MATHEMATIQUES PT* 25/26

PROGRAMME DE COLLE N° 15
SEMAINE DU 26/01 au 30/01

1 Leçons

1. **le poly "espace préhilbertien réel"**: *produit scalaire, norme associée, espace préhilbertien, espace euclidien, relations entre produit scalaire et norme, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, vecteurs orthogonaux, sev orthogonaux, famille orthogonale, orthonormale, orthogonal d'un sev, théorème de Pythagore, procédé d'orthonormalisation, expression des coordonnées et du produit scalaire dans une bon,* $F \oplus F^{\perp} = E$ *lorsque* $\dim F < \infty$*, projection orthogonale, distance à un sev de dimension finie, vecteur normal à un hyperplan en dimension finie, expression intrinsèque d'une projection orthogonale sur une droite, un hyperplan, d'une réflexion*

2. **le poly "isométries vectorielles"**: *isométrie vectorielle d'un espace euclidien, conservation de la norme, du produit scalaire, image d'une bon, structure de* $O(E)$*, caractérisation matricielle des isométries vectorielles dans une bon, déterminant et valeurs propres d'une isométrie vectorielle, structure de* $SO(E)$*, matrices orthogonales, structure de* $O_n(\mathbb{R})$ *et de* $SO_n(\mathbb{R})$*, description du groupe orthogonal en dimension 2, rotation dans l'espace, réflexion dans l'espace, (les anti-rotations ne sont pas au programme), (les étudiants doivent savoir déterminer l'angle et l'axe d'une rotation)*

2 Démonstrations à connaître: choisir la formule $+2$, $+4$ ou $+6$!

- Formule +2
  - exemple 3 : $\mathrm{tr}(A^T.B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  - théo 10.2 : les seules vp réelles possibles d'une matrice orthogonale sont 1 et -1
  - exemple 1: les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles
  - théo 15 ii): expression analytique et matricielle du produit scalaire dans une BON

- Formule +4 *(c'est la Formule +2 avec en plus. . .)*
  - théo 16 : si F est un sev de dimension finie alors $F \oplus F^{\perp} = E$
  - théo 10: une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre

- Formule +6 *(c'est la Formule +4 avec en plus. . .)*
  - théo 4: démonstration de L'inégalité de Cauchy-Schwarz