2 Géométrie dans l'espace

Droites, plans, sphères

GEO 138 (plans de l'espace)
Soient λ,μ,u,v des réels. Montrer que les représentation paramétriques ci-dessous définissent le même plan

$$\begin{cases} x &= 2+\lambda+2\mu \\ y &= 2+2\lambda+\mu \\ z &= 1-\lambda-\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= 1+3u-v \\ y &= 3+3u+v \\ z &= 1-2u \end{cases}$$

GEO 139
Déterminer m pour que les deux droites suivantes soient coplanaires:

$$(D_1) : (x+y+z=1, x-2y+2z=m) \text{ et } (D_2) : (z-2x=2, y-x=1)$$

Donner dans ce cas l'équation du plan qui contient ces deux droites.

GEO 140 (plans de l'espace)
Soit $t\in\mathbb{R}$. On considère les 4 plans

$P_1\ :\ x=z.\cos t-\sin t \qquad P_2\ :\ y=z.\sin t+\cos t \qquad P_3\ :\ x=-z\sin t+\cos t \qquad P_4\ :\ y=z.\cos t+\sin t$

1. Montrer que ces 4 plans admettent un point commun.
2. Donner le lieu de ce point commun lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

GEO 141
Soit P_m le plan d'équation $mx-y+(2-m)z+m-4=0$ avec $m\in\mathbb{R}$ et P' celui d'équation $x+y+z=1$.
On pose $\Delta_m=P_m\cap P'$
Montrer que P_m contient une droite fixe et que Δ_m passe par un point fixe à préciser.

GEO 142
On considère les deux droites suivantes $D\ :\begin{cases} x &= y \\ z &= 1 \end{cases}$ et $D'\ :\begin{cases} x &= z+1 \\ y &= 2z+3 \end{cases}$.
Montrer qu'il existe un unique couple de plans parallèles (P,P') tels que $D\subset P$ et $D'\subset P'$.
Donner alors leurs équations.

GEO 143
Former un système d'équation de la droite Δ parallèle à la droite $D : 2x=3y=6z$ et rencontrant les deux droites $D_1\ :\begin{cases} x &= 0 \\ z &= 4 \end{cases}$ et $D_2\begin{cases} y &= 0 \\ z &= -4 \end{cases}$

GEO 144
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit la droite $\mathcal{D}:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P} : x+3y+2z=6$
Déterminer l'image de la projection orthogonale de $\mathcal{D}$ sur le plan $\mathcal{P}$.
(On pourra caractériser cette image comme l'intersection de deux plans.)

GEO 145
Soit (P) le plan d'équation $2x+y-z+3=0$ et (D) la droite $\begin{cases} x+y+2 &= 0 \\ x+2y+z+3 &= 0 \end{cases}$

1. écrire (P) sous forme paramétrique
2. écrire (D) sous forme paramétrique
3. écrire l'équation cartésienne du plan contenant (D) et passant par le point $A(1,1,0)$
4. montrer que (D) est contenue dans (P)
5. écrire l'équation (paramétrique et cartésienne) de la droite (D') parallèle à (D) et passant par le point $B(1,-1,0)$
6. écrire l'équation du plan contenant les droites (D) et (D_1) d'équation paramétrique $\begin{cases} x= & \lambda \\ y= & 4+2\lambda \\ z= & -3-\lambda \end{cases}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$
7. écrire l'équation de la sphère tangente à (P) et de centre $B(1,-1,0)$. Donner les coordonnées du point d'intersection.

GEO 146
On considère pour tout réel t le point $M(t)=(\cos t+\sqrt{3}\sin t+1, \cos t-\sqrt{3}\sin t+1, -2\cos t+1)$

1. Calculer $x(t)+y(t)+z(t)$
2. Calculer $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)$
3. En déduire que $M(t)$ est toujours élément d'un cercle donc on précisera le centre et le rayon

GEO 147
Soient deux droites non parallèles

- D_1 la droite passant par le point A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}$
- D_2 la droite passant par le point A_2 et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}$

Montrer que la distance entre les droites D_1 et D_2 est donnée par la formule

$$d(D_1,D_2)=\frac{<\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{d_1}\wedge\overrightarrow{d_2}>}{||\overrightarrow{d_1}\wedge\overrightarrow{d_2}||}$$

(On fera un dessin et on pourra introduire les points H_1 et H_2 tels que $d(D_1,D_2)=||\overrightarrow{H_1H_2}||$)

Courbes de l'espace

GEO 148
Soit P le plan passant par le point $A(1,2,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,0,-1)$ et $\vec{v}=(2,3,4)$ et P' le plan d'équation $5x+6y+7z+8=0$.

1. Donner une équation cartésienne de P
2. Caractériser l'intersection de P et P'.
3. Déterminer l'angle entre les plans P et P'

GEO 149
On considère la courbe paramétrée $(\mathbb{R},f)$ avec $f : t\mapsto M(t)=(2\cos t,\sin t,\cos t)$.
On la note Γ

1. La courbe Γ possède-t-elle des symétries évidentes?
2. Déterminer les intersections de Γ avec les trois plans de coordonnées.
3. Déterminer les projections orthogonales sur les plans de coordonnées de cette courbe.
4. Montrer que la courbe est plane, et donner l'équation cartésienne de ce plan.
5. En effectuant un changement de repère judicieux, montrer que la courbe est une ellipse.

GEO 150
On considère l'hélice (H) de pas $p>0$ et de rayon $R>0$ paramétrée par $t\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} x(t) &= R.\cos t\\ y(t) &= R.\sin t\\ z(t) &= p.t\end{cases}$

1. Cette courbe passe-t-elle par le point (0,0,0)? Par le point $(0,R,\dfrac{p\pi}{2})$?
2. Déterminer le projeté de (H) sur le plan xOy et la représenter.
3. Déterminer le projeté de (H) sur le plan xOz , et la représenter dans le cas $p=R=1$
4. Déterminer l'intersection de (H) avec le plan $x0z$
5. Ecrire une équation paramétrique de la droite tangente à cette courbe au point $M(\pi/2)$
6. Calculer la longueur d'une spire $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$
7. Montrer que l'angle entre la droite tangente au point $M(t)$ et l'axe (Oz) est un angle constant (c'est à dire indépendant de t)

GEO 151
Soient $\Sigma_1\ :\ x^2+xz+z^2=1$ et $\Sigma_2\ :\ y^2+yz+z^2=1$. On note $\Gamma=\Sigma_1\cap\Sigma_2$

1. Déterminer la direction de la tangente au point $M_0(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})\in\Gamma$
2. Montrer que Γ est la réunion de deux courbes planes
3. Décrire la projection de Γ sur le plan xOy

GEO 152
Montrer que la courbe Γ de paramétrisation $\begin{cases} x(t) &= t+1+\dfrac{1}{t}\\ y(t) &= 2t-\dfrac{1}{t}\\ z(t) &= 4t+1+\dfrac{1}{t}\end{cases}$ est plane et donner une représentation paramétrique de ce plan

GEO 153
On considère la courbe Γ de représentation paramétrique $t\in\mathbb{R}\mapsto(\cos(t-\dfrac{\pi}{3}),\ \cos(t),\ \cos(t+\dfrac{\pi}{3})$

1. Démontrer que Γ est plane et déterminer ce plan.
2. Démontrer que Γ est l'intersection de 2 surfaces dont on donnera les équations cartésiennes.
3. En se plaçant dans une repère judicieux, donner la nature de Γ

GEO 154
On s'intéresse à la courbe Γ définie par le système d'équations : $(x^2+y^2+z^2=1, y^2+z^2=z)$.

1. Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de Γ. Donner la droite tangente à Γ en M_0 à l'aide d'un théorème du cours.
2. On souhaite déterminer une représentation paramétrique de Γ.
   (a) A l'aide d'un paramètre réel t caractériser les réels y et z qui vérifient $y^2+z^2=z$
   (b) En déduire que Γ est la réunion de deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport au plan yOz. Donner une représentation paramétrique de chacune de ses deux courbes

GEO 155
On considère la courbe $\mathcal{C}$ de l'espace d'équation :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1.\end{cases}$$

1. Quelle est la nature géométrique de la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Donner en ces points une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$.
4. Déterminer la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur le plan (xOy).

GEO 156
On considère la courbe $\mathcal{C}$ de l'espace d'équation :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1\\ x^2+z^2=1.\end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Donner en ces points une représentation paramétrique de la tangente à $\mathcal{C}$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ en $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
5. Déterminer la projection de $\mathcal{C}$ sur le plan (xOz).

Nappes paramétrées et surfaces

GEO 157
Soit Σ la surface de représentation paramétrique $(u,v)\in\mathbb{R}^2, (e^u,e^v,u.v)$
Montrer que tout point de Σ est régulier et donner l'équation du plan tangent en tout point de Σ

GEO 158
Déterminer le(s) plan(s) tangent(s) à la surface d'équation $x^2+y^2=1+z^2$ contenant la droite $\begin{cases} x=1\\ y=z\end{cases}$

GEO 159
Déterminer les plans tangents à $\Sigma\ :\ x^2+y^2+2z^2=1$ et perpendiculaires à la droite $D\ :\begin{cases} y=3x\\ z=-2x\end{cases}$

GEO 160
On considère Σ la surface paramétrée $([0,\pi]\times[0,2\pi],f)$ avec $f:\begin{array}{rcl}[0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \longmapsto & (\sin u.\cos v,\sin u.\sin v,\cos\end{array}$

1. Déterminer les points singuliers de cette surface
2. Donner l'équation cartésienne du plan tangent en un point régulier $M_0=f(u_0,v_0)$
3. On note S la sphère de centre 0 et de rayon 1.
   (a) Donner l'équation cartésienne de S
   (b) Montrer que $\Sigma\subset S$
   (c) Montrer que $S\subset\Sigma$

GEO 161
On considère la nappe paramétrée $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \longmapsto & (v\cos u,v\sin u,u)\end{array}$

1. Etudier la régularité de cette nappe.
   Ecrire l'équation du plan tangent en un point régulier
2. On note $\vec{N}(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$.
   Montrer que la valeur absolue de la cotangente de l'angle entre $\vec{N}(u,v)$ et $\vec{k}$ est proportionnelle à $||M(u,v)-(0,0,u)||$

GEO 162
On considère la surface d'équation Σ d'équation $z^3 = xy$.
1. Le plan xOy est-il un plan de symétrie pour Σ?
2. Les axes $(Ox), (Oy)$ et (Oz) sont-ils des axes de symétrie de cette surface?
3. Déterminer l'intersection de Σ avec un plan d'équation $z = z_0$
4. Déterminer les points réguliers de la surface Σ
5. Déterminer les plans tangents à Σ qui contiennent la droite définie par $(x = 2, y - 3z + 3 = 0)$

GEO 163
On s'intéresse à la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$
1. Déterminer les intersections de Σ avec des plans parallèles au plan xOy
2. Déterminer les intersections de Σ avec des plans parallèles au plan xOz
3. Déterminer les points réguliers de Σ, puis donner l'équation cartésienne du plan tangent en un tel point $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$
4. Déterminer les plans tangents à la surface qui sont perpendiculaires à la droite (D) définie par les équations $\begin{cases} 3x - y &= 0 \\ 2y + 3z &= 1 \end{cases}$

GEO 164
On note $P(u) = (0, 3 + 2\cos u, 2\sin u)$ avec $u \in [0,2\pi]$, et Γ le lieu des $P(u)$.
On note Σ la surface de révolution d'axe (Oz) et de demi-méridienne Γ.
1. Reconnaître Γ, puis Σ.
   (On dessinera Γ)
2. Donner une représentation paramétrique de Σ

GEO 165
On considère la courbe Γ définie comme l'intersection des de la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et celle d'équation $y = 2z$.
Définir Γ en donnant ses éléments caractéristiques

GEO 166
Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
On considère la surface (S) d'équation $2x^2 + (y - z)^2 = 2$.
1. On note $\vec{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$. Déterminer une base orthonormée $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.
2. Ecrire l'équation de (S) dans le repère $(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.
3. Reconnaître précisément (S)

GEO 167
On considère le point $A = (a,b,c)$ et la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$
1. Déterminer l'équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon $R > 0$
2. Déterminer l'équation cartésienne du cône de sommet A, d'axe (D) et de demi-angle au sommet θ

GEO 168
On considère la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$
1. Montrer que cette surface est une surface de révolution d'axe (Oz)
2. Déterminer une méridienne
3. D'une manière générale, montrer que si Σ possède une équation cartésienne du type $g(x^2+y^2,z) = 0$ alors g est une surface de révolution d'axe (Oz)

GEO 169
On considère la nappe paramétrée suivante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (v\cos u, v\sin u, v) \end{array}$
1. Déterminer les points singuliers de la surface $(S) = (\mathbb{R}^2, f)$
2. Déterminer en tout point régulier de la surface (S) l'équation cartésienne du plan tangent.
3. Déterminer une équation cartésienne de (S)

GEO 170 (contour apparent)
(Σ) étant une surface donnée et S un point donné de l'espace.
Par définition, on appelle *contour apparent de* (Σ) *vu de* S l'ensemble des points de (Σ) en lesquels le plan tangent contient S.
Déterminer le contour apparent dans les cas suivants :
1. $S(0,0,2)$ et Σ est la sphère de centre O et de rayon 1
2. $S(1,2,-1)$ et Σ est la sphère de centre O et de rayon 1
3. $S = O$ et Σ est la surface d'équation $x^3 - 3xy + z = 0$

GEO 171 (contour apparent)
(Σ) étant une surface donnée et $\vec{u}$ un vecteur non nul donné.
Par définition, on appelle *contour apparent de* (Σ) *pour la direction* $\vec{u}$ l'ensemble des points de (Σ) en lesquels la direction du plan tangent contient $\vec{u}$.
Déterminer le contour apparent dans les cas suivants :
1. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et Σ est la surface d'équation $x^2 + y^2/2 + z^2/3 = 1$
2. $\vec{u} = \vec{i}$ et Σ est la surface d'équation $x^3 - 3xy + z = 0$

GEO 172
On se place dans un espace euclidien orienté de de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère Σ la surface d'équation $3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1$
ainsi que les points $A(1,0,0)$ et $N(0,0,1)$
1. On considère la plan $\mathcal{P}$ d'équation $x = \dfrac{1}{3}$ et la courbe $\mathcal{E} = \mathcal{P} \cap \Sigma$.
   Justifier que la courbe $\mathcal{E}$ est une conique et donner son équation réduite dans un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ que l'on précisera
2. On dit qu'un point $M(x,y,z)$ de la surface Σ est visible du point A lorsque, pour tout M'(x',y',z') point d'intersection de la surface Σ et de la droite (AM), on a $x' \leqslant x$
   (a) Justifier que $N \in \Sigma$
   (b) Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (NA) et de la surface Σ. En déduire que le point N n'est pas visible du point A.
3. On admet que la partie visible du point A de la surface Σ est délimitée par une courbe constituée des points M tels que la droite (AM) soit tangente à la surface Σ en M. On appelle cette courbe le contour apparent conique de la surface Σ issu du point A.
   On note Γ le contour apparent conique.
   (a) Soit $B(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}, -\dfrac{\sqrt{2}}{3})$.
   Montrer que $B \in \Sigma$ et déterminer une équation cartésienne du plan tangent Π_B à Σ en B
   (b) A-t-on $A \in \Pi_B$? En déduire que $B \in \Gamma$
   (c) Soit $T(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$.
   Etablir une équation cartésienne du plan tangent Π_T en T à la surface Σ.
   (d) Conclure que Γ est la courbe $\mathcal{E}$

GEO 173
On considère la surface (S) de classe C^1 d'équation $z = g(x,y)$ avec $x > 0$ et $y > 0$.
Déterminer g de façon que le plan tangent en tout point (x,y,z) de (S) rencontre l'axe (Ox) au point d'abscisse $2x$, et l'axe (Oy) au point d'ordonnée $\frac{3y}{2}$

GEO 174
On considère la surface Σ d'équation cartésienne $y^2 - 3z^2 - 4xz + x + 2z = 0$.
On note D la droite qui passe par O et dirigée par le vecteur $\vec{i} + 2\vec{k}$.
On souhaite montrer que Σ est une surface de révolution d'axe D

1. (a) Calculer $x^2 + y^2 + z^2 - (x + 2z)^2 + (x + 2z)$
   (b) En déduire la nature de l'intersection de Σ avec un plan d'équation $x + 2z = k = cste$.
   (c) Conclure
2. (a) Déterminer un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ tel que $\vec{e}_3$ soit un vecteur directeur de D
   (b) Montrer que l'équation de Σ dans ce nouveau repère est $X^2 + Y^2 - 4Z^2 + \sqrt{5}Z = 0$
   (c) Montrer que Σ est la réunion de cercles centrés sur la droite D et tracées dans des plans perpendiculaires à D. Conclure

GEO 175
On considère la nappe paramétrée (Σ) définie par $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v,uv,u^2+v^2) \end{array}}$ et la surface (S) d'équation cartésienne $x^2 = z + 2y$.

1. Montrer que le support de (Σ) est inclus dans (S)
2. On souhaite étudier la réciproque.
   (a) Que dire du point $(3,4,1)$?
   (b) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de (S). Montrer que M_0 appartient au support de (Σ) ssi $x_0^2 \geqslant 4y_0$
   (c) Conclure

GEO 176
Montrer que les nappes suivantes sont réglées puis que le plan tangent est le même le long d'une même génératrice.

1. $(v.\cos u, v.\sin u, v)$ avec $(u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$
2. $(\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u(u + 2v))$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
3. $(3u + v, 2u^2 + 2uv, u^3v)$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

GEO 177
Soit une courbe paramétrée régulière $\Gamma : t \in I \mapsto (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)) = f(t)$.
On note Σ la réunion des droites tangentes à Γ.

1. Donner une représentation paramétrique de Σ
2. Montrer que le plan tangent est le même en tout point d'une même génératrice

GEO 178
Soit Σ la surface d'équation $z = \sin(x + y + z)$.
Ecrire l'équation de Σ dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_2 = \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{i})$
Que remarque-t-on?

GEO 179
On considère la surface réglée Σ $\begin{cases} x & = u + v \\ y & = u^2 + v(u+1) \\ z & = u + 1 + vu \end{cases}$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que le point $A(0,-1,1)$ est un point de la surface
2. Déterminer la génératrice qui passe par le point A
3. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au point A.
4. Montrer que le point $B(2,3,3)$ est sur la même génératrice que A.
5. Les plans tangents en A et B sont-ils identiques?
6. D'une manière générale le plan tangent est-il le même le long d'une génératrice?

GEO 180
Soit Σ la surface réglée de courbe directrice $\Gamma(x = a\cos u, y = b\sin u, z = 0)$ avec $u \in [0,2\pi]$ et de génératrices dirigées par $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$. ($a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes)

1. Donner une représentation paramétrique de Σ
2. Donner une équation cartésienne de Σ
3. Considérons le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ avec $\vec{I} = \vec{i}, \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k})$.
   Donner l'équation de Σ dans ce nouveau repère .
   Quelle surface reconnaissez-vous? A quelle condition portant sur (a,b) la surface est-elle une surface de révolution?

GEO 181
On considère la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$

1. Montrez que cette surface est une surface de révolution d'axe (Oz)
2. Déterminez une méridienne
3. Représentez-vous cette surface!

GEO 182
On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ définie par $\begin{cases} x(u,v) & = u.v \\ y(u,v) & = u.v^2 \\ z(u,v) & = u^2.v \end{cases}$
Déterminer des symétries laissant la surface globalement invariante.

GEO 183
On considère un arc paramétré $\Gamma = (\mathbb{R},g)$ avec $g(t) = (1,t,t^2)$

1. Donner une représentation paramétrique de la surface Σ_1 obtenue par la rotation de Γ autour de l'axe (Ox)
2. On souhaite déterminer une représentation paramétrique de la surface Σ_2 obtenue par la rotation de Γ autour de la droite $\Delta : (y = 0\,, x = z)$
   (a) Déterminer une base orthonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ tel que $\vec{e}_3$ dirige la droite Δ.
   (b) Donner la matrice, dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de la rotation d'axe Δ est d'angle θ.
   (c) Déterminer la matrice de cette même rotation mais dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
   (d) En déduire une représentation paramétrique de la surface Σ_2

GEO 184
On considère la nappe paramétrée (S) suivante $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u\cos v - \sin v, u\sin v + \cos v, u) \end{array}$

1. Montrer que cette surface est une surface réglée.
2. On souhaite déterminer une équation cartésienne de (S)
   (a) Montrer que (S) est inclus dans l'hyperboloïde (H) d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
   (b) Réciproquement, montrer que tout point (x_0,y_0,z_0) de (H) est un point de (S)
   (c) Conclure

GEO 185

On note Σ la surface paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ avec $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (v\cos u, v\sin u, v) \end{array}}$

On note $\Gamma = (\mathbb{R},g)$ un arc paramétré tracée sur Σ que l'on cherche sous la forme

$$\boxed{\begin{array}{lll} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (v(t).\cos(t), v(t).\sin(t), v(t)) \end{array}} \text{ où } v \text{ est une fonction de } \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

On suppose que Γ est un arc régulier

1. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à Γ en un point $M(t) = g(t)$
2. Dans le cas particulier où $v : t \mapsto e^t$, montrer qu'en tout point $M(t) \in \Gamma$, la tangente à Γ fait un angle constant avec l'axe (Oz).
   La tangente fait-elle aussi un angle constant avec la droite $(OM(t))$?
3. Dans le cas général, montrer que la tangente à Γ fait un angle constant avec l'axe (Oz) ssi v vérifie l'équation différentielle $v' - k.\sqrt{2(v')^2 + v^2} = 0$ où k est une constante

GEO 186

On considère S la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

1. Soit M_0 un point du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, appartenant à S .
   On notera $(\cos\theta_0, \sin\theta_0, 0)$ les coordonnées de M_0 .
   Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{V} = (\alpha,\beta,1)$.
   Ecrire une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ puis trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (α,β) pour que $\mathcal{D}$ soit incluse dans S .
2. Déterminer les droites incluses dans S , et rencontrant le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   Existe-t-il des droites parallèles à $(O;\vec{i},\vec{j})$ incluses dans S?

GEO 187

On note Γ l'ellipse tracée dans le plan $(x0y)$ et d'équation $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Soit le point $S(0,1,1)$.
On considère la surface Σ qui est la réunion des droites passant par S et au moins un point de Γ.
Donner une représentation paramétrique de Σ.
Quelle est son intersection avec le plan yOz?

GEO 188

Soit Σ la surface d'équation cartésienne $z = x^3 - y^3 + xy$.
Etudier la position de Σ par rapport au plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ lorsque i) $M_0 = (1,1,1)$ ii) $M_0 = (1,-1,1)$

GEO 189

On considère Σ la surface d'équation $z = x^2 - y^2$.
Soit $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$.
Déterminer les droites passant par M_0 qui sont incluses dans Σ.
(On pourra les caractériser par un vecteur directeur)

GEO 190

On considère la courbe Γ définie par le système $\begin{cases} x^2 - xy + 1 & = 0 \\ z - x & = 0 \end{cases}$.
Déterminer une équation cartésienne de la surface Σ, réunion des droites s'appuyant sur Γ et de vecteur directeur $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

GEO 191

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, F(\lambda.x,\lambda.y,\lambda.z) = \lambda^3.F(x,y,z)$.
Montrer que la surface Σ d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ est une surface réglée, dont les génératrices passent toutes par le point O

GEO 192

Soit $\mathcal{C}$ un courbe d'équations cartésiennes $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

1. Déterminer les projections de $\mathcal{C}$ sur les plans de coordonnées
2. Déterminer les intersections de $\mathcal{C}$ avec les plans de coordonnées
3. Déterminer une équation de la surface $\mathcal{S}$ obtenue par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe (Oz)

GEO 193

Soit la nappe $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x & = 3u^2 + uv \\ y & = 4u^3 + u^2 v \\ z & = v \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que l'ensemble Γ des points stationnaires de $\mathcal{S}$ est une courbe régulière
2. Déterminer la tangente Γ en chacun de ses points
3. Déterminer le plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun de ses points réguliers

GEO 194

Soit $\mathcal{S}$ d'équation $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.
On note $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$ et $A(3,0,0)$

1. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}_0$ tangent à $\mathcal{S}$ en M_0
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_0$
3. On paramètre $\mathcal{S}$ par $(\theta,\phi) \mapsto (x = 5\sin\theta, y = 4\cos\theta\cos\phi, z = 4\cos\theta\sin\phi)$
   (a) Ecrire H en fonction de θ et ϕ
   (b) En déduire que H appartient à une sphère indépendante de x_0,y_0,z_0

GEO 195

On considère la courbe $\mathcal{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^2, \\ z(t) = t^3. \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{T}_t$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t)$. On désigne par $\mathcal{S}$ la réunion des droites $\mathcal{T}_t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathcal{S}$.
2. Déterminer les points stationnaires de $\mathcal{S}$ pour le paramétrage obtenu, puis déterminer une équation du plan tangent à la surface aux points réguliers.
3. Montrer que tous les points réguliers d'une même génératrice $\mathcal{T}_t$ ont le même plan tangent.

GEO 196

Soit $\mathcal{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$(x + z)^2 + 2y^2 = 2.$$

1. Soit $M_0 \in \mathcal{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathcal{S}$ passant par M_0.
2. La surface $\mathcal{S}$ est-elle réglée?

GEO 197
On considère la surface de révolution $\mathcal{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \cos(2t). \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe plane.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
3. Que peut-on dire des méridiens de cette surface ?

GEO 198 (Banque PT 2025B)
On considère la surface S d'équation cartésienne : $x^2 = 2yz$. On note Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases} \quad , t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

De plus, $M(t)$ désigne le point de Γ de paramètre t. Enfin, P_a est le plan d'équation $z = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$.

1. (a) Justifier que le plan d'équation $x = 0$ est un plan de symétrie de la surface S.
   (b) Déterminer les points non réguliers de S.
   (c) Déterminer une équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $(2, -2, -1)$ après avoir vérifié que $A \in S$.
   (d) Démontrer que l'ensemble des points (réguliers) de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ est une droite privée de O dont on donnera un vecteur directeur.
   (e) Existe-t-il un point régulier de S en lequel le plan tangent à S est orthogonal au vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?
2. Démontrer que la courbe Γ est régulière.
3. Vérifier que $\Gamma \subset S$.
4. Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Pour quelle valeur de a (dépendante de t), a-t-on $M(t) \in \Gamma_a$? Dans la suite de cette question, a prend cette valeur.
   (b) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}(t)$ de la tangente à Γ en $M(t)$.
   (c) Vérifier que $M(t)$ est un point régulier de Γ_a et déterminer un vecteur $\vec{u}(t)$ directeur de la tangente à Γ_a en $M(t)$.
   (d) Démontrer que $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.

$\boxed{\textbf{FIN des exercices GEO}}$