

2 Variables aléatoires

Variables aléatoires

PRO 60

On considère une va discrète X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3.P(X = n + 2) = 4.P(X = n + 1) - P(X = n)$$

1. Déterminer la loi de X
2. Déterminer $P(X^2 - X - 6 \geq 0)$
3. X admet-elle une espérance? Une variance? Si oui, les calculer!
(On pourra considérer $Y = X + 1$)

PRO 61

Une urne contient p boules numérotées de 1 à p . On tire une boule au hasard et on note X son numéro. On replace cette boule dans l'urne et on échange toutes les boules qui ont un numéro strictement inférieur à X par une boule de numéro X (l'urne conserve le même nombre de boules). On recommence cette procédure n fois. X_n est le numéro de la boule obtenue au n -ième tirage.

1. Trouver la loi de X_1 .
2. Montrer que $P(X_2 = k) = \frac{2k-1}{p^2}$ pour $k \in \{1, \dots, p\}$ (On pourra utiliser le SCE lié à X_1)
3. Montrer que $P(X_{n+1} = p) = \frac{p-1}{p}P(X_n = p) + \frac{1}{p}$
4. En déduire $P(X_n = p)$

PRO 62

Soit $n \geq 2$ un entier fixé.

Une assemblée est composée de n garçons (notés $g_1, g_2, \dots, g_n$) et de n filles (notées $f_1, f_2, \dots, f_n$). Chaque garçon choisit au hasard une fille (indépendamment du choix des autres garçons) et lui envoie une carte d'invitation à une soirée.

On note X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si et seulement si la fille f_i est invitée.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles invitées

1. Donner la loi de X_i et $E(X)$
2. On note Y le nombre de filles invitées plusieurs fois, Z_i le nombre d'invitations reçues par la fille f_i et Y_i la variable de Bernoulli égale à 1 si et seulement si la fille f_i est invitée plusieurs fois.
Déterminer la loi de Z_i , la loi de Y_i . En déduire $E(Y)$

PRO 63

On lance n fois un dé équilibré à six faces.

On note X le nombre de numéros différents sortis

Pour $i \in \{1, \dots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le numéro i est sorti

1. Déterminer la loi de X_i
2. Ecrire X sous forme d'une somme de variables aléatoires et en déduire son espérance
3. Pour $i \neq j$ calculer
 - (a) $P(X_i = 0 \text{ et } X_j = 0)$. Les variables X_i et X_j sont elles indépendantes?
 - (b) $P(X_i = 1 \cap X_j = 0)$, puis $P(X_i = 1 \cap X_j = 1)$

PRO 64

Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il lui écrit à coup sûr le jour de l'an (le premier janvier) puis s'il lui a écrit le jour j , il lui écrit le jour $j + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, s'il ne lui a pas écrit le jour j , il lui écrit à coup sûr le lendemain.

On note X_j la variable de Bernoulli qui vaut 1 s'il écrit à la jeune fille le jour j et 0 sinon.

1. Trouver une relation entre $P(X_{j+1} = 1)$ et $P(X_j = 1)$
2. En déduire la loi de X_j
3. Soit X la variable égale au nombre de lettres envoyées. Donner $E(X)$

PRO 65

On dispose de deux boîtes A et B. La boîte A contient 4 boules rouges et 7 boules vertes.

La boîte B contient 6 boules rouges et 5 boules vertes.

On choisit une boîte au hasard puis une poignée de 3 boules dans celle-ci.

Soit X le nombre de boules rouges obtenues.

Déterminer la loi de X puis son espérance.

PRO 66

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit des réels $(p_i)_{1 \leq i \leq 2n-1}$ par

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, p_i = a.i$ et $\forall i \in \{1 + n, \dots, 2n - 1\}, p_i = a.(2n - i)$ où a est un nombre réel fixé

1. Pour quelle valeur de a ces réels définissent-ils la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, \dots, 2n - 1\}$?
On suppose désormais que a est égal à cette valeur
2. Démontrer que X et $Y = 2n - X$ ont la même loi . En déduire $E(X)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. Calculer $E(X^2)$ en déduire $V(X)$

PRO 67

Un lapin se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. A l'instant 0, il est à l'origine, et à chaque instant entier, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité p et d'une unité vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. On note X_n son abscisse après n sauts et D_n le nombre de sauts vers la droite après n pas

1. Donner la loi de D_n , exprimer X_n en fonction de D_n
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n . Pour quelle valeur de p , la variable X_n est-elle centrée?

PRO 68

On considère une assemblée de n personnes. Une urne contient toutes les listes non ordonnées d'une longueur quelconque (mais non nulle!), écrite avec les noms de ces n personnes.

Combien y a-t-il de listes dans l'urne? (*pour $n = 2$, il y a donc 3 listes*)

On tire au hasard un papier et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes figurant sur la liste.

1. Déterminer la loi de X
2. Calculer son espérance (*on trouvera $\frac{n.2^{n-1}}{2^n - 1}$*)
3. Calculer sa variance

PRO 69

Soit X et Y deux v.a. qui suivent la même loi $\mathcal{G}(p)$.

Déterminer $P(X = Y), P(X > Y)$ et $P(X < Y)$

PRO 70

Initialement, une urne A contient 2 jetons numérotés 0 et une urne B contient 2 jetons numérotés 1.

A chaque coup, on échange un jeton pris au hasard dans A et un jeton pris au hasard dans B.

X_n est la somme des numéros des jetons de l'urne A après n échanges.

On note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$

1. Trouver une matrice M telle que $U_{n+1} = M.U_n$.
2. Diagonaliser M .
3. En déduire la loi de X_n

PRO 71

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$

1. Déterminer la loi de Y_n , son espérance et sa variance.
2. Soient $i < j$ deux entiers naturels distincts.
Discuter suivant les valeurs de i et j de l'indépendances de Y_i et de Y_j .
3. Calculer $E(Y_i Y_j)$ pour $i \leq j$

PRO 72

Une urne contient des boules de 3 types différents mais indiscernables au toucher.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note p_i la proportion de boules de type i . On tire n boules au hasard et avec remise.

On note X_i le nombre de boules tirées de type i .

1. Donner la loi de X_i et sa variance
2. Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes
3. Donner la loi de $X_i + X_j$ pour $i \neq j$ et sa variance

PRO 73

Une urne contient des boules de 3 types différents mais indiscernables au toucher.

Il y a 4 boules du type 1, 5 boules du type 2 et 6 boules du type 3.

On tire 3 boules simultanément.

On note X_i le nombre de boules tirées de type i .

1. Donner la loi de $X_1 + X_2 + X_3$, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de X_1
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_1
4. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes
5. Donner la loi de $X_1 + X_2$

PRO 74

On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

On note X le numéro le plus petit et Y le numéro le plus grand.

1. Déterminer la loi de Y et celle de X
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$

PRO 75 (utilisation du théorème de transfert ou calcul de la loi)

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur $[1, n]$.

On note $Y = (-1)^X$ et $Z = \frac{Y+1}{2}$

Déterminer les espérances et variances de Y et Z

PRO 76 (résultats immédiats en percevant l'espérance comme une moyenne)

Montrer les résultats suivants:

1. Si X est la var constante égale à c alors $E(X) = c$
2. Si X est une var pour laquelle il existe un réel c tel que $P(X = c) = 1$ alors $E(X) = c$
3. s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \omega \in \Omega, m \leq X(\omega) \leq M$ alors $m \leq E(X) \leq M$

PRO 77 (démonstration de cours)

Soit X une v.a.r.d

On dit que la variable aléatoire X est presque sûrement constante lorsque $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$

1. Montrer que si X est presque sûrement constante alors $V(X) = 0$
2. Montrer la réciproque

PRO 78

Un compteur devrait afficher les valeurs d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Mais lorsque X est nulle, il affiche un nombre au hasard entre 1 et n .

Lorsque X est non nulle, il affiche bien X .

On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre affiché par le compteur.

Déterminer la loi de Y , ainsi que son espérance et sa variance.

PRO 79

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$

PRO 80 (l'indépendance deux à deux n'implique pas la mutuelle indépendance)

Soient X et Y deux variables indépendantes qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}(\{-1, +1\})$.

On considère la v.a $Z = XY$

Montrer que X, Y et Z sont des variables indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

PRO 81

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables mutuellement indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{U}([1, N])$.

On note $M = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout $k \in [1, N]$ déterminer $P(M \geq k)$ puis la loi de M

PRO 82 (démonstration de cours: espérance et variance pour la loi binomiale)

Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.q$

PRO 83

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est une série convergente et calculer sa somme.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \geq 1, P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}$

- (a) Déterminer a
- (b) Montrer que X est d'espérance finie et donner $E(X)$
- (c) La variable aléatoire $Y = (-1)^X.X^2$ possède-t-elle une espérance?

PRO 84

Montrer que si une var X est bornée, alors elle est d'espérance finie. Plus précisément, montrer que s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \omega \in \Omega, m \leq X(\omega) \leq M$ alors $m \leq E(X) \leq M$

PRO 85

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On considère $Y = (-1)^X$ et $Z = \frac{1}{(X+1)(X+2)}$

1. Montrer que Y et Z admettent des espérances finies
2. Déterminer l'espérance de Y et celle de Z en utilisant le théorème de transfert
3. Déterminer la loi de Y , puis retrouver son espérance

PRO 86 (un exemple de var. d'espérance non finie)

Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée, et en ajoutant une nouvelle boule de la même couleur que la boule tirée. On note X le nombre de tirages nécessaires avant de tirer une boule blanche. Déterminer la loi de X . Est-elle d'espérance finie?

PRO 87

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \geq 1, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$

et une v.a. Y telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $G_Y(t) = \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{t}$ pour $t \neq 0$

1. Déterminer $G_Y(0)$
2. Déterminer $G_X(t)$
3. Que dire de X et Y ?

PRO 88

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Par la méthode de votre choix, déterminer $E((X-3)^2)$ et $E(\frac{1}{X})$

PRO 89

Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice : $G_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$ pour tout $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

(on suppose que chaque événement élémentaire est de probabilité non nulle)

Déterminer la loi de X . Reconnaître la loi de $Y = \frac{1}{2}(X+1)$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$

PRO 90

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux var indépendantes. Déterminer la loi X conditionnelle à $X+Y = k$.

On devra trouver $\mathcal{B}(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$

PRO 91

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n .

La boîte k renferme k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ainsi que la loi de X .
2. Pour $(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ déterminer $P_{X=k}(Y = j)$
3. Calculer $P(X = Y)$
4. Donner la loi de Y et calculer son espérance (*on trouvera $E(Y) = \frac{n+3}{4}$*)

PRO 92

On lance un dé équilibré à 6 faces. On note X la va égale au nombre de lancer pour obtenir le 1.

1. Donner la loi de X .
2. Le 1 n'est pas sorti lors des 100 premiers lancers: quelle est la probabilité qu'il sorte la première fois lors du 111 ème lancer? Comparer avec $P(X = 11)$

PRO 93 (répétitions d'un nombre fini d'expériences identiques indépendantes)

On réalise n expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p . On note Y le nombre de succès obtenus, et X le rang du premier succès (et $X = 0$ au cas où aucun succès n'est observé). Donner les lois de X et de Y .

PRO 94 (répétitions d'un nombre infini d'expériences identiques indépendantes)

On réalise une infinité d'expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p (schéma de Bernoulli). On note X le rang du premier succès (et $X = 0$ au cas où aucun succès n'est observé). Donner la loi de X .

PRO 95

1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux var indépendantes. Montrer que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$
2. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux var indépendantes. Chercher la loi de $X|(X + Y = k)$
3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux var indépendantes. Chercher la loi de $X|(X + Y = k)$

On sera peut être amené à utiliser la formule de Vandermonde: soient m et n deux entiers, p un

entier inférieur à $\min(m, n)$. alors on a $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{p-k}$

PRO 96 (classique mais... peu représentatif)

On lance deux dés à six faces truqués distinguables.

On note $X_1[X_2]$ le numéro du premier [second], ainsi que $Y = X_1 + X_2$.

On va montrer par l'absurde qu'il n'est pas possible de truquer les 2 dés de manière à ce que Y suive une loi uniforme.

On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$

1. Expliquer pourquoi il existe $(a_1, \dots, a_6) \in \mathbb{R}^6$ et $(b_1, \dots, b_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que

$$G_{X_1}(t) = t.(a_1 + a_2t + \dots + a_6t^5) \stackrel{def}{=} t.Q_1(t) \quad \text{et} \quad G_{X_2}(t) = t.(b_1 + b_2t + \dots + b_6t^5) \stackrel{def}{=} t.Q_2(t)$$

2. (a) Montrer que $a_1.b_1 = a_6.b_6 = \frac{1}{11}$
(b) Montrer que Q_1 est un polynôme de degré 5 à coefficients réels qui possède au moins une racine réelle différente de 0 et 1
3. Donner $G_Y(t)$ et expliquer à quoi est égal $G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$
4. Justifier que $\forall t \notin \{0, 1\}, \frac{1-t^{11}}{1-t} = 11.Q_1(t).Q_2(t)$
5. Etablir une contradiction avec la question 2.

PRO 97

Soient A, B et C trois événements indépendants.

On note $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$

Calculer $E(X), E(X^2)$ ainsi que la loi de X

PRO 98 (fonction indicatrice d'un évènement)

Soit un espace probabilisé fini (Ω, P) . On appelle indicatrice d'un évènement A , la variable aléatoire χ_A définie par $\forall \omega \in \Omega, \chi_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\chi_A(\omega) = 0$ sinon

1. Vérifier que si A et B sont deux évènements

$$X_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A, \quad X_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$$

2. Démontrer que $E(\chi_A) = P(A)$
3. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de n évènements, interpréter $\sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$. Quel est le nombre moyen d'évènements réalisés?
4. Parmi $2n$ personnes formant n couples, m personnes décèdent. En moyenne combien de couples ont survécu?

PRO 99

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard et avec remise N jetons. On appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X \leq k)$
2. Montrer que pour $k \in \{2, \dots, n\}$, $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$
En déduire pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X = k)$
3. Démontrer que $E(X) = n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^N$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{n}$ puis donner un équivalent de $E(X)$

4. Quelle est la limite de $E(X)$ quand $N \rightarrow +\infty$

PRO 100

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E_n des points du plan de coordonnées $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ avec $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$

1. Déterminer le nombre d'éléments de E_n , puis le nombre de segments reliant deux points de E_n
2. soit Ω l'ensemble des carrés non réduits à un point dont les sommets sont dans E_n et dont les côtés sont parallèles aux axes

Déterminer le nombre de carrés de Ω qui ont leurs arêtes de longueur $\frac{k}{n}$, en déduire $\text{card}(\Omega)$

3. A l'aide de X la variable aléatoire égale au périmètre des carrés de Ω , donner la valeur moyenne des périmètres des carrés de Ω et la limite de cette moyenne quand n tend vers $+\infty$

PRO 101

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant. On note X le nombre de tirages effectués (par exemple, une suite de tirages possibles est 4,2,1,2 et dans ce cas $X = 4$)

1. Donner $X(\Omega)$
2. Donner la loi de X puis son espérance pour $n = 3$, puis pour $n = 4$
3. Dans le cas général, déterminer $P(X = k)$ pour $k \in [2, n]$ et justifier que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$
4. Que vaut $\lim E(X)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

PRO 102

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X et qui suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$

Chercher la loi de $Z = XY$, son espérance et sa variance

Calculer la probabilité que Z soit paire

PRO 103

Le matin, un étudiant effectue n recherches (indépendantes bien sûr!) pour essayer de résoudre n exercices. Pour chaque exercice, il a une probabilité p de le résoudre et $q = 1 - p$ de ne pas le résoudre.

1. On note X le nombre d'exercices résolus le matin. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance
2. Cet étudiant tente le soir, une seconde fois, de résoudre les $n - X$ exercices qui lui ont résisté le matin. On note Y le nombre d'exercices résolus le soir, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (on doit obtenir $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$)
4. Démontrer que $P(Z = l) = \sum_{k=0}^l P((X = k) \cap (Y = l - k))$ pour tout $l \geq 0$
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens. En déduire $P(Z = l)$
6. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l} \binom{l}{k}$, et en déduire que $P(Z = l) = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$
7. En constatant que $p(1+q) = 1 - q^2$, reconnaître la loi suivie par Z

PRO 104

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire simultanément deux jetons. On note X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand

1. Quelle est la loi conjointe de (X, Y) ?
2. En déduire les lois marginales de X et de Y
3. Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y-2))$, $E(Y^2)$ puis la variance de Y

$$\text{On rappelle } \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

4. Montrer que X et $n+1-Y$ ont la même loi et en déduire l'espérance et la variance de X

PRO 105

On dispose de $2n+1$ jetons dont une face est noire et l'autre est blanche.

On lance simultanément ces jetons.

On note B le nombre de faces blanches obtenues et N le nombre de faces noires

Expliquer pourquoi une seule des 2 couleurs apparaît un nombre impair de fois. On désigne par X la variable égale à ce nombre impair.

1. donner la loi de B , la loi de N , donner leur espérance et leur variance
2. Calculer $\text{cov}(B, N)$
3. Calculer la loi de X , son espérance et sa variance

PRO 106

Soit (X, T) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que $P((X, T) = (p, q)) = a \frac{p+q}{p!q!2^{p+q}}$

1. Déterminer le réel a
2. Calculer les lois marginales
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

PRO 107

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que $P((X, Y) = (p, q)) = a \frac{c^{p+q}}{p!q!}$

1. Déterminer le réel a
2. Calculer les lois marginales
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Quelle est la loi de $S = X + Y$?

PRO 108

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{n \cdot 2^n \cdot \ln(2)}$

1. Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$
2. On considère la va X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = n) = p_n$
 - (a) X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer!
 - (b) La va $Y = (\ln 2) \cdot X - 1$ possède-t-elle une espérance?

PRO 109

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Z = X - Y$

PRO 110

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé indépendantes. X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Z=XY$

1. Déterminer G_X et G_Y les fonctions génératrices de X et de Y
2. Montrer que la fonction génératrice de Z vérifie $G_Z = G_Y \circ G_X$
3. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$

PRO 111

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$ respectivement avec $p_1 \neq p_2$ On notera $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$

1. Déterminer la loi de $S = X_1 + X_2$
2. Calculer $P(X_1 \geq k)$ et $P(X_2 \geq k)$
3. Calculer $P(X_1 \leq X_2)$ et $P(X_2 \leq X_1)$ ainsi que $P(X_1 = X_2)$
4. On pose $M = \min(X_1, X_2)$. Calculer $P(M \geq m)$, en déduire la loi de M
5. Démontrer que la loi de X_1 sachant $(X_1 \leq X_2)$, la loi de X_2 sachant $(X_2 \leq X_1)$ et la loi de M sont les mêmes

PRO 112

On effectue une suite d'expériences indépendantes à deux issues possibles A et B. On s'intéresse à la longueur X_1 de la première série ininterrompue de A ou B et à X_2 la longueur de la deuxième série ininterrompue.

Par exemple, si on obtient AAABBBBBAB alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 4$

On note p la probabilité d'obtenir A et $q = 1 - p$ celle d'obtenir B

1. Déterminer les lois de X_1 , de (X_1, X_2) et de X_2
2. Calculer les espérances et variances de X_1 et X_2
3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$

PRO 113

Julien part à la chasse aux coléoptères.

On suppose que le nombre N de coléoptères qu'il croise suit une loi de Poisson de paramètre λ .

La probabilité qu'un coléoptère soit une coccinelle est égale à $\alpha > 0$.

On note C le nombre de coccinelles rencontrées.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(C = k | N = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$
2. Déterminer la loi conditionnelle de C sachant $N = n$
3. En déduire la loi de C et son espérance

PRO 114

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. X_1 est le premier numéro tiré, X_2 est le second

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2) , de X_1 et de X_2
2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

PRO 115

Soit X une vard admettant une variance $\sigma^2 > 0$.

Montrer que $\forall \alpha > 0, P(|X - E(X)| < \alpha \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$

PRO 116

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{p}\right| < \varepsilon\right) = 1$

PRO 117 (classique: somme de deux lois géométriques)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Déterminer la loi de $X + Y$

PRO 118 (classique: somme de deux lois géométriques)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

En utilisant les fonctions génératrices, déterminer la loi de $X + Y$

PRO 119

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

On note $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$

Déterminer la loi de Z et déterminer son espérance (si elle existe)

(On pourra commencer par déterminer $P(Z \leq n)$)

Mêmes questions avec T . Z et T sont-elles indépendantes?

PRO 120

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = k$ avec $k \geq 2$ fixé.
3. Déterminer $P(S \geq n)$ pour $n \geq 2$
4. Calculer $P(S \geq Z)$ et $P(S = Z)$

PRO 121

On considère X une va dont la loi est donnée par le tableau

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

On pose $Y = |X|$ et $Z = X^3 - X$

1. Donner $X(\Omega), Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$
2. Donner les lois de Y et de Z
3. Espérance et variance de ces va

PRO 122

Soi X une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq 0, P(X = n) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + a^n}{n!} \right)$

1. Déterminer la fonction génératrice de X . En déduire son espérance et sa variance.
2. Y étant une v.a.r.d indépendante de X et suivant la même loi, on pose $S = X + Y$. Déterminer la fonction génératrice de $S = X + Y$. En déduire la loi de S

PRO 123

1. Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $P \left(p - \sqrt{\frac{5}{n}} < \frac{X_n}{n} < p + \sqrt{\frac{5}{n}} \right) \geq 0.95$
2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} \right| < \varepsilon \right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

Covariance**PRO 124**

Soit (X, Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau de gauche suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

$Z \setminus T$	1	2	3	4
1	0.08	0.08	0.24	0.12
2		0.02		
3				

1. Déterminer $cov(X, Y)$ (on devra trouver 0)
2. On pose $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$. Déterminer $cov(Z, T)$ (on trouvera $E(ZT) = 5.6$ et $cov(Z, T) = 0.2496$)

PRO 125 (covariance nulle n'implique pas l'indépendance!)

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.

Soient X la variable prenant pour valeur de nombre de Pile obtenus moins un, et Y la variable prenant pour valeur le nombre de Pile au deuxième lancer moins le nombre de Pile au premier lancer.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y)
2. Calculer la covariance des variables X et Y
3. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

PRO 126

Une boîte contient $n - 2$ boules blanches et 2 boules noires. On tire n boules sans remise. On note X le rang d'arrivée de la première boule noire et Y le rang de la seconde

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) . En déduire les lois de X et de Y
2. Montrer qu'il existe un réel a tel que Y et $a - X$ ont la même loi. En déduire une relation entre $E(X)$ et $E(Y)$, puis entre $V(X)$ et $V(Y)$
3. Déterminer $cov(X, Y)$

PRO 127

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. X_1 est le premier numéro tiré, X_2 est le second

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2) puis les lois de X_1 et de X_2
2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes? Calculer $cov(X_1, X_2)$.

PRO 128

Une urne contient des boules de types différents (bleues, jaunes, etc) mais indiscernables au toucher. Le type numéro i est en proportion p_i . On tire n boules au hasard et avec remise. On note X_i le nombre de boules tirées de type i .

1. Donner la loi de X_i et sa variance
2. Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes
3. Donner la loi de $X_i + X_j$ pour $i \neq j$ et sa variance
4. En déduire $cov(X_i, X_j)$

PRO 129

Soit $n \geq 2$ fixé et a un réel.

On considère les variables aléatoires X et Y définies par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $P(X = i \cap Y = j) = p_{i,j} = a.i.j$

1. Déterminer a pour que les réels $p_{i,j}$ définisse une loi conjointe.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Calculer leur espérance
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Donner $cov(X, Y)$, en déduire $E(XY)$
5. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z

PRO 130

Soit X une va possédant une variance

Soient X_1 et X_2 deux va qui suivent la même loi que celle de X et telles que $X_1 + X_2$ suit la loi de la va $2X$.

1. Montrer que $cov(X_1, X_2) = V(X)$
2. Montrer que $V(X_1 - X_2) = 0$
3. En déduire que $P(X_1 = X_2) = 1$

PRO 131 (formules autour de la covariance, démo de cours)

1. Développer $cov(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j)$

2. Montrer que

$$V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2.cov(X_1, X_2) + 2.cov(X_1, X_3) + 2.cov(X_2, X_3)$$

3. Justifier que $V(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i, X_j)$

4. Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ sont 2 à 2 indépendantes alors $V(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$

PRO 132

On lance n fois une pièce de monnaie qui a la probabilité p de tomber sur Pile.

On note X le nombre de Piles obtenus et Y le nombre de Faces obtenus.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. En utilisant la relation $X + Y = n$, déterminer $cov(X, Y)$

PRO 133

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Montrer que e^X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(e^X)$.
2. Montrer que $\forall a > 0, \mathbb{P}(X > a) \leq e^{2\lambda} e^{-a}$ (décroissance exponentielle en a).
3. En déduire $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > a) \leq 0,01$.

65

- On commence par introduire les événements:
 - $A = \text{"on choisit la boîte } A\text{"}$
 - $B = \text{"on choisit la boîte } B\text{"}$
- On a $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et vue la composition de chaque urne, on a les probabilités conditionnelles suivantes pour tout $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$:

$$P(X = i|A) = \frac{\binom{4}{i} \binom{7}{3-i}}{\binom{11}{3}} \quad P(X = i|B) = \frac{\binom{6}{i} \binom{5}{3-i}}{\binom{11}{3}}$$

- (A, B) étant un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales pour tout $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

$$P(X = i) = P(A).P(X = i|A) + P(B).P(X = i|B) = \frac{1}{2}.P(X = i|A) + \frac{1}{2}.P(X = i|B)$$

Numériquement, cela donne

$$P(X = 0) = \frac{3}{22} \quad P(X = 1) = \frac{24}{55} \quad P(X = 2) = \frac{39}{110} \quad P(X = 3) = \frac{4}{55}$$

- $E(X) = \sum_{i=0}^3 i.P(X = i) = \frac{15}{11}$

70

- Comme en position initiale, c'est à dire après 0 échange, on a l'urne A qui est composée des deux jetons numérotés 0, on a $X_0 = 0$
- Soit n un entier fixé.
Comme $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, on sait que $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements, on peut donc écrire que pour tout événement A on a $P(A) = \sum_{k=0}^2 P(X_n = k).P(A|X_n = k)$
On va appliquer cette formule avec l'événement $A = (X_{n+1} = j)$ pour $j \in \{0, 1, 2\}$
 - On remarque donc déjà que, matriciellement, avec les notations de l'énoncé, on a

$$M = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 0|X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 2|X_n = 2) \end{pmatrix}$$

En effet, on a par exemple $P(X_{n+1} = 1) =$

$$P(X_n = 0).P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1).P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2).P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$$

- Pour chacune des probabilités conditionnelles on raisonne sur la composition de l'urne.
 - $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = 0$: car si $X_n = 0$, cela signifie que l'urne A contient les deux jetons numérotés 0, et donc que lorsque l'on effectue un échange on est certain que l'urne A contiendra un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1. On est donc certain que $X_{n+1} = 1$. D'où $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 1$

- On tient le même raisonnement avec les autres cas et on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les calculs classiques donnent $sp(M) = \{0, 1, \frac{-1}{2}\}$.

La matrice M , matrice de taille 3, possède 3 valeurs propres distinctes: ainsi M vérifie la condition suffisante de diagonalisabilité: on peut affirmer que M est diagonalisable et que chaque sep est de dimension un.

- Les calculs classiques donnent $E_0 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ $E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $E_{-1/2} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On a donc par exemple $M = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Pour tout $n \geq 0$ cela donne $M^n = P.D^n.P^{-1}$

Le calcul de l'inverse de P donne $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

on trouve alors $M^n = \begin{bmatrix} 1/6 + 1/3 (-1/2)^n & 1/6 - 1/6 (-1/2)^n & 1/6 + 1/3 (-1/2)^n \\ 2/3 - 2/3 (-1/2)^n & 2/3 + 1/3 (-1/2)^n & 2/3 - 2/3 (-1/2)^n \\ 1/6 + 1/3 (-1/2)^n & 1/6 - 1/6 (-1/2)^n & 1/6 + 1/3 (-1/2)^n \end{bmatrix}$

- On a pour tout entier n , : $U_n = M^n.U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On se rend ainsi compte qu'il suffit de calculer en fait uniquement la première colonne de M^n (même si ici, généreusement, je donne les neuf coefficients ci-dessus)

- Cela donne donc $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 2(-1/2)^n \\ 4 - 4(-1/2)^n \\ 1 + 2(-1/2)^n \end{pmatrix}$

86

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \geq 1$ fixé.

Avec les notations habituelles, on a

$$(X = n) = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n-1} \cap B_n$$

La formule des probabilités composées donne

$$P(X = n) = P(N_1).P_{N_1}(N_2).P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \dots P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n-2}}(N_{n-1}).P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n-1}}(B_n)$$

et ainsi

$$P(X = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

2.
 - On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n.P(X = n) = n.p_n = \frac{1}{n+1}$
 - Or $\sum \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente, on a donc prouvé que $\sum n.P(X = n)$ est une série divergente.
 - Ceci prouve que X n'est pas une var d'espérance finie: elle n'admet pas d'espérance

91

1. On a bien sûr $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

2. Soient k et j fixés dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- i) Pour $j > k$, on a $P_{(X=k)}(Y = j) = 0$ car il n'y a pas de boule numérotée j dans la boîte k .
 - ii) pour $j \leq k$, on a $P_{(X=k)}(Y = j) = \frac{1}{k}$ car dans la boîte k il y a k boules dont une seule est numérotée j
3. $((X = k))_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements donc

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P(X = k) \cdot P_{X=k}(X = Y) \quad \text{or} \quad P_{X=k}(X = Y) = P_{X=k}(Y = k) = \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

4. On utilise le même système complet d'événements.
Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$P(Y = j) = \sum_{k=1}^n P(X = k) \cdot P_{X=k}(Y = j) = \sum_{k=j}^n P(X = k) \cdot P_{X=k}(Y = j) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=j}^n \frac{1}{k}$$

et ainsi on a par définition $E(Y) = \sum_{j=1}^n j P(Y = j) = \sum_{j=1}^n j \cdot \sum_{k=j}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \frac{j}{k}$

or $\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \frac{j}{k} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j}{k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{j}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k j \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2}$

$$E(Y) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k+1 = \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{1}{2n} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) = \frac{n+3}{4}$$

97 On note $(a, b, c) = (P(A), P(B), P(C))$

1. $E(X) = a + b + c$
2. $E(X^2) = a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca$
3. $P(X = 0) = (1-a)(1-b)(1-c)$
 $P(X = 1) = a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-a)(1-b)$
 $P(X = 2) = ab(1-c) + ac(1-b) + bc(1-a)$ et $P(X = 3) = abc$

99 On peut modéliser cette expérience aléatoire avec $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^N$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme. On a $\text{card}(\Omega) = n^N$

1. On a $X(\Omega) = \{1, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$.
Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. L'événement $(X \leq k)$ correspond à N tirages qui ont donné des numéros inférieurs ou égaux à k : il s'agit donc de l'ensemble des N -uplet à valeurs prises dans $\llbracket 1, k \rrbracket$, soit

$$(X \leq k) = \llbracket 1, k \rrbracket^N. \text{ Ainsi } P(X \leq k) = \frac{\text{card}(\llbracket 1, k \rrbracket^N)}{\text{card}(\llbracket 1, n \rrbracket^N)} = \frac{k^N}{n^N}$$

rem: on peut remarquer que cette formule est aussi valable lorsque $k = 0$

2. • X étant à valeurs entières on a pour tout entier k , $(X \leq k) = (X \leq k-1) \cup (X = k)$.
Comme l'union est disjointe on a $P(X \leq k) = P(X \leq k-1) + P(X = k)$

Conclusion $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$
- Comme on a précisé que la formule de la première question est aussi valable pour $k = 0$, cela nous permet d'écrire:

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{k^N}{n^N} - \frac{(k-1)^N}{n^N}$

3. • On a par définition $E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot P(X = k)$. Ainsi:

$$n^N \cdot E(X) = \sum_{k=1}^n k^{N+1} - k(k-1)^N = \sum_{k=1}^n k^{N+1} - (k-1+1)(k-1)^N$$

$$\text{Soit } n^N \cdot E(X) = \sum_{k=1}^n k^{N+1} - (k-1)^{N+1} - (k-1)^N = \sum_{k=1}^n k^{N+1} - (k-1)^{N+1} + \sum_{k=1}^n (k-1)^N$$

$$\text{On reconnaît alors un procédé télescopique qui nous donne } n^N \cdot E(X) = n^{N+1} - \sum_{k=1}^n (k-1)^N$$

$$\text{On a ainsi } \boxed{\frac{E(X)}{n} = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^N}$$

- Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{p}{n} \right)^N = \int_0^1 x^N dx = \frac{1}{N+1}$ d'après le théorème sur les sommes de Riemann.

- Conclusion: $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X)}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}}$, et donc $\boxed{E(X) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{N \cdot n}{N+1}}$

4. Lorsque n est fixé cette fois, la somme $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^N$ comprend un nombre constant de termes, et chaque terme tend vers 0, car $0 \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1$

$$\text{On a donc } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^N = 0, \text{ et donc } \boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} E(X) = n}$$

103

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $E(X) = np$ et $V(X) = npq$
2. $Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$
3. (a) $(Z = 0)$ correspond à la recherche de $2n$ exercices sans succès, on a donc $P(Z = 0) = q^{2n} = (1-p)^{2n}$
 (b) $(Z = 1)$ est égal à l'union disjointe des événements $(X = 1) \cap (Y = 0)$ et $(X = 0) \cap (Y = 1)$
 - $P((X = 1) \cap (Y = 0)) = P(X = 1) \cdot P_{X=1}(Y = 0) = \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} \binom{n-1}{0} p^0 q^{n-1} = npq^{2n-2}$
 - $P((X = 0) \cap (Y = 1)) = P(X = 0) \cdot P_{X=0}(Y = 1) = \binom{n}{0} p^0 q^n \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} = npq^{2n-1}$

$$\text{et ainsi } P(Z = 0) = npq^{2n-2} + npq^{2n-1}$$

4. Calcul de $P_{X=k}(Y = h)$
5. • si $h + k > n$ on a $P_{X=k}(Y = h) = 0$
 • si $h \in \{0, 1, \dots, n-k\}$, la probabilité $P_{X=k}(Y = h)$ est la probabilité de résoudre h exercices parmi $n-k$: elle vaut donc $\binom{n-k}{h} p^h q^{n-k-h}$

$$\text{Comme } P(Z = l) = \sum_{k=0}^l P(X = k) \cdot P_{X=k}(Y = l-k) \text{ en remplaçant cela donne } P(Z = l) =$$

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} p^k q^{n-k} p^{l-k} q^{n-k} = p^l \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} q^{2n-k-l}$$

6. $P(Z = l) = p^l \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} q^{2n-k-l} = p^l \sum_{k=0}^l \binom{n}{l} \binom{l}{k} q^{2n-k-l}$ et donc $P(Z = l) = \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} p^k q^{l-k} = \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} (1+q)^l$

7. $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^2)$

112 CORRECTION DE L'EXERCICE 677

On note pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

- A_i = "le A sort lors du i -ième tirage"
- B_i = "le B sort lors du i -ième tirage"

On a $B_i = \overline{A_i}$ et $P(A_i) = p$

L'énoncé précise que les expériences sont indépendantes donc les événements $(A_i)_{i \geq 0}$ sont mutuellement indépendants

1. • $X_1(\Omega) = 1$ et pour tout $k \geq 1$ on a

$$(X = k) = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1})$$

Ainsi $(X = k)$ est l'union de deux événements disjoints d'où

$$P(X = k) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) + P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1})$$

Or par indépendance

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_k) \cdot P(B_{k+1}) = p^k \cdot q$$

et

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1}) = P(B_1) \cdot P(B_2) \dots P(B_k) \cdot P(A_{k+1}) = q^k \cdot p$$

d'où $\forall k \geq 1, P(X_1 = k) = p^k \cdot q + q^k \cdot p$

- $X_2(\Omega) = 1$ et pour tout $k \geq 1$ et $j \geq 1$ on a

$$(X = k) \cap (Y = j) = (A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_{k+j} \cap A_{k+j+1}) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1} \cap \dots \cap A_{k+j} \cap B_{k+j+1})$$

Pour les mêmes raisons que celles invoquées précédemment on a

$$P(X_1 = k \cap X_2 = j) = p^k \cdot q^j \cdot p + q^k \cdot p^j \cdot q = p^{k+1} \cdot q^j + q^{k+1} \cdot p^j$$

- Comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ la famille $(X_1 = k)_{k \geq 1}$ est un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales on a peut donc dire que pour tout $j \geq 1$ fixé

$$\text{on a } P(X_2 = j) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k \cap X_2 = j) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k+1} \cdot q^j + q^{k+1} \cdot p^j$$

$$\text{Ainsi } P(X_2 = j) = q^j \cdot p^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} + p^j \cdot q^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} = \frac{q^j \cdot p^2}{1-p} + \frac{p^j \cdot q^2}{1-q} = q^{j-1} \cdot p^2 + p^{j-1} \cdot q^2$$

2. • On utilisera le fait que $\forall x \in]-1, +1[, \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} p \cdot x^{p-1}$

Cette formule est obtenue à partir de la série entière $\sum_{p=0}^{\infty} x^p$ que l'on sait être de rayon un: elle est donc dérivable sur $] -1, +1[$ et sa dérivée est obtenue en dérivant terme à terme.

- $E(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X_1 = k) = pq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{pq}{(1-p)^2} + \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$
- $E(X_2) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(X_2 = j) = q^2 \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p^{j-1} + p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot q^{j-1} = \frac{q^2}{(1-p)^2} + \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1 + 1 = 2 (!)$

- Pour calculer la variance, on utilise la fait que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{p=1}^{\infty} p^2 x^{p-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

$$- \text{ On a } E(X_1^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P(X_1 = k) = q \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p^{k-1} + p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} = \dots = \frac{1+p}{q^2} + \frac{1+q}{p^2}$$

$$\text{et donc } V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - \frac{2}{pq}$$

$$- \text{ On a } E(X_2^2) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \cdot P(X_2 = j) = p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 q^{j-1} + q^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p^{j-1} = \frac{p^2(1+q)}{(1-q)^3} + \frac{q^2(1+p)}{(1-p)^3} =$$

$$\frac{1+q}{p} + \frac{1+p}{q} \text{ et donc } V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{1+q}{p} + \frac{1+p}{q} - 4$$

3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ssi

$$\forall (k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(X = k \cap Y = j) = P(X = k) \cdot P(Y = j), \text{ c'est à dire:}$$

$$\forall (k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, p^{k+1} \cdot q^j + p^j \cdot q^{k+1} = (p^k q + p q^k)(p^2 q^{j-1} + p^{j-1} q^2)$$

En développant, en simplifiant par $p^{k-1} q^{j-1}$ puis en remplaçant q par $1-p$ cela donne $4p^2 - 4p + 1 = 0$, c'est à dire $(2p - 1)^2 = 0$.

Conclusion X_1 et X_2 sont indépendantes ssi $p = 1/2$

- 113** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0, n]$.

$P(C = k | N = n)$ est égale à la probabilité de rencontrer k coccinelles lorsque l'on rencontre n coléoptères; c'est donc la probabilité d'obtenir k succès (le succès est de rencontrer une coccinelle) lorsque l'on répète n expériences de Bernoulli (l'expérience étant de rencontrer un coléoptère) identiques et indépendantes (du moins le suppose-t-on!), de même probabilité de succès α

2. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

D'après ce qui précède on a

$$P(C = k | N = n) = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Comme $((N = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités

totales

$$\begin{aligned}
P(C = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n).P(C = k|N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} P(N = n).P(C = k|N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda} \alpha^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n (1-\alpha)^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{on écrit } \lambda^n = \lambda^k \lambda^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda} \alpha^k \lambda^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k} (1-\alpha)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\alpha \lambda)^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda (1-\alpha))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\alpha \lambda)^k}{k!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda (1-\alpha))^p}{p!} \quad \text{glissement d'indice } p = n - k \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\alpha \lambda)^k}{k!} \cdot e^{\lambda(1-\alpha)} \\
&= \frac{e^{-\alpha \lambda} (\alpha \lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$

C suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha \lambda$

121

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

1. $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ $Z(\Omega) = \{-6, 0, 6\}$
2. (a)
 - $(Y = 0) = (X = 0)$ donc $P(Y = 0) = 0.3$
 - $(Y = 1) = (X = -1) \cup (X = 1)$
et donc $P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.3$ car les événements sont incompatibles
 - $(Y = 2) = (X = -2) \cup (X = 2)$
et donc $P(Y = 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.4$ pour la même raison

y	0	1	2
$P(Y = y)$	0.3	0.3	0.4

- (b)
 - $(Z = -6) = (X = -2)$ donc $P(Z = -6) = 0.1$
 - $(Z = 6) = (X = 2)$ donc $P(Z = 6) = 0.3$
 - $(Z = 0) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1)$
et donc $P(Z = 0) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6$ car les événements sont incompatibles 2 à 2

z	-6	0	6
$P(Z = z)$	0.1	0.6	0.3

3.
 - $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x) = \sum_{k=-2}^2 k.P(X = k) = 0.5$

- $E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y.P(Y = y) = \sum_{k=0}^2 k.P(Y = k) = 1.1$
- $E(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z.P(Z = z) = -6 * 0.1 + 0 * 0.6 + 6 * 0.3 = 1.2$
- $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2.P(X = x) = \sum_{k=-2}^2 k^2.P(X = k) = 1.9$
et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.9 - 0.5^2 = 1.65$
- $E(Y^2) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2.P(Y = y) = \sum_{k=0}^2 k^2.P(Y = k) = 1.9$
et $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1.9 - 1.1^2 = 0.69$
- $E(Z^2) = (-6)^2 * 0.1 + 0^2 * 0.6 + 6^2 * 0.3 = 14.4$
et $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 14.4 - 1.2^2 = 12.96$