnées dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

On a ainsi $U = P.V$ et $V = P^T.U$ ainsi que $A = P.D.P^{-1} = P.D.P^T$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

On sait alors que la partie quadratique donne $\boxed{U^T.D.U = 2.X^2 + 8.Y^2}$

- Le calcul pour la partie linéaire donne

$$L.U = L.P.V = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -16Y$$

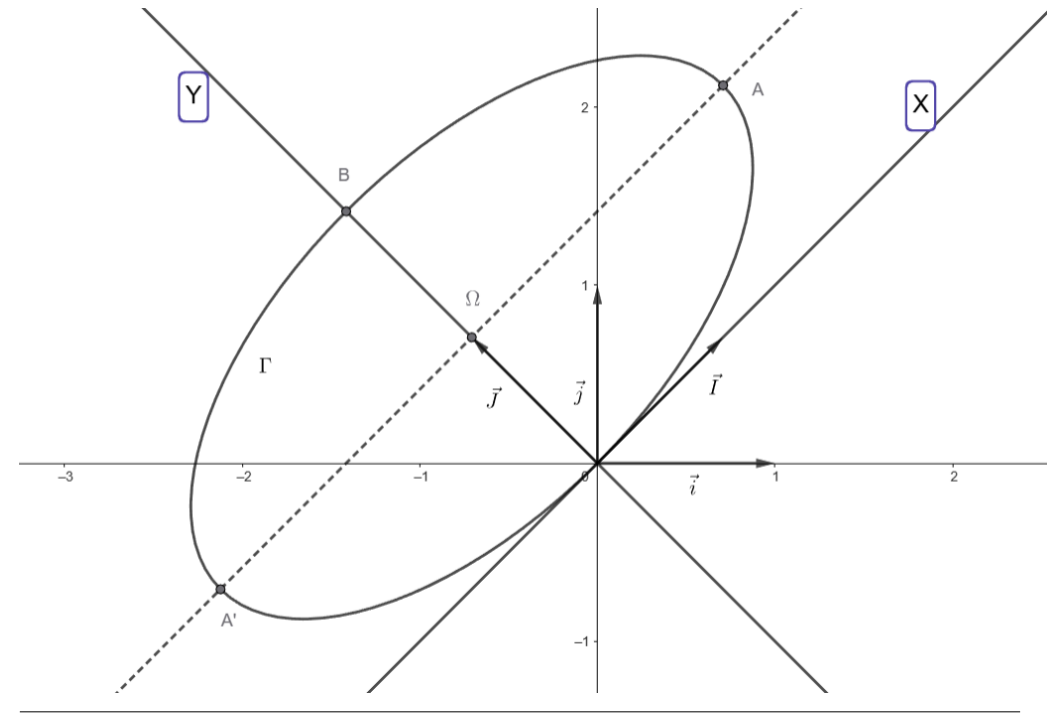
L'équation dans $\mathcal{R}'$ est donc

$$\begin{aligned} 2X^2 + 8Y^2 - 16Y &= 0 \iff X^2 + 4(Y^2 - 2Y) = 0 \\ &\iff X^2 + 4((Y-1)^2 - 1) = 0 \\ &\iff \frac{X^2}{2^2} + \frac{(Y-1)^2}{1^2} = 1 \end{aligned}$$

On reconnaît $\boxed{\text{une ellipse de demi-grand axe 2 et de demi-petit axe 1}}$

- Dans $\mathcal{R}'$, cette ellipse a
 - pour centre $\Omega(0,1)$
 - pour sommets $A(2,1), A'(-2,1), B(0,2)$ et $B'(0,0)$
- Pour avoir les coordonnées dans $\mathcal{R}$, on utilise la formule $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} & - \Omega\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ & - A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), A'\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), B(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ et } B' = O(0,0) \end{aligned}$$



correction de l'exercice 5

- 1) vérification classique
- 2) En cherchant avec des coefficients inconnus des polynômes de la forme

$$P_0 = 1 \quad P_1 = X + a \quad P_2 = X^2 + bx + c$$

On trouve $\boxed{P_0 = 1, P_1 = X - 1, P_2 = X^2 - 2X + 1}$

- 3)
 - $X^2 - 4 = P_2 + 2.P_1 - 3.P_0$
 - On a $\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(P_0, P_1)$
D'après le théorème de Pythagore, comme (P_2, P_1, P_0) est une famille orthogonale, on a pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|U - \alpha P_0 - \beta P_1\|^2 &= \|P_2 + (2 - \beta).P_1 - (3 + \alpha).P_0\|^2 \\ &= \|P_2\|^2 + (2 - \beta)^2.\|P_1\|^2 + (3 + \alpha)^2.\|P_0\|^2 \\ &\geq \|P_2\|^2 \text{ avec égalité ssi } (\alpha, \beta) = (-3, 2) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$d(U, \mathbb{R}_1[X]) = \inf\{d(U, \alpha P_1 + \beta P_0) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \|P_2\| = 2$$

- On pouvait aussi vérifier que le projeté orthogonal de U sur $\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(P_0, P_1)$ était $2.P_1 - 3.P_0$, et ensuite appliquer le théorème du cours.

4) a) Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$

On a

$$P(1) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff c = -a - b$$

ainsi

$$H = \{a(X^2 - 1) + b(X - 1) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(X^2 - 1, X - 2)$$

Comme la famille $(X^2 - 1, X - 1)$ est clairement libre (famille de deux vecteurs non colinéaires), on en déduit que $\dim H = 2$, et ainsi que H est un hyperplan de E

b) On a $H = \text{vect}(P_2)^\perp$

et d'après la formule intrinsèque d'une réflexion

$$\forall P \in E, f(P) = P - 2 \cdot \frac{\langle P, P_2 \rangle}{\|P_2\|^2} \cdot P_2$$

On trouve que

$$f(1) = 1 \quad f(X) = X \quad f(X^2) = X^2 - \frac{4}{3}P_2 = -X^2 + 4X - 2$$

$$\text{Ainsi la matrice cherchée est } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II. 1) On a équivalence entre les 3 propositions suivantes

i) α est une racine de multiplicité r de Q

ii) $\exists S \in \mathbb{R}[X], Q(X) = (X - \alpha)^r \cdot S(X)$ avec $S(\alpha) \neq 0$

iii) $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = \dots = Q^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $Q^{(r)}(\alpha) \neq 0$

$$2) a) P_0^{(j)}(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Pour $k \geq 1$ et $0 \leq j \leq k - 1$, $P_k^{(j)}(1) = 0$

d'après la caractérisation de la multiplicité avec les dérivées car 1 est racines de P_k de multiplicité k

c) Pour $k \geq 1$, on a $P_k^k(X) = k!$ donc $P_k^k(1) = k!$

d) Pour $j > k \geq 1$, $P_k^{(j)}(X) = 0$ donc $P_k^j(1) = 0$

En résumé on vient de montrer que dans tous les cas

$$P_k^j(1) = \begin{cases} k! & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) • Soit $k_1 \neq k_2$.

On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned} \langle P_{k_1}, P_{k_2} \rangle &= \sum_{j=0}^n P_{k_1}^{(j)}(1) \cdot P_{k_2}^{(j)}(1) \\ &= P_{k_1}^{(k_1)}(1) \cdot P_{k_2}^{(k_1)}(1) + P_{k_1}^{(k_2)}(1) \cdot P_{k_2}^{(k_2)}(1) \\ &= (k_1!) \cdot 0 + 0 \cdot k_2! \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $\boxed{\text{la famille } (P_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une famille orthogonale}}$

• Soit $0 \leq k \leq n$

$$\langle P_k, P_k \rangle = \sum_{j=0}^n P_k^{(j)}(1) \cdot P_k^{(j)}(1) = P_k^{(k)}(1) \cdot P_k^{(k)}(1) = (k!)^2$$

donc $\boxed{\|P_k\| = k!}$

4) a) $\dim F = q + 1$ et $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = (n + 1) - (q + 1) = n - q$

b) NON, car $\langle 1, X \rangle = 1$

c) • La famille $\mathcal{F} = (P_k)_{0 \leq k \leq q}$ est une famille orthogonale de F qui ne contient pas le vecteur nul, donc $\mathcal{F}$ est une famille libre de F

• Comme de plus $\text{card}(\mathcal{F}) = q + 1 = \dim F$, on en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de F

• On vient de montrer que $F = \text{vect}(P_0, P_1, \dots, P_q)$.

D'après Q3), on sait que $\forall k \in \llbracket q + 1, n \rrbracket, P_k$ est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_q$,

On en déduit donc que $P_k \in F^\perp$

d) • On sait d'une part que

$$\begin{aligned} G &= \{(X - 1)^{q+1} \cdot S(X) \mid S \in \mathbb{R}_{n-q-1}[X]\} \\ &= \{(X - 1)^{q+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-q-1} a_k \cdot X^k \mid (a_0, \dots, a_{n-q-1}) \in \mathbb{R}^{n-q}\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-q-1} a_k \cdot X^k \cdot (X - 1)^{q+1} \mid (a_0, \dots, a_{n-q-1}) \in \mathbb{R}^{n-q} \right\} \\ &= \text{vect}((X - 1)^{q+1}, X \cdot (X - 1)^{q+1}, \dots, X^{n-q-1} (X - 1)^{q+1}) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{G} = ((X - 1)^{q+1}, X \cdot (X - 1)^{q+1}, \dots, X^{n-q-1} (X - 1)^{q+1})$ est une famille génératrice de G . Etant par ailleurs une famille de polynômes échelonnée en degré, $\mathcal{G}$ est une famille libre, et donc $\mathcal{G}$ est une base de G

On en déduit que $\dim G = \text{card}(\mathcal{G}) = n - q$

• D'autre part, il est évident que $\forall k \in \llbracket q + 1, n \rrbracket, P_k \in G$.

Ainsi $\mathcal{H} = (P_k)_{q+1 \leq k \leq n}$ est une famille de G .

Comme $\mathcal{H}$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, c'est une famille libre de G .

Et comme $\text{card}(\mathcal{H}) = n - q = \dim G$, on a donc $\mathcal{H}$ base de G .

On vient de montrer que $G = \text{vect}(P_{q+1}, P_{q+2}, \dots, P_n)$

• Grâce à la question c) précédente, on a $G \subset F^\perp$.

Et comme on a prouvé que ces deux espaces avaient même dimension, on a prouvé l'égalité

$$\boxed{G = F^\perp}$$