

1 Probabilités

Événements

PRO 1

Expérience: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.

Indiquer si les familles suivantes sont des SCE

1. $\mathcal{F} = (A, B)$ avec $A =$ "le premier lancer a donné pile" , $B =$ "le premier lancer a donné face"
2. $\mathcal{F} = (A, B)$ avec $A =$ "le premier lancer a donné pile" , $B =$ "le second lancer a donné face"
3. $\mathcal{F} = (A, B, C)$ avec $A =$ "le premier lancer a donné pile" , $B =$ "le second lancer a donné face" et $C =$ "le second lancer a donné pile"
4. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in [0,4]}$ avec $A_n =$ "on a obtenu exactement n Piles avec les quatre premiers lancers"
5. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face au n -ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 =$ "aucun lancer n'a donné Face"
6. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face pour la première fois au n -ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$
7. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face pour la première fois au n -ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 =$ "aucun lancer n'a donné Face"

PRO 2

Indiquer si les familles suivantes sont des systèmes complets d'événements.

1. **Expérience: on lance 5 fois de suite un dé à six faces**
 - i) $(A_n)_{1 \leq n \leq 5}$ avec $A_n =$ "le n -ième lancer donne 6"
 - ii) $(A_n)_{1 \leq n \leq 6}$ avec $A_n =$ "le premier lancer donne n "
 - iii) $(A_n)_{2 \leq n \leq 10}$ avec $A_n =$ "la somme des lancers est divisible par n "
2. **Expérience: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.**
 - i) $(A_n)_{n \geq 1}$ avec $A_n =$ "le n -ième lancer donne Face"
 - ii) $(A_n)_{n \geq 1}$ avec $A_n =$ "les n premiers lancers donne Face puis Pile"

PRO 3 (événements)

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements d'un univers Ω . Ecrire à l'aide des opérateurs ou comparaisons ensemblistes usuelles les situations suivantes :

1. $A =$ "l'un au moins des événements A_1, A_2, A_3 est réalisé"
2. $A =$ "l'un et l'un seulement des événements A_1 et A_2 se réalise"
3. $A =$ " A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3 "
4. A chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi
5. A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble
6. A_1 ou A_2 se produisent toujours
7. $A =$ "Tous les événements A_i se produisent"
8. $A =$ "l'un au moins des A_i se réalise"
9. $A =$ "seul un nombre fini d'événements A_i se réalise"

PRO 4

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements d'un univers Ω .

Décrire "en toutes lettres" la signification des événements ci-dessous

$$\bigcup_{i \geq 10} A_i \quad \bigcap_{i \geq 10} A_i \quad \bigcap_{n=1}^{n=10} \bigcup_{i \geq n} A_i \quad \bigcup_{n=1}^{n=10} \bigcup_{i \geq n} A_i \quad \bigcap_{n=1}^{n=10} \bigcup_{i \leq n} A_i \quad \bigcup_{n=1}^{n=10} \bigcup_{i \leq n} A_i$$

PRO 5 (événements)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

On considère $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m)$ et $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m)$

1. Montrer que B et C sont des événements
2. Montrer que $B \subset C$
3. Ecrire avec les quantificateurs l'appartenance de ω pour chacun de ses deux ensembles.
Décrire alors ces deux événements en langage de tous les jours

remarque: B s'appelle la limite inférieure des événements, C la limite supérieure

PRO 6

Soit Ω un univers

1. Vérifier que $\{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu
2. Dans le cas particulier où $\Omega = \{1, 2, 3\}$
Déterminer une tribu qui contient $\{1\}$ et $\{2\}$
3. Soit A un événement.
Vérifier que $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu

PRO 7

Dans une urne, il y a un certain nombre de boules numérotées de 1 à 99.

L'expérience aléatoire consiste à extraire une boule et à noter son numéro.

On note $\Omega = \{1, 2, \dots, 98, 99\} = \llbracket 1, 99 \rrbracket$

Pour tout $i \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ on note

- D_i l'événement le chiffre des dizaines est égal à i
- U_i l'événement le chiffre des unités est égal à i

Compléter...

1. "Le numéro est un multiple de dix" correspond à l'événement
2. L'événement $D_2 \cap U_2$ correspond à l'événement
3. L'événement $D_2 \cup U_2$ correspond à l'événement
4. L'événement $(\overline{D_2 \cap U_2}) \cup (D_2 \cap \overline{U_2})$ correspond à l'événement
5. "Le numéro est inférieur à ou égal à 7"
6. "Le numéro est un multiple de 11" correspond à l'événement
7. "Le numéro est supérieur à 70 et le chiffre des unités est supérieur ou égal à celui des dizaines" correspond à l'événement

PRO 8 (union dénombrable d'événements négligeables)

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements négligeables.

1. Montrer que $\bigcup_{k=0}^{k=n} A_k$ est encore un événement négligeable pour tout $n \geq 0$ fixé.
2. Montrer que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est encore un événement négligeable.

rem: en revanche une réunion non dénombrable d'événements négligeables pourrait être de probabilité non

Dénombrements

PRO 9

20 livres sont posés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces 20 livres, 3 sont de la même auteure Céline, les autres étant d'auteurs différents.

1. Quel est le nombre de répartitions des 20 livres possibles?
2. Quel est le nombre de répartitions de ces 20 livres avec les 3 livres de Céline côte à côte?

PRO 10

Une classe est composée de 30 élèves dont 3 filles.

Les élèves entrent un à un dans une salle de classe pour assister au cours de Mme Vincentelli.

Combien y-a-il d'entrées possibles...

1. en tout?
2. avec les 3 filles qui entrent en premier
3. avec les 3 filles qui entrent en dernier
4. avec les 3 filles qui entrent parmi les 5 premiers

PRO 11

Un facteur distribue 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres. De combien de façons peut-il le faire...

1. si chaque boîte ne peut contenir qu'un prospectus et les prospectus sont numérotés?
2. si chaque boîte ne peut contenir qu'un prospectus et les prospectus sont identiques?
3. si chaque boîte peut contenir tous les prospectus et les prospectus sont numérotés?
4. si chaque boîte peut contenir tous les prospectus et les prospectus sont identiques?

PRO 12

1. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06
2. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06 et composés de 10 chiffres distincts
3. Déterminer le nombre de numéros commençant par 06 et composée des chiffres 0,1,1,1,2,2,3,3,4,6

PRO 13

Dans une pièce, il y a 35 personnes

1. De combien de façons différentes peut-on les compter?
2. De combien de façons différentes si on commence toujours par la même personne?
3. De combien de façons différentes si on compte d'abord les 6 filles puis les 29 garçons?

PRO 14

On dispose de 10 jetons de scrabble portant les lettres de "A" à "J"

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres où "B", "A", "C" apparaissent dans cet ordre et côte à côte?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres où "B", "A", "C" apparaissent dans cet ordre?
4. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres où "B" précède "A", et "D" précède "C"?

PRO 15

On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes

1. Combien y a-t-il de comités possibles?
2. Combien de comités, si le comité contient 4 hommes et 4 femmes?
3. Combien de comités, si le comité contient au moins 2 femmes?

PRO 16

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel (7,8,9,10,V,D,R,As) en 4 couleurs (Carreau, Coeur, Trèfle, Pique) Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes

1. aucune condition
2. Il y a exactement 2 rois parmi les 5 cartes tirées
3. Il y a au moins un Pique parmi les cartes tirées
4. Il y a un As et deux Carreaux parmi les cartes tirées
5. Il n'y a pas de cartes en dessous du 9 parmi les cartes tirées
6. Il y a deux paires (mais pas de brelan ni de carré)
7. Les cinq cartes tirées sont de la même couleur
8. Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (5 cartes qui se suivent dans la même couleur)

PRO 17

Justifier la propriété: pour n et p entiers tels que $n \geq p$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

PRO 18

Soit n un entier.

1. Donner une expression simple de $A = \sum_{k=0}^n (-1)^k$, $B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $C = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
 2. Montrer que $D = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ de deux manières différentes
 - En simplifiant $k \binom{n}{k}$
 - En considérons la dérivée de $f(x) = (1+x)^n$
 3. Montrer que $E = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$ de deux manières différentes
 - En simplifiant $k(k-1) \binom{n}{k}$
 - En considérons la dérivée seconde de $f(x) = (1+x)^n$
- et en déduire $F = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

PRO 19

Une équipe est composée de $p \geq 3$ joueurs que l'on sélectionne parmi $n \geq p$ candidats.

1. Combien y-a-t-il d'équipes avec 2 capitaines?
2. Combien y-a-t-il d'équipes avec un capitaine et un vice-capitaine?

Probabilité

PRO 20 (démonstration de cours: sous-additivité (probabilité d'une union a priori non disjointe))

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. cas fini: pour tout entier n , on a $P(\bigcup_{k=0}^n A_k) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k)$
2. cas infini: Si la série $\sum_{k \geq 0} P(A_k)$ converge alors on a $P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$

PRO 21

Soient A et B deux événements, montrer que $P(A \cup B) + P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup B) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3$

PRO 22

Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
Montrer que l'on a toujours $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{n\}) = 0$

PRO 23

4 urnes contiennent des boules:

- l'urne 1 contient 3 rouges, 2 blanches et 3 noires
- l'urne 2 contient 4 rouges, 3 blanches et 1 noire
- l'urne 3 contient 2 rouge, 1 blanche, 1 noire
- l'urne 4 contient 1 rouge, 6 blanches, 2 noires

On choisit, de manière équiprobable, une urne et de celle-ci on extrait une boule toujours au hasard

1. Calculer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche
2. Si la boule est blanche, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne 3?

PRO 24

Dans un lot de 100 dés à 6 faces, 20 dés sont truqués de la façon suivant: la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé soit non truqué?

PRO 25

Les fonctions suivantes définies sur les singletons définissent-elles des probabilité sur Ω ?

1. $\Omega = \{0, \dots, N\}$ et $P(\{n\}) = \binom{N}{n} (-1)^n 2^{N-n}$ ($N \geq 2$ fixé)
2. $\Omega = \{1, \dots, 2N\}$ et $P(\{n\}) = \frac{1}{N} \cdot |1 - \frac{n}{N}|$ ($N \geq 2$ fixé)
3. $\Omega = \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = \frac{2}{3^{n+1}}$
4. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$

PRO 26

On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pour tout entier i non nul on pose $P(\{i\}) = \frac{1}{i^2 + i}$.

Vérifier que P est bien une probabilité sur Ω

PRO 27

On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

Soit $c \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose pour tout entier i non nul, $P(\{i\}) = \lambda \cdot \frac{c^i}{i}$.

Déterminer une CNS sur λ pour que P soit une probabilité sur Ω

PRO 28

On dispose d'une urne contenant une boule blanche.

On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce parfaite.

A chaque fois qu'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne, la première fois qu'on obtient pile, on tire une boule de l'urne (Si on n'obtient jamais pile, on ne tire aucune boule de l'urne). Montrer que la probabilité d'obtenir une boule blanche vaut $\ln 2$.

PRO 29

On se place dans un univers fini Ω muni d'une probabilité P .

1. Soit 2 évènements A et B indépendants tels que $A \subset B$. Montrer que $P(A) = 0$, ou $P(B) = 1$
2. Montrer que si A est indépendant de lui-même alors $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$
3. Montrer que si $P(A) = 0$ alors A est indépendant de tout évènement. Etudier la réciproque.
4. Même question avec $P(A) = 1$

PRO 30

On lance un dé à cinq faces. On note p_n la probabilité que la somme des résultats des n premiers lancers soit paire. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire p_n en fonction de n .
(On pourra noter A_n l'évènement "la somme des n premiers lancers est paire")

PRO 31 (il n'existe pas de probabilité uniforme sur un univers dénombrable)

Soit Ω un univers dénombrable: $\Omega = \{\omega_i / i \in \mathbb{N}\}$.

On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}, P(\{\omega_i\}) = q$.

Expliquer pourquoi $q = 0$ et aboutir à une contradiction.

PRO 32

On considère $n \geq 2$ personnes un peu sourdes qui se transmettent une information binaire I (du type "oui" ou "non"). La première personne reçoit l'information, la transmet à la deuxième personner, qui la transmet à la troisième et ainsi de suite jusqu'à la n -ième personne. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité $p \in]0, 1[$, et le contraire avec la probabilité $q = 1 - p$

1. Calculer la probabilité p_n que la n -ième personne reçoive la bonne information
2. Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

PRO 33 (compliqué)

On lance successivement une pièce qui donne pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note B_n l'évènement "on obtient deux piles d'affilée pour la première fois au rang n , P_i l'évènement "on obtient pile au rang i et F_i l'évènement "on obtient face au rang i

1. Montrer que $P(B_n) = q \cdot P(B_n | F_1) + pq \cdot P(B_n | P_1 \cap F_2) + p^2 \cdot P(B_n | P_1 \cap P_2)$
2. On pose $u_n = P(B_n)$. Déterminer u_1 et u_2 . Déterminer une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par (u_n)
3. (a) En calculant $Q(\pm 1)$ et $Q(0)$ montrer que les racines de $Q = X^2 - qX - pq$ sont dans $] -1, 1[$
(b) Montrer qu'il existe 4 réels (A, B, r_1, r_2) tels que $\forall n \geq 1, u_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$.
Que peut-on dire à propos de r_1 et r_2 ?

4. En déduire que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1$

PRO 34

Une urne contient $2n$ boules: n noires et n blanches. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. On note B_i l'évènement "la i -ième boule tirée est blanche"

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches?
2. On suppose que n est pair (on note $n = 2k$). Quelle est la probabilité de tirer en alternance une boule blanche, puis une une noire, en commençant par une blanche?
3. Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une boule blanche?

PRO 35

Soit l'univers $\Omega = \{1, \dots, 2N\}$. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\forall n \in \Omega, P(\{n\}) = an + b$
définisse une loi de probabilité et que $P(\{1, \dots, N\}) = \frac{1}{4}$?

PRO 36

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_{n+1}) = \frac{2}{n+1}P(A_n)$ pour tout $n \geq 0$

1. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n et de $P(A_0)$
2. Donner la valeur de $P(A_0)$ (on doit trouver e^{-2})

PRO 37 (système quasi complet d'événements)

On considère une suite d'événements $(A_n)_{n \geq 1}$ que vérifie les propriétés suivantes:

- i) les évènements sont 2 à 2 disjoints: $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) $P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = 1$

(remarque: un tel système est appelé un système quasi complet d'événements)

1. A-t-on $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$?
2. On note $A_0 = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n}$. Montrer que $P(A_0) = 0$
3. Justifier que $(A_n)_{n \geq 0}$ est un système complet d'événements
4. Prouver que pour tout événement B on a $P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)$

PRO 38

On considère un triangle de sommets A, B et C .

Un kangourou effectue des sauts qui l'amènent toujours d'un sommet à un autre. Lorsqu'il est en un sommet, il a la même probabilité de sauter indifféremment sur l'un des deux autres sommets libres. Au départ, il est en A .

Déterminer la probabilité que le kangourou soit de nouveau en A après n sauts.

1. en introduisant les événements $A_n[B_n, C_n]$ "le kangourou est en $A[B, C]$ après n sauts." et en déterminant une relation de récurrence entre $P(A_{n+1})$ et $P(A_n)$
2. en considérant la variable aléatoire X_n qui vaut 1 si le kangourou est au sommet A après n sauts, qui vaut 2 s'il est au sommet B après n sauts et 3 s'il se trouve au sommet C .

PRO 39

On considère l'univers $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et les 3 événements: $E = \{a, d\}$, $F = \{a, b, c\}$, $G = \{b, d\}$.

On demande de trouver si elle existe, une probabilité sur Ω telle que

1. $P(E) = 0.5$, $P(F) = 0.9$, $P(G) = 0.4$
2. $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.8$, $P(G) = 0.7$
3. $P(E) = P(F) = P(G)$

PRO 40

Un individu est choisi au hasard dans une population contenant une proportion $p \in]0, 1[$ de tricheurs.

On fait tirer une carte dans un jeu de 52 cartes à cet individu. On admet que si cette personne est un tricheur alors elle tire à coup sûr un as. Si ce n'est pas un tricheur, la carte est sélectionnée parmi les 52 cartes de manière équiprobable.

1. Quelle est la probabilité qu'un individu tire un as?
2. Effectivement, cette personne tire un as, quelle est la probabilité que cette personne soit un tricheur?
3. On fait tirer n fois avec remise une carte dans le jeu de 52 cartes à une même personne. La personne tire à chaque fois un as. Quelle est la probabilité que cette personne soit un tricheur?

PRO 41

1. Soient $A_1, \dots, A_N$ N événements mutuellement indépendants.

Montrer que $P(A_1 \cup \dots \cup A_N) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_N))$

2. Aux fléchettes, à chaque coup, un joueur atteint sa cible avec une probabilité de 0.04.

On suppose les lancers indépendants.

Combien doit-il faire d'essais pour atteindre la cible avec une probabilité supérieure à 0.95? (on trouvera 74)

PRO 42

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite (dénombrable) d'événements mutuellement indépendants.

On va montrer que $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(A_k)$

On note pour tout entier n , $B_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$

- Que sait-on de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$
- Exprimer $P(B_n)$ en fonction des probabilités des événements de la famille $(A_n)_{n \geq 0}$
- Conclure

PRO 43 (crible de Poincaré (né à Nancy le 29 avril 1854))

Soient A, B, C et D quatre ensembles.

Dans cet exercice le cardinal est noté $|\cdot|$.

On rappelle que si A et B sont deux ensembles alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ &\quad - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

2. Application:

On lance n fois de suite un dé à 4 faces (notées 1, 2, 3 et 4)

(a) Quel est le nombre de tirages possibles?

(b) On note

- A l'ensemble des tirages où le 1 n'apparaît pas
- B l'ensemble des tirages où le 2 n'apparaît pas
- ...

Déterminer $|A|$, puis $|A \cap B|$ puis $|A \cap B \cap C|$ et enfin $|A \cap B \cap C \cap D|$

Puis montrer que $|A \cup B \cup C \cup D| = 4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4$

- (c) Déterminer la probabilité, noté p_n , qu'au cours de n tirages les 4 faces apparaissent au moins chacune une fois.
- (d) Déterminer $\lim p_n$, puis, à l'aide de la calculatrice, ou d'un programme Python, déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0.9$

PRO 44

On dispose d'une urne A contenant deux boules rouges et une boule noire, et d'une urne B contenant deux boules noires et une boule rouge. On effectue un premier tirage dans l'urne A en y extrayant une boule: on note sa couleur et on la remet dans A . Si cette boule est rouge, on effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne A . Si elle est noire, les deux tirages successifs avec remise ont lieu dans l'urne B .

On appelle ces deux tirages 2 et 3.

- Déterminer les probabilités des événements suivants:
 - Le tirage 2 a amené une boule noire
 - Le tirage 3 a amené une boule noire
 - Les tirages 2 et 3 ont amené à chaque fois une boule noire
- On suppose que le second tirage a amené une boule noire. Quelle est la probabilité pour que le troisième tirage amène une boule noire?
- Quelle est la probabilité pour que le premier tirage ait amené noir si les deux derniers ont amené noir?

PRO 45

On dispose de 2 pièces: la pièce A donne face avec la probabilité $1/2$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$

On choisit une pièce au hasard. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

- On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n -ième lancer.
Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- En déduire la probabilité d'obtenir face au n -ième lancer

PRO 46

On effectue n tirages dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges. Soit A l'événement "on tire au moins deux rouges" et B l'événement "on tire des boules des deux couleurs"

Montrer que A et B sont indépendants ssi $n = 3$

PRO 47

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n .

On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons (éventuellement, notre poignée peut contenir... zéro jeton!)

On note A , [resp. B] l'événement "le numéro 1 [resp. 2] figure dans notre pioche"

On demande de calculer $P(A)$ et de dire si A et B sont indépendants dans chacune des hypothèses suivantes

- On suppose qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (càd que la probabilité de tirer un jeton est égale à la probabilité de tirer 2 jetons qui est égale à la probabilité de tirer 3 jetons... qui est égale à la probabilité de tirer n jetons.)
On devra trouver $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$
- On suppose qu'il y a équiprobabilité sur toutes les pioches possibles. *On devra trouver* $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

PRO 48

Considérons une file d'attente de $2n$ personnes (avec $n \geq 2$ fixé).

Il y a un nombre de femmes que l'on suppose équiprobablement réparti entre n et $2n$ (c'est à dire que pour tout $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$ la probabilité d'avoir k femmes dans la file d'attente est une constante indépendante de k) On choisit une personne au hasard.

On note $F_k =$ " il y a k femmes dans la file" et $F =$ "la personne choisie est une femme"

- Déterminer $P(F_k)$ pour tout $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$
- Quelle est la probabilité $P(F)$?
- On sait que la personne choisie est une femme, quelle est la probabilité que la file ne soit constituée que de femmes?

PRO 49

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p , et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité q . On suppose que p et q sont deux réels de $]0, 1[$. On note r_n [resp. v_n] la probabilité que ce feu soit rouge [vert] à l'instant $t = n$. On suppose que $r_0 + v_0 = 1$

- Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$
- En déduire r_n et v_n en fonction de n puis calculer leurs limites.

PRO 50

A chaque instant, un système ayant 3 états (A,B,C) peut changer d'état, selon la règle

- de A, il passe en B avec la probabilité $1/3$ ou en C avec la probabilité $2/3$
- de B, il passe en A avec la probabilité $1/3$, en C avec la probabilité $1/3$ ou reste en B avec la probabilité $1/3$
- de C, il passe en B avec la probabilité $1/3$ ou en A avec la probabilité $2/3$

Pour tout entier naturel n , on note A_n [resp. C_n] l'événement " le système est dans l'état A [B, C] à l'instant n "

On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$

- En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$
- Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n
- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les réels a_n , b_n et c_n en fonction de a_0 , b_0 , c_0 et n
- On suppose que $b_0 = \frac{1}{3}$. Montrer que pour tout n les événements B_n et B_{n+1} sont indépendants
- On note T_n l'événement "le système passe à l'état B pour la première fois à l'instant n "
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(T_n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$
 - Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} P(T_n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} nP(T_n)$

PRO 51

On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geq 2$). Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_k désigne l'événement "on obtient pile au k -ième lancer. Soit A_{n+1} l'événement " le nombre de pile obtenus au bout des n lancers est pair"

- Déterminer la probabilité de chaque événement A_k avec $1 \leq k \leq n+1$
- Déterminer $P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right)$
 - En déduire que les événements $A_1, \dots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants
- Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ est formée d'événements mutuellement indépendants

PRO 52

Une urne contient a boules blanches et b boules rouges, pour un total de $N = a + b$ boules. On la vide en tirant une à une et sans remise les boules. On note A_k l'évènement "la deuxième boule blanche est sortie au k -ième tirage"

1. Donner i et j deux entiers tels que la famille $(A_k)_{i \leq k \leq j}$ soit un système complet d'évènements
2. Calculer $P(A_2)$, $P(A_3)$ puis $P(A_k)$ pour $k \in \llbracket 2, b+2 \rrbracket$
3. En déduire $\sum_{k=2}^{b+2} (k-1) \binom{a+b-k}{a-2} = \binom{a+b}{a}$

PRO 53

Une urne contient a boules blanches et b boules noires, pour un total de $N = a + b$ boules. On effectue une série de tirages de la manière suivante : on choisit une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet. Si elle est noire, on la remplace par une boule blanche. Puis on procède au tirage suivant.

1. On note N_j l'évènement : "on tire une boule noire au j -ième tirage" et A_n l'évènement "on obtient pour la première fois une boule blanche au n -ième tirage"
Exprimer A_n en fonction des N_j , en déduire $P(A_n)$
2. On note B_l l'évènement "il reste l boules noires dans l'urne lorsqu'on obtient la première boule blanche"

(a) Montrer que pour $1 \leq l \leq b$, $P(B_l) = \frac{b!}{N^b} \left(\frac{N^l}{l!} - \frac{N^{l-1}}{(l-1)!} \right)$

(b) Calculer $P(B_0)$

(c) Vérifier que $\sum_{k=0}^b P(B_k) = 1$

PRO 54

Soit α et λ deux réels strictement positifs.

Jacqueline part à la chasse aux coléoptères.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "Jacqueline rencontre n coléoptères".

On suppose que $\forall n \geq 0, P(A_n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note B_k l'évènement "Jacqueline rencontre k coccinelles".

On suppose que $P(B_k | A_n) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = 1$.
2. Justifier que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements
3. Déterminer $P(B_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$

PRO 55

Eric décide de jouer à Pile ou Face suivant la règle suivante: s'il arrive un moment où il obtient 2 Pile de plus que de Face alors il se déclare vainqueur; en revanche s'il arrive un moment où il obtient 2 Face de plus que de Pile, il se déclare perdant.

1. Quelle est la probabilité que la partie dure au moins $2n$ lancers?
2. Quelle est la probabilité que Claude s'autocongratule?

PRO 56

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Les archers tirent successivement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. A_1 tire en premier. On note $p_i \in]0,1[$ la probabilité que l'archer A_i touche la cible. On note G_i l'évènement "l'archer A_i gagne". Les tirs sont supposés indépendants

1. Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2n+2$, pour $n \in \mathbb{N}$
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$ ainsi que la probabilité que le jeu ne finisse jamais
4. Montrer que $P(G_1) = P(G_2)$ ssi $p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$

PRO 57

Deux joueurs A et B jouent. A lance deux fois une pièce équilibrée.

B ne lance qu'une fois une pièce qui fait « pile » avec la probabilité p . Le gagnant est celui qui fait le plus de « faces ». Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu?
3. Existe-t-il un p tel que le jeu soit équitable?

PRO 58

On dispose de 2 pièces de monnaie : la pièce A amène Pile avec la probabilité $a \in]0,1[$ et la pièce B amène pile avec la probabilité $b \in]0,1[$. On commence par choisir au hasard, de manière équiprobable, une des deux pièces. Puis on effectue le premier lancer avec cette pièce. Si l'on obtient Pile, on conserve la même pièce, sinon on la change. Et on effectue suivant le même principe des lancers...On obtient ainsi une suite infinie de lancers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements

- V_n : "on utilise la pièce A pour la première fois au n -ième lancer
- U_n : "on a obtenu n Piles lors des n premiers lancers"

1. Calculer $P(V_n)$ et $P(U_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. Calculer $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)$.
3. Pour $N \geq 1$ fixé, calculer $P(\bigcup_{n=1}^N U_n)$
4. Calculer $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n)$.

PRO 59

A et B jouent avec deux dés non truqués. A gagne si la somme des dés est 6 et B gagne si la somme des deux dés est 7. La partie se termine si un des deux joueurs gagne.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne au n -ième coup?
2. Quelle est la probabilité p_n pour que A gagne en n coups maximum?
3. Quelle est la probabilité q_n pour que B gagne en n coups maximum?
4. Montrer que la probabilité que la partie ne se termine pas est nulle.

(on introduira tous les événements utiles à la résolution)

PRO 60

Des boules numérotées $1, 2, \dots$ sont placées au hasard dans trois boîtes, successivement et indépendamment les unes des autres.

1. On note D_i : « deux boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on range la i -ième boule ». Calculer $P(D_i)$ puis $\sum_{i=2}^{+\infty} P(D_i)$.
2. On note T_j : « trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on range la j -ième boule ». Calculer $P(T_j)$ puis $\sum_{j=3}^{+\infty} P(T_j)$.

PRO 61

On dispose de 7 urnes $U_0, \dots, U_6$.

L'urne U_k contient k boules blanches et $6 - k$ boules noires.

On choisit une urne au hasard puis on effectue 3 tirages avec remise dans l'urne choisie.

On note B_i l'événement « la i -ième boule tirée est blanche ».

Déterminer :

1. la probabilité p_1 que le premier tirage ait amené une boule blanche ;
2. la probabilité p_2 que les deux premiers tirages aient amené des boules blanches ;
3. si les événements B_1 et B_2 sont indépendants ou non ;
4. la probabilité que la 3^{ème} boule soit blanche sachant que les deux 1^{ères} le sont ;
5. la probabilité que l'urne choisie soit U_6 sachant que les 3 boules sont blanches.

PRO 62

Agathe, Chloé et Bernadette jouent un tournoi, avec un match par jour.

Elles sont de même niveau, donc les chances de gagner sont équiprobables. Si une personne gagne deux jours d'affilée, elle gagne le tournoi. Celle qui gagne le jour n joue le jour suivant contre celle qui n'a pas joué le jour n .

Agathe et Chloé commencent le jour 1.

On considère les événements :

S_n : « le dernier match a lieu le jour n » et J_n : « un match a lieu le jour n ».

1. Pour $n < 2$, donner $P(S_n)$ et $P(J_n)$. Pour $n \geq 3$, donner une relation entre $P(S_n)$ et $P(J_{n-1})$, puis entre $P(J_n)$ et $P(J_{n-1})$.
2. Calculer la probabilité que le tournoi s'arrête un jour.
3. Calculer la probabilité de gagner pour chaque joueuse.

PRO 63

On lance $n \geq 3$ balles vers 3 paniers, chacun pouvant contenir toutes les balles.

Quelle est la probabilité qu'aucun panier ne soit vide ?

QUELQUES CORRIGÉS**29**

1. Soient A et B tels que $A \subset B$.

On a donc $A \cap B = A$.

Comme on suppose que A et B sont indépendants, ceci signifie que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

On a donc l'égalité: $P(A) = P(A).P(B)$, ce qui équivaut à $P(A).(1 - P(B)) = 0$, soit à dire que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$

2. Si A est indépendant de lui-même, on a $P(A \cap A) = P(A).P(A)$, c'est à dire $P(A) = P(A).P(A)$, on trouve encore que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$
3.
 - On suppose que $P(A) = 0$
Soit B un événement quelconque.
Comme $A \cap B \subset A$, on a donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$, donc $P(A \cap B) = 0$.
Comme on a aussi $P(A).P(B) = 0.P(B) = 0$, on en déduit que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.
 A et B sont bien deux événements indépendants.
 - On suppose que $P(A) = 1$
On a donc $P(\bar{A}) = 0$. D'après ce que l'on vient de prouver ci-dessus, on peut affirmer que $P(\bar{A})$ est indépendant de tout événement B .
Or on sait (démonstration faite en TD, théorème 7 du cours) que si B et C sont indépendants alors B et $\bar{C}$ sont indépendants. C'est ce qu'il suffit ici d'appliquer avec $C = \bar{A}$.
On a montré que tout événement B était indépendant de $\bar{A} = A$
 - Réciproquement. Supposons que A est un événement indépendant de tout événement.
Il est donc en particulier indépendant de lui-même!...et donc d'après le point 2, on peut affirmer que $P(A)$ vaut 0 ou 1.

33

1. Il s'agit d'utiliser la formule des probabilités totales avec un SCE judicieux

(a) Montrons que $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un SCE

- Il est clair que les événements sont incompatibles 2 à 2 car

$$F_1 \cap (P_1 \cap F_2) = (F_1 \cap P_1) \cap F_2 = \emptyset \cap F_2 = \emptyset$$

$$F_1 \cap (P_1 \cap P_2) = (F_1 \cap P_1) \cap P_2 = \emptyset \cap P_2 = \emptyset$$

$$(P_1 \cap F_2) \cap (P_1 \cap P_2) = P_1 \cap (F_2 \cap P_2) = P_1 \cap \emptyset = \emptyset$$

(b) Montrons que $F_1 \cup (P_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2) = \Omega$

- On a $(P_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2) = P_1 \cap (F_2 \cup P_2) = P_1 \cap \Omega = P_1$
- et donc $F_1 \cup (P_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2) = F_1 \cup P_1 = \Omega$

(c) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(B_n) = P(F_1).P(B_n|F_1) + P(P_1 \cap F_2).P(B_n|P_1 \cap F_2) + P(P_1 \cap P_2).P(B_n|P_1 \cap P_2)$$

avec

- $P(F_1) = q$
- $P(P_1 \cap F_2) = P(P_1).P(F_2) = p.q$ car les événements sont indépendants
- $P(P_1 \cap P_2) = P(P_1).P(P_2) = p^2$ pour la même raison

(d) remarque: il était également possible de montrer seulement que c'était un Système Quasi Complet d'Evenements en faisant la vérification en a) puis en écrivant que

- $P(P_1 \cap F_2) = P(P_1).P(F_2) = p.q$ car les événements sont indépendants
- $P(P_1 \cap P_2) = P(P_1).P(P_2) = p^2$ car les événements sont indépendants

- et donc

$$P(F_1) + P(P_1 \cap F_2) + P(P_1 \cap P_2) = q + pq + p^2 = q + p(p + q) = q + p = 1$$

2. • $B_1 = \emptyset$ donc $u_1 = P(B_1) = 0$
 • $B_2 = P_1 \cap P_2$, et comme les événements sont indépendants, on a $u_2 = P(P_1).P(P_2) = p^2$
 • Soit $n \geq 3$.
 $P(B_n|P_1 \cap P_2) = 0$ car si $P_1 \cap P_2$ est réalisé, on a obtenu deux pile consécutifs pour la première fois au 2-ième lancer et non pas au n -ième lancer.
 $P(B_n|F_1)$ est la probabilité d'obtenir 2 pile consécutifs pour la première fois au n -ième rang sachant que le premier lancer à donner face, cette probabilité est donc égale à la probabilité d'obtenir 2 pile consécutifs pour la première fois au rang $n - 1$, c'est à dire $P(B_{n-1})$. Ainsi $P(B_n|F_1) = P(B_{n-1})$.
 Par le même raisonnement, on a $P(B_n|P_1 \cap F_1) = P(B_{n-2})$
 • D'après Q1, on a donc $\forall n \geq 3, P(B_n) = q.P(B_{n-1}) + pq.P(B_{n-2})$,
 càd $\forall n \geq 3, u_n - q.u_{n-1} - pq.u_{n-2}$
3. (a) • $Q(1) = 1 - q - pq = p - pq = (1 - q).p = p^2 > 0$
 $Q(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2 > 1$ et $Q(0) = -pq < 0$.

- Comme $Q' = 2X - q$, on en déduit que $\begin{cases} Q \text{ est strictement croissante sur } [q/2, 1] \\ Q \text{ est strictement décroissante sur } [-1, q/2] \end{cases}$

x	-1	0	$\frac{q}{2}$	1
$Q'(x)$		-	0	+
$Q(x)$	$Q(-1) > 0$	$Q(0) < 0 \rightarrow Q(\frac{q}{2}) < 0 \rightarrow Q(1) > 0$		

- Comme la fonction Q est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1, q/2]$, elle réalise une bijection de $[-1, q/2]$ sur $[Q(q/2), Q(-1)]$.
 Comme $Q(0) > Q(q/2)$, on a $Q(q/2) < 0$ et l'on sait par ailleurs $Q(-1) > 0$: on en déduit que Q possède une unique racine $r_1 \in]-1, 0[$
 - Comme la fonction Q est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[q/2, 1]$, elle réalise une bijection de $[q/2, 1]$ sur $[Q(q/2), Q(1)]$.
 Comme $Q(q/2) < 0$ et $Q(1) > 0$: on en déduit que Q possède une unique racine $r_2 \in]q/2, 1[\subset]0, 1[$
 - La fonction Q étant polynomiale de degré 2, on a prouvé que toutes les racines de Q sont dans $] -1, +1[$
- (b) • La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $X^2 - qX - pq = 0$.

En notant r_1 et r_2 les racines de cette équation, on sait qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geq 1, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$.

- On peut dire que $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$
4. La suite d'événements $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux, on a donc

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A.r_1^n + B.r_2^n \\ &= A.r_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{n-1} + B.r_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r_2^{n-1} \\ &= A.r_1 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} r_1^p + B.r_2 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} r_2^p \\ &= \frac{A.r_1}{1 - r_1} + \frac{B.r_2}{1 - r_2} \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\begin{cases} u_1 = 0 &= A.r_1 + B.r_2 \\ u_2 = p^2 &= A.r_1^2 + B.r_2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= -\frac{p^2}{r_1(r_2 - r_1)} \\ B &= \frac{p^2}{r_2(r_2 - r_1)} \end{cases}$$

Ainsi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = -\frac{p^2}{r_1(r_2 - r_1)} \cdot \frac{r_1}{1 - r_1} + \frac{p^2}{r_2(r_2 - r_1)} \cdot \frac{r_2}{1 - r_2} = \frac{p^2}{(1 - r_1)(1 - r_2)}$$

Or

$$(1 - r_1)(1 - r_2) = Q(1) = p^2$$

d'où

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1$$

"il est quasi certain d'obtenir à un certain rang deux pile d'affilés!"

35

- Il s'agit de vérifier s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

i) $\sum_{k=1}^{2n} P(\{k\}) = 1$

ii) $\sum_{k=1}^{nn} P(\{k\}) = 1/4$

iii) $\forall k \in \{1, \dots, 2n\}, P(\{k\}) \geq 0$

- La première condition est donne $2an^2 + an + 2bn = 1$ et la deuxième donne $an^2 + an + 2bn = 1/2$.

La résolution de ce système donne comme unique solution $a = \frac{1}{2n^2}$ et $b = \frac{-1}{4n^2}$

- Pour ces valeurs, on a $\forall k \in \{1, \dots, 2n\}, P(\{k\}) = \frac{2k - 1}{4n^2} \geq 0$

- Conclusion: il existe une et une seule solution $(a, b) = (\frac{1}{2n^2}, \frac{-1}{4n^2})$

39

Notons les probabilités élémentaires $p_1 = P(\{a\}), p_2 = P(\{b\}), p_3 = P(\{c\})$ et $p_4 = P(\{d\})$

On a $P(E) = p_1 + p_4, P(F) = p_1 + p_2 + p_3$ et $P(G) = p_2 + p_4$.

Comme la somme des probabilités élémentaires vaut toujours un on a également $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

Ces 4 équations équivalent au système

$$\begin{cases} p_1 = P(E) + P(F) - 1 \\ p_2 = P(G) + P(F) - 1 \\ p_3 = 2 - P(E) - P(G) - P(F) \\ p_4 = 1 - P(F) \end{cases}$$

Dans chacun des trois cas demandé il s'agit de vérifier si les 4 probabilités élémentaires sont positives ou nulles.

1. On trouve $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$: il existe donc une et une seule probabilité qui vérifie les conditions demandées.
2. On trouve $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.4, 0.5, -0.1, 0.2)$. Comme $p_2 < 0$, on peut conclure qu'il n'existe pas de probabilité qui vérifie les conditions demandées
3. Notons $x = P(E) = P(F) = P(G)$.
On a $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1 - x, 2x - 1, 2x - 1, 2 - 3x)$. Il s'agit donc d'une probabilité ssi ces 4 quantités sont positives ou nulles càd ssi $x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

47 Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, T_k désigne l'événement "on tire k jetons dans l'urne"

1. corrigé en classe

2. • On a cette fois $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(T_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$
• Pour $k \geq 1$ on a $P_{T_k}(A) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$ et bien sûr $P_{T_0}(A) = 0$

- Comme $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales

$$P(A) = \sum_{k=0}^n P(T_k) \cdot P_{T_k}(A) = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

et par simple glissement d'indice $k \leftarrow k-1$ on obtient

$$P(A) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

- On a évidemment $P(B) = P(A) = \frac{1}{2}$
- Pour $k \geq 2$ on a $P_{T_k}(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$ et bien sûr $P_{T_0}(A \cap B) = P_{T_1}(A \cap B) = 0$

- La formule des probabilités totales suivie d'un glissement d'indice donne cette fois

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \sum_{k=0}^n P(T_k) \cdot P_{T_k}(A \cap B) = \sum_{k=2}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \\ &= \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Cette fois, on a $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$! Les événements sont donc indépendants!

50

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un SCE
- on nous donne

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = 1/3 \text{ et } P_{A_n}(C_{n+1}) = 2/3 \text{ (et donc } P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$$

1. Soit $n \geq 0$.

La formule des probabilités totales donne

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \cdot P_{C_n}(A_{n+1})$$

ce qui donne bien

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$$

2. L'écriture matricielle donne en notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \geq 0, X_{n+1} = A \cdot X_n$$

On en déduit par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \cdot X_0$

On va donc calculer A^n , par exemple en réduisant la matrice (la matrice étant symétrique à coefficients réels on sait, d'après le théorème spectral, que A est diagonalisable.)

- On trouve $\chi_A(X) = X(X + 2/3)(X - 1)$
- Une recherche de sep donne

$$E_0 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad E_{-2/3} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

– On peut donc poser $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

– La méthode du miroir donne $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

– Le produit matriciel $A^n = P.D^n.P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+3.(-2/3)^n & 2 & 2-3(2/3)^n \\ 2 & 2 & 2 \\ 2-3(-2/3)^n & 2 & 2+3(-2/3)^n \end{pmatrix}$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(-2/3)^n\right) a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(-2/3)^n\right) c_0 \\ b_n &= \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} \\ c_n &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(-2/3)^n\right) a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(-2/3)^n\right) c_0 \end{cases}$$

- On peut aussi utiliser le théorème spectral "à fond" en choisissant pour P une matrice orthogonale (et l'on aura $P^{-1} = P^T$, ce qui évite la méthode du miroir).

Pour avoir une matrice P orthogonale, il suffit de normer chaque vecteur, ce qui donne

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ avec toujours } D = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Comma (A_0, B_0, C_0) est un système complet d'événements, on a $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{3}$.

Si l'on suppose que $b_0 = \frac{1}{3}$, cela permet d'écrire que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{3}$.

Soit $n \geq 0$.

On a $P(B_n \cap B_{n+1}) = P_{B_n}.P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(B_n).P(B_{n+1})$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n et B_{n+1} sont indépendants

4. (on suppose encore dans cette question que $P(B_0) = \frac{1}{3}$. (L'énoncé n'était pas correct)

(a) • On a $T_0 = B_0$, et donc $P(T_0) = P(B_0) = \frac{1}{3}$ qui s'écrit encore $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

- Soit $n \geq 1$.

On a

$$T_n = \overline{B_0} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$$

ATTENTION ICI! NOUS N'AVONS PAS MONTRÉ PRÉCÉDEMMENT QUE LES B_n ÉTAIENT MUTUELLEMENT INDÉPENDANTS! ON NE PEUT DONC ÉCRIRE DIRECTEMENT QUE LA PROBABILITÉ DE CETTE INTERSECTION EST LE PRODUIT DES PROBABILITÉS!

(remarquons que nous n'avons même pas montré que les B_n étaient indépendants 2 à 2)

ON EST DONC OBLIGÉ DE PASSER PAR LA FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

$$P(T_n) = P(\overline{B_0}).P_{\overline{B_0}}(\overline{B_1}).P_{\overline{B_0} \cap \overline{B_1}}(\overline{B_2}) \dots P_{\overline{B_0} \cap \overline{B_1} \dots \cap \overline{B_{n-1}}}(B_n)$$

CETTE QUESTION EST ASSEZ COMPLEXE... (et perso je trouve qu'elle est limite pour une question à l'écrit)

Comme l'état à l'instant k ne dépend que de l'état à l'instant précédent $k-1$, on peut écrire écrire que pour chacune des probabilités conditionnelles on a

$$P_{\overline{B_0} \cap \overline{B_1} \dots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k) = P_{\overline{B_{k-1}}}(B_k)$$

Et comme on a prouvé que les événements B_{k-1} et B_k étaient indépendants, on a

$$P_{\overline{B_{k-1}}}(B_k) = P(B_k)$$

Au final, on a donc

$$P(T_n) = P(\overline{B_0}).P(\overline{B_1}).\dots.P(\overline{B_{n-1}}).P(B_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$$

(b) • $\sum_{n=0}^{\infty} P(T_n) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$

- Je propose deux solutions pour cette question

i) En reconnaissant, à peine cachée, l'espérance d'une v.a. qui suit une loi géométrique à un décalage près.

On sait que si $Y \sim \mathcal{G}(p)$ on a $E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} n.q^{n-1}.p = \frac{1}{p}$

On a ici

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.P(T_n) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n. \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2$$

ii) En utilisant le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.

On note S la fonction somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$.

On sait que $\forall x \in]-1, +1[, S(x) = \frac{1}{1-x}$ Comme $\text{Rayon}(\sum_{n \geq 0} x^n) = 1$, on sait que

i) S est C^∞ sur $] -1, +1[$

ii) $\forall x \in]-1, +1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1^\infty n.x^{n-1}$

On a donc $\forall x \in]-1, +1[, \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.P(T_n) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n. \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} = 2$$

60 1. $P(D_i) = \frac{2}{3^{i-1}}$
2. $P(T_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$