

# MATHEMATIQUES PT\* 25/26

PROGRAMME DE COLLE N° 13  
SEMAINE DU 12/01 au 16/01

## 1 Leçons:

### 1. le poly "séries entières"

série entière réelle ou complexe, définition du rayon, propriétés caractéristiques du rayon de convergence, théorème de comparaison des rayons ( $|a_n| \leq |b_n|$ ,  $a_n \sim b_n$ ,  $a_n = O(b_n)$ ,  $a_n = o(b_n)$ ), somme et produit de deux séries entières, la fonction somme est continue sur son ensemble de définition, dérivation et primitivation terme à terme,  $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ , développement en série entière, exemples de référence ( $e^z$ ,  $\frac{1}{1-z}$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\ln(1-x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\arctan x$ ), série de Taylor

Le théorème d'intégration terme à terme suivant a aussi été vu:

Soit  $S \in C^0(I, \mathbb{R})$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $C^0(I, \mathbb{R})$  telle que

(a) pour tout  $n$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $I$

(b) pour tout  $t \in I$ , la série  $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$  converge et  $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$

(c) la série  $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(t)| dt$  converge

Alors

$$S \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_I S(t) dt = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt$$

## 2 Démonstrations à connaître: choisir la formule +2, +4 ou +6!

### • Formule +2

- ex 22: la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  prolongée par continuité en 0 est de classe  $C^\infty$
- DSE de  $\sin x$  à partir de  $e^z$
- exemple 15: DSE de  $\ln(1+x)$  obtenu par dérivation

### • Formule +4 (c'est la Formule +2 avec en plus...)

- ex 19: Montrer que  $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$  est DSE et donner son développement

### • Formule +6 (c'est la Formule +4 avec en plus...)

- théo 8: Si  $a_n = O(b_n)$  alors  $R_a \geq R_b$
- théo 1: lemme d'Abel

## déroulement de la colle

1. une question de cours: définition ou théorème à écrire au tableau avec précision
2. une démonstration de cours à restituer
3. exercice(s) à traiter