

Exercice 1

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^3 P(k)Q(k).$$

On considère également les polynômes

$$L_p(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^3 \frac{X - k}{p - k} \quad \text{pour } p \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

1. (a) Vérifier que

$$L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3).$$

(b) Écrire de même $L_1(X)$, $L_2(X)$ et $L_3(X)$.

(c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p, k) \in [0, 3]^2$.

2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

(b) Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

(c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) .

3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ .

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère désormais six réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite D d'équation $y = ax + b$.

Pour tout $p \in [0, 3]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p) , N_p le point de D dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_p N_p]$.

On pose alors

$$\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 d_p^2.$$

L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a, b)$ est minimale.

4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.

5. Vérifier que

$$\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2.$$

6. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3 . On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [0, 3]$.

(b) Démontrer que

$$\delta(a, b) = \|Q - H\|^2 \quad \text{où } H(X) = aX + b.$$

(c) En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0 . On précisera le lien entre Q et H_0 .

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.

On admet la propriété $\mathcal{P}$ suivante:

il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ formée de polynômes orthogonaux deux à deux et tels que :

- i) P_n est un polynôme de degré n
- ii) Le coefficient dominant de P_n vaut 1

1. (a) A l'aide de coefficients inconnus, déterminer P_0, P_1 et P_2

(b) On donne $P_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

Vérifier qu'il est bien orthogonal aux trois polynômes que vous avez trouvés.

2. Dans cette question on souhaite montrer que P_n est paire [impaire] lorsque n est pair [impair].

Pour cela, on pose $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$

(a) Pour tout $n \neq m$, calculer $\langle Q_n, Q_m \rangle$

(b) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n

(c) Conclure

3. Soit $n \geq 1$ un entier. On souhaite montrer dans cette question que $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

(a) Pour $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, justifier que $\langle P_{n+1}, Q \rangle = 0$ et que $\langle XP_n, Q \rangle = \langle P_n, XQ \rangle = 0$

(b) Conclure

4. Dédurre des questions précédentes que pour tout $n \geq 1$ il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel

que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.

Donner les valeurs de λ_1 et λ_2

Exercice 1

Notons $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1.

(a)

$$L_0(X) = \prod_{k=1}^3 \frac{X-k}{-k} = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(-1) \times (-2) \times (-3)} = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3).$$

(b) On obtient de même :

$$L_1(X) = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3), \quad L_2(X) = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3), \quad L_3(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2).$$

(c)

- Si $k \neq p$, on a $L_p(k) = 0$ car un des facteurs du produit est nul.
- Si $k = p$, on a

$$L_p(p) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^3 \frac{p-k}{p-k} = 1.$$

- Ainsi,

$$L_p(k) = \delta_{p,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p, \\ 0 & \text{si } k \neq p. \end{cases}$$

rem: à noter que l'égalité $L_p(k) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^3 \frac{p-k}{p-k}$ n'a aucun sens, car si k désigne l'indice pour le produit

alors k n'a pas d'existence à l'extérieur de ce produit.

2.

(a) On vérifie sans peine que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E (laissé au lecteur). De plus,

- φ est positive car $\forall P \in E$,

$$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^3 (P(k))^2 \geq 0.$$

car une somme de termes positifs est positive

- φ est définie positive car si $P \in E$ est tel que $\varphi(P,P) = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^3 (P(k))^2 = 0.$$

Comme il s'agit d'une somme de réels positifs, on en déduit que $\forall k \in [0,3]$, $P(k) = 0$, ce qui prouve que P admet au moins quatre racines distinctes. Sachant que P est de degré au plus 3, on conclut que $P = 0_E$, comme voulu.

2. (b)

Soit $(p,q) \in \llbracket 0,3 \rrbracket^2$

- si $p \neq q$, on a $\forall k \in \llbracket 0,3 \rrbracket$, $L_k(p) \cdot L_k(q) = 0$ car forcément un des deux facteurs est nul d'après 1(c), et donc $\varphi(L_p, L_q) = \sum_{k=0}^3 L_p(k) \cdot L_q(k) = 0$

- Si $p = q$, on a $\varphi(L_p, L_q) = \sum_{k=0}^3 (L_p(k))^2 = 1$ car le terme d'indice p de cette somme vaut 1 et les autres valent 0.
- On a obtenu $\forall (p, q) \in [0, 3]^2$, $\varphi(L_p, L_q) = \delta_{p, q}$, ce qui montre que la famille $(L_0, \dots, L_3)$ est une **famille** orthonormée de E .
- Étant orthonormée, elle est libre. Comme de plus son cardinal est $4 = \dim(E)$, on conclut que c'est une base de E .

rem: il était aussi possible d'utiliser le symbole de Kronecker, en faisant comme suit:

Soit $(p, q) \in [0, 3]^2$

- $\varphi(L_p, L_q) = \sum_{k=0}^3 L_p(k) \cdot L_q(k) = \sum_{k=0}^3 \delta_{p, k} \cdot \delta_{q, k} = \delta_{p, p} \cdot \delta_{q, p} = \delta_{q, p}$
- ce qui donne directement le résultat complet voulu

2. (c) Soit $Q \in E$ et (a, b, c, d) l'unique quadruplet de réels tel que

$$Q = aL_0 + bL_1 + cL_2 + dL_3.$$

On évalue cette identité en $X = 0$, ce qui donne

$$Q(0) = aL_0(0) + bL_1(0) + cL_2(0) + dL_3(0) = a$$

d'après 1.(c).

De même, en évaluant en $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$, on trouve

$$b = Q(1), \quad c = Q(2), \quad d = Q(3).$$

Finalement,

$$\forall Q \in E, \quad Q = Q(0)L_0 + Q(1)L_1 + Q(2)L_2 + Q(3)L_3.$$

rem: les coordonnées du polynôme Q dans la base indiquée sont donc $(Q(0), Q(1), Q(2), Q(3))$

3. Pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour φ , on peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, X)$.

On pouvait aussi déterminer cette base orthonormée comme suit ("à la main")

- On commence par déterminer une famille orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$ en posant $P_0 = 1$ et $P_1 = X + a.1$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \langle 1, X + a \rangle = \sum_{k=0}^3 k + a = 6 + 4a$$

On a donc

$$(P_0, P_1) = (1, X - \frac{3}{2}) \quad \text{est une famille orthogonale de } \mathbb{R}_1[X]$$

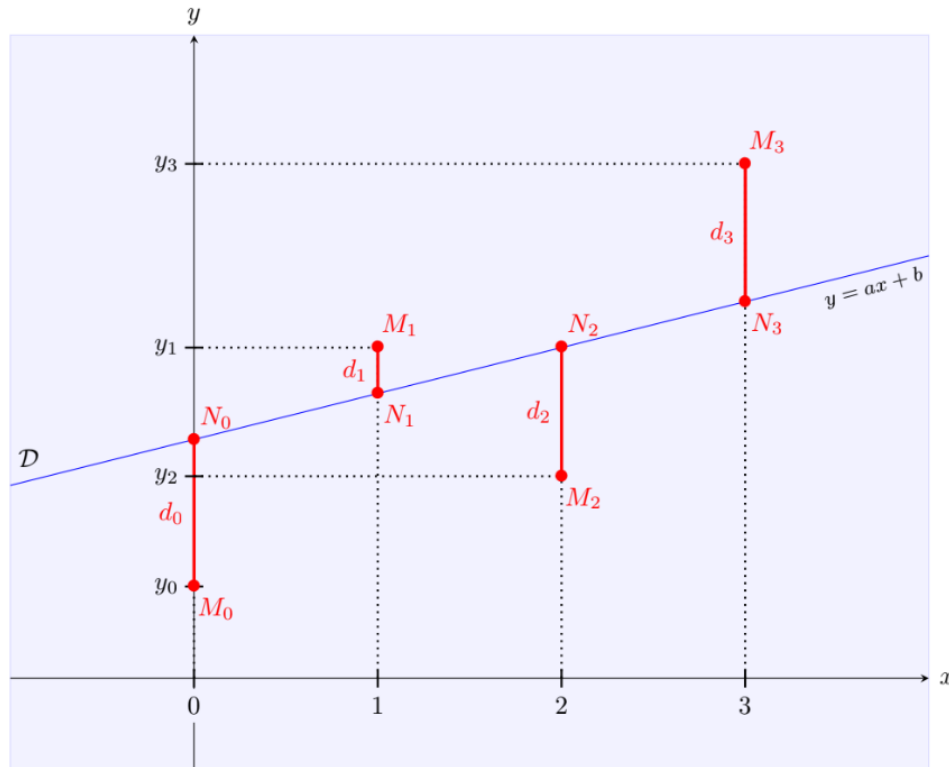
- Reste maintenant à normer chaque vecteur, les calculs donnent

$$\|P_0\|^2 = \|1\|^2 = 4 \quad \|P_1\|^2 = \|X - \frac{3}{2}\|^2 = 5$$

- On trouve comme base orthonormée

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{X - \frac{3}{2}}{\sqrt{5}} \right)$$

4.



5.

- Pour $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on a $M_p(p, y_p)$
Comme N_p est sur D et a la même abscisse que M_p , on a donc $N_p(p, ap + b)$.
Et donc $d_p = M_p N_p = \sqrt{(p - p)^2 + (y_p - ap - b)^2} = |y_p - ap - b|$
- et ainsi

$$\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 d_p^2 = \sum_{p=0}^3 |y_p - ap - b|^2 = \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2$$

6.

- a) Il s'agit de montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\forall p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, Q(p) = y_p$

D'après Q2(c), on peut déjà affirmer que $Q = \sum_{p=0}^3 y_p \cdot L_p$ est UN polynôme qui répond à la question.

Prouvons maintenant l'unicité.

Supposons qu'il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 qui répondent à la question.

Considérons $R = Q_1 - Q_2$

On a alors:

- $R \in \mathbb{R}_3[X]$
- $\forall p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, R(p) = y_p - y_p = 0$

Ainsi R est un polynôme de degré 3 au maximum et possède 4 racines distinctes: on en déduit que $R = 0$ et que $Q_1 = Q_2$.

b)

$$\begin{aligned} \|Q - H\|^2 &= \sum_{p=0}^3 (Q(p) - H(p))^2 \\ &= \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2 = \delta(a, b) \end{aligned}$$

Car $Q(p) = y_p$ puisque le graphe de Q passe par le point $M_p = (p, Q(p))$, et $H(p) = ap + b$

- c) L'ensemble $\{\delta(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un ensemble de nombre positifs, il possède donc une borne inférieure que l'on va noter m .

$$m = \inf\{\delta(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \inf\{\|Q - H\|^2 \mid H \in \mathbb{R}_1[X]\} = d^2(Q, \mathbb{R}_1[X])$$

(on reconnaît la distance (au carré) entre le vecteur Q et le sev de dimension finie $\mathbb{R}_1[X]$)

On sait que **cette distance est atteinte pour un unique vecteur $H_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ qui n'est autre que le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$**

Exercice 2

1. Construction d'une famille orthogonale

(a)

- Si $\deg(P_0) = 0$, alors P_0 est un polynôme constant non nul. Son coefficient dominant est égal à 1, donc $\boxed{P_0 = 1}$
- Si $\deg(P_1) = 1$ et si son coefficient dominant est égal à 1, on écrit

$$P_1 = X + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

On doit avoir $\langle P_1, P_0 \rangle = 0$, d'où

$$\int_{-1}^1 (t + a) dt = \left[\frac{t^2}{2} + at \right]_{-1}^1 = 2a = 0.$$

Ainsi $a = 0$ et donc

$$\boxed{P_1 = X}$$

- Si $\deg(P_2) = 2$ et si son coefficient dominant est égal à 1, on pose

$$P_2 = X^2 + bX + c.$$

On impose

$$\langle P_0, P_2 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle P_1, P_2 \rangle = 0.$$

Cela donne

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 (t^2 + bt + c) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 2c = 0, \\ \int_{-1}^1 (t^3 + bt^2 + ct) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{bt^3}{3} + \frac{ct^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{2b}{3} = 0. \end{cases}$$

Ainsi $b = 0$ et $c = -\frac{1}{3}$, d'où

$$\boxed{P_2 = X^2 - \frac{1}{3}}$$

(b) On vérifie alors que

$$\langle P_3, P_0 \rangle = \langle P_3, P_1 \rangle = \langle P_3, P_2 \rangle = 0.$$

On remarque que deux de ces intégrales sont nulles car l'intégrande est une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

2. Propriétés des polynômes Q_m

(a) Soient $m \neq n$. On a

$$\langle Q_m, Q_n \rangle = \int_{-1}^1 Q_m(t) Q_n(t) dt.$$

En effectuant le changement de variable $\theta = -t$, on obtient

$$\langle Q_m, Q_n \rangle = (-1)^{m+n} \int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt.$$

Ainsi

$$\boxed{\langle Q_m, Q_n \rangle = (-1)^{m+n} \langle P_m, P_n \rangle = 0}$$

car (P_n) est une famille orthogonale.

(b) Par définition,

$$P_n = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

On a donc

$$Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X) = (-1)^n \cdot (-X)^n + \dots = X^n + \dots$$

Ainsi $\boxed{\deg(Q_n) = n \text{ et son coefficient dominant vaut } 1.}$

(c) La suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est une suite de polynômes orthogonaux deux à deux vérifiant :

- i $\deg(Q_n) = n$,
- ii le coefficient dominant vaut 1.

Par unicité d'une telle famille (d'après la propriété $\mathcal{P}$) on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n = P_n.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X),$$

donc $\boxed{P_n \text{ est pair si } n \text{ est pair et impair si } n \text{ est impair}}$

3. Orthogonalité avec $\mathbb{R}_{m-2}[X]$

Soit $n \geq 2$.

(a)

- La famille $\mathcal{B}_n = (P_0, \dots, P_{n-2})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
En effet, étant une famille échelonnée en degré, $\mathcal{B}_n$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
Et comme $\text{card}(\mathcal{B}_n) = n - 1 = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$, on en déduit que $\mathcal{B}_n$ est bien une base de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
- Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Il existe $(b_0, \dots, b_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} b_k P_k.$$

Alors

$$\langle P_{n+1}, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n-2} b_k \underbrace{\langle P_{n+1}, P_k \rangle}_{=0} = 0.$$

rem: on a utilisé le fait que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale

$\boxed{\text{Conclusion: } \forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \langle P_{n+1}, Q \rangle = 0}$

- Soit $Q \in \mathbb{R}_{m-2}[X]$.

$$\langle X.P_n, Q \rangle = \int_{-1}^1 t.P_n(t).Q(t)dt = \int_{-1}^1 P_n(t).t.Q(t)dt = \langle P_n, X.Q \rangle$$

rem: bien noter que l'on a cette formule ici grâce au produit scalaire que l'on a choisi! et qu'en particulier cela n'a rien à voir avec la bilinéarité du produit scalaire!! et l'on aurait ainsi aussi pu justifier que $\langle X.P_n, Q \rangle = \langle X, P_n.Q \rangle = \langle 1, X.P_n.Q \rangle$ même!

- Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ on a $X.Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

Et ainsi en reprenant un raisonnement similaire à ci-dessus, c'est-à-dire en écrivant $X.Q$ comme une combinaison linéaire de $(P_0, \dots, P_{n-1})$, on aboutit à $\langle P_n, X.Q \rangle = 0$

(b) Pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, on a

$$\langle P_{n+1}, Q \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle X.P_n, Q \rangle = 0,$$

donc par bilinéarité du produit scalaire

$$\langle P_{n+1} - X.P_n, Q \rangle = 0$$

rem: on a donc prouvé que $P_{n+1} - X.P_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]^\perp$

4. Relation de récurrence

- Commençons par remarquer que comme P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$, de coefficient dominant 1 et qui possède une parité, on a donc P_{n+1} de la forme

$$P_{n+1} = X^{n+1} + c_{n-1}X^{n-1} + \dots = X^{n+1} + R_{n+1}, \quad \deg(R_{n+1}) \leq n-1.$$

De même

$$P_n = X^n + R_n, \quad \deg(R_n) \leq n-2.$$

Ainsi

$$P_{n+1} - X.P_n = R_{n+1} - X.R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \text{car } \deg(R_{n+1}) \leq n-1. \text{ et } \deg(X.R_n) \leq n-1$$

Il existe donc $(c_0, \dots, c_{n-1})$ tel que

$$P_{n+1} - X.P_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k.$$

- Nous allons montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, c_k = 0$

Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$

On a $P_k \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et donc $\langle P_{n+1} - X.P_n, P_k \rangle = 0$ d'après Q3

Donc

$$0 = \langle P_{n+1} - X.P_n, P_k \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i, P_k \right\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \langle P_i, P_k \rangle$$

Or $\langle P_i, P_k \rangle = 0$ lorsque $k \neq i$, ainsi

$$0 = \langle P_{n+1} - X.P_n, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle = c_k \|P_k\|^2$$

et comme $P_k \neq 0$, on a donc $c_k = 0$!

On a bien montré que $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, c_k = 0}$

- On a donc tout simplement

$$P_{n+1} - XP_n = c_{n-1}P_{n-1}.$$

En notant $\lambda_n = c_{n-1} \in \mathbb{R}$, on a bien prouvé qu'il existe c $\lambda_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{m+1} = XP_m + \lambda_m P_{m-1}.$$

- On calcule:

$$P_2 - XP_1 = X^2 - \frac{1}{3} - X^2 = -\frac{1}{3}P_0, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{3},$$

$$P_3 - XP_2 = X^3 - \frac{3}{5}X - X\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{15}P_1, \quad \lambda_2 = -\frac{4}{15}.$$