PT* 25/26 - DM 6 - à rendre le mardi 6 janvier (au maximum)

Préambule de la Partie 1

1. Étudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$$

2. Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.
3. Comparer (sans les calculer)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}.$$

(On pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$.)

Partie I

1. Déterminer le domaine de définition D_h de la fonction h définie par

$$h(t) = \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

2. Soit X un réel positif. Calculer

$$\int_0^X h(t)\,dt$$

puis, à l'aide de ce résultat,

$$\int_0^X h(-t)\,dt.$$

3. Que vaut

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \big(h(t) + h(-t)\big)\,dt\ ?$$

4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}.$$

5. On considère la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

Montrer que $D_g = D_h$, puis déterminer une primitive G de g sur D_g.

6. Utiliser la primitive précédente pour calculer simplement, pour tout réel positif X,

$$\int_0^X g(-t)\,dt.$$

7. Déterminer

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \big(g(t) + g(-t)\big)\,dt.$$

8. Calculer, pour tout réel $t \geq 0$,

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t).$$

9. (a) Que vaut
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt \ ?$$
   (b) Déduire des questions précédentes et du Préambule la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}.$$
10. Calculer
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$$
On donnera la réponse en fonction de arctan(2) et ln(5).
11. On considère la série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}.$$
   (a) Déterminer son rayon de convergence R' et exprimer sa somme $D(x)$ pour $x \in]-R',R'[$.
   (b) Montrer que
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^4}$$
   peut s'exprimer comme la somme d'une série numérique.
   (c) Que vaut
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n.(4n+1)}.$$

Partie II (complétement indépendant du reste)

On considère la série entière $\sum_{\geqslant 0} b_n.x^{2n+1}$ où $b_n = \dfrac{4^n.(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

1. Vérifier que $\forall\ n \geqslant 0$, $(2n+3)b_{n+1} - 2(n+1)b_n = 0$.

2. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière

3. On note S la fonction somme de cette série entière.
Justifier que S vérifie sur $]-1,+1[$ le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} (1-x^2)y' - xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

4. Après avoir résolu cette équation différentielle, en déduire l'expression explicite de S sur $]-1,+1[$

5. On suppose dans cette question que $\sum b_n$ est une série convergente.
En considérant $S(1)$ et en rappelant avec précision le théorème utilisé, aboutir à une contradiction.

Préambule de la Partie 1

1.
   - La fonction $f_1 : t \mapsto \dfrac{1}{t^4+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
     On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ est intégrable en ∞,
     donc par comparaison, f_1 est intégrable sur $[0,+\infty[$
   - La fonction $f_2 : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^4+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
     On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en ∞,
     donc par comparaison, f_2 est intégrable sur $[0,+\infty[$

2.
   - Dans l'idéal, c'est le théorème 17 ou 18 à reproduire intégralement sur votre copie!
   - Sinon, il était judicieux d'au moins mentionné **les termes C^1, strictement monotone et bijectif**

3. Le changement de variable $u = \dfrac{1}{t} = \varphi(t)$ est C^1, strictement décroissant sur $]0,+\infty[$ et réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
   On a donc ici (avec $dx = \dfrac{-dt}{t^2}$ soit $dt = \dfrac{-dx}{x^2}$)

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4+1} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{-\dfrac{dx}{x^2}}{\dfrac{1}{x^4}+1} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

   On trouve que $\boxed{\text{les deux intégrales sont égales}}$

Partie I

1. $h(t)$ est définie lorsque son dénominateur est non nul.
   Or $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 = -2 < 0$ et donc le dénominateur ne s'annule jamais!
   $\boxed{\text{Conclusion}: D_h = \mathbb{R}}$

2. Soit $X \geqslant 0$

$$\int_0^X h(t)dt = \Big[\ln|t^2+1-\sqrt{2}.t|\Big]_0^X = \ln(X^2+1-\sqrt{2}.X)$$

   (*car le dénominateur* $t^2+1-\sqrt{2}.t > 0$ *d'après 1*)
   On calcule la deuxième intégrale à l'aide du changement de variable C^1, $\theta = -t$ (et donc $d\theta = -dt$)

$$\int_0^X h(-t)dt = -\int_0^{-X} h(\theta).d\theta = -\ln(X^2+1+\sqrt{2}.X)$$

   rem: on pouvait aussi faire un calcul direct

3. On a pour $X \geqslant 0$ et par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^X h(t)+h(-t)dt &= \ln(X^2+1-\sqrt{2}.X) - -\ln(X^2+1+\sqrt{2}.X)\\ &= \ln\frac{X^2+1-\sqrt{2}.X}{X^2+1+\sqrt{2}.X}\\ &= \ln\frac{1+1/X^2-\sqrt{2}/X}{1+1/X^2+\sqrt{2}/X}\end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair que $\boxed{\lim_{X\to+\infty}\int_0^X h(t)+h(-t)dt = 0}$ car la fonction ln est continue en 1

4. Notons ψ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int^t \varphi(u)du \\
&= \int^t \frac{2}{(\sqrt{2}(u-1/\sqrt{2}))^2+1}du \\
&= \int^{\sqrt{2}.t-1} \frac{\sqrt{2}}{w^2+1}dw \quad \textit{on pose } w=\sqrt{2}u-1 \qquad (dw=\sqrt{2}.du) \\
&= \sqrt{2}.\arctan(\sqrt{2}.t-1)+Cste
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Une primitive cherchée est par exemple } t\mapsto \sqrt{2}.\arctan(\sqrt{2}.t-1)}$

rem : je rappelle que $\int \varphi(t)dt$ N'est PAS une notation au programme

5.
   - Le discriminant du dénominateur ayant toujours $\Delta=-2<0$, on en déduit que $\boxed{D_g = D_h = \mathbb{R}}$
   - En développant $\varphi(t)$, on trouve

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2-\sqrt{2}.t+1} \qquad \text{et donc} \qquad g(t)=\sqrt{2}.\varphi(t)$$

$\boxed{\text{Une primitive } G \text{ de } g \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est donc } G : t\mapsto 2.\arctan(\sqrt{2}.t-1)}$

6. En procédant comme en Q2 avec le même changement de variable.
Soit $X\geqslant 0$

$$\int_0^X g(-t)dt = -\int_0^{-X} g(\theta)d.\theta = G(0)-G(-X) = 2.\arctan(-1)-2\arctan(-\sqrt{2}.X-1)$$

$$\boxed{\forall X\geqslant 0,\ \int_0^X g(-t)dt = 2\arctan(\sqrt{2}.X+1)-\frac{\pi}{2}}$$

7. Soit $X\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_0^X g(t)+g(-t)dt &= G(X)-G(0)+2\arctan(\sqrt{2}.X+1)-\frac{\pi}{2} \\
&= 2.\arctan(\sqrt{2}.X-1)-2.\arctan(-1)+2\arctan(\sqrt{2}.X+1)-\frac{\pi}{2} \\
&= 2.\arctan(\sqrt{2}.X-1)+2\arctan(\sqrt{2}.X+1)
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\lim_{X\to+\infty}\int_0^X (g(t)+g(-t)dt = \pi+\pi=2\pi}$

8. Soit $t\geqslant 0$
On a directement

$$h(t)+g(t) = \frac{2t}{t^2+1-\sqrt{2}.t} \qquad \text{et} \qquad h(-t)+g(-t) = \frac{-2t}{t^2+1+\sqrt{2}.t}$$

On va réduire au même dénominateur en remarquant déjà que

$$(t^2+1+\sqrt{2}.t)(t^2+1-\sqrt{2}.t) = ((t^2+1)+\sqrt{2}.t)((t^2+1)-\sqrt{2}.t) = (t^2+1)^2-2t^2 = t^4+1$$

rem: on comprend enfin pourquoi l'énoncé écrivait les monômes des dénominateurs de $g(t)$ et $h(t)$ dans un ordre inhabituel... pour faire apparaître une identité remarquable! et donc

$$\begin{aligned}
h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) &= 2t\left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{2}.t}-\frac{1}{t^2+1-\sqrt{2}.t}\right) \\
&= 2t\frac{2\sqrt{2}.t}{t^4+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \geqslant 0, h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = \dfrac{4\sqrt{2}.t^2}{t^4+1}}$

9. a) En utilisant Q3 et Q7

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \big(h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)\big)\,dt \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \big(h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)\big)\,dt \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \big(h(t)+h(-t)\big)\,dt + \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \big(g(t)+g(-t)\big)\,dt \right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}(0+2\pi) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

b) D'après le préambule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

10. Toujours avec Q3 et Q7

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{t^2}{t^4+1}\,dt &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^X \big(h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)\big)\,dt \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln\left(\frac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X} \right) + 2\arctan(\sqrt{2}X-1) + 2\arctan(\sqrt{2}X+1) \right).
\end{aligned}$$

En particulier, pour $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln\left(\frac{\frac{1}{2}+1-1}{\frac{1}{2}+1+1} \right) + 2\arctan(1-1) + 2\arctan(1+1) \right)$$

ce qui donne après simplifications $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \frac{2\arctan(2)-\ln(5)}{4\sqrt{2}}.}$

11. a) Plusieurs moyens de procéder possibles ; le plus simple étant de reconnaître une série géométrique de raison $q = -x^4$.
On sait alors que cette série converge **ssi** $|q| < 1$ **ssi** $|x| < 1$.

Ainsi $\boxed{R' = 1}$ et $\boxed{\forall x \in]-1,1[, D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n = \dfrac{1}{1+x^4}}$

b) **Le théorème de primitivation des séries entières** permet d'affirmer que **sur l'intervalle** $]-R', +R'[$ **les primitives de la fonction somme sont obtenues par intégration terme à terme**.
On a donc ici

$$\forall X \in]-1,+1[, \int_0^X D(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^X x^{4n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{4n+1}}{4n+1}$$

En particulier pour $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, cela donne

$$\boxed{\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n.(4n+1)}}$$

c) L'idée est de faire la question avec Q10, et de penser que le même changement de variable du préambule va nous donner quelque chose d'intéressant...

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t^2}{1+t^4}dt &= \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^4+1} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} h(t)+h(-t)dt + \int_0^{\sqrt{2}} h(t)+h(-t)dt \right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{(\sqrt{2})^2+1-\sqrt{2}.\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2+1+\sqrt{2}.\sqrt{2})} + +2\arctan(\sqrt{2}.\sqrt{2}-1) + 2\arctan(\sqrt{2}\sqrt{2}+1) \right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1}{5} + 2\arctan(1) + 2\arctan(3) \right)
\end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n.(4n+1)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + \frac{\ln 5}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}.\arctan(3)}$$

Partie II

1. Soit $n \geqslant 0$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n}.\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}.\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = 4.(n+1)^2.\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2(n+1)}{2n+3}$$

Ce qui prouve bien que $\boxed{\forall n \geqslant 0, (2n+3)b_{n+1} - 2(n+1)b_n = 0}$

2. On utilise bien sûr **la Règle de D'Alembert** et on trouve $\boxed{R=1}$

3.
   - On note $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n.x^{2n+1}$
   - D'après **le théorème de dérivation terme à terme des séries entières**, on sait que
     i) S est C^∞ sur $]-R,+R[$
     ii) Sur cet intervalle, S' est obtenue par dérivation terme à terme

   Ainsi

$$\forall x \in]-1,+1[, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1).b_n.x^{2n}$$

   Soit $x \in]-1,+1[$,

$$\begin{aligned}
(1-x^2).S'(x) - x.S(x) &= (1-x^2).\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).b_n.x^{2n} - x.\sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).b_n.x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).b_n.x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^{2n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).b_n.x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2).b_n.x^{2n+2}
\end{aligned}$$

Dans la seconde somme, on procède au glissement d'indice $n \longleftarrow n+1$

$$\begin{aligned}(1-x^2).S'(x) - x.S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).b_n.x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n.b_{n-1}.x^{2n} \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1).b_n.x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n.b_{n-1}.x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}((2n+1).b_n. - 2n.b_{n-1}).x^{2n}\end{aligned}$$

Vérifions, grâce à Q1, que $(2n+1).b_n. - 2n.b_{n-1} = 0$ pour $n \geqslant 1$
On pose $p = n-1$

$$(2n+1).b_n. - 2n.b_{n-1} = (2p+3).b_{p+1} - 2(p+1).b_p = 0 \qquad \text{d'après Q3}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } S \text{ vérifie sur }]-1,+1[\text{ l'équation proposée}}$

- De plus $S(0) = b_0 = 1$
  $\boxed{\text{Au final, } S \text{ vérifie sur }]-1,+1[\text{ le problème de Cauchy proposé}}$

4. - Sur $]-1,+1[$ l'équation équivaut à $y' + \dfrac{x}{x^2-1}.y = \dfrac{1}{1-x^2}$
   - La solution générale de l'équation homogène est $y_h : x \in]-1,+1[\mapsto K.e^{-1/2.\ln|x^2-1|} = \dfrac{K}{\sqrt{1-x^2}}$
   - On détermine une solution particulière de l'équation complète en utilisant **la méthode de la variation de la constante**, en posant $y_p : x \mapsto \dfrac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
     En remplaçant dans l'équation cela donne sur $]-1,+1[$

     $$\frac{K'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{soit} \quad K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

     On trouve ainsi $K(x) = \arcsin(x) + Cste$.
     Une solution particulière est $y_p : x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
   - La solution générale de l'équation complète est ainsi

     $$y : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{K}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{avec} \qquad K \in \mathbb{R}$$

   - La condition dans le problème de Cauchy considéré est $y(0) = 0$, ce qui fixe la valeur de K à zéro.
     Ainsi $y : x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est l'unique solution au problème de Cauchy.
   - Comme S vérifie aussi ce problème, par unicité on a donc $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, S(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}$

5. On suppose que $\sum b_n$ est une série numérique convergente.
   On sait dans ce cas que la fonction somme S est définie en 1.
   Je rappelle le théorème que je vais utilisé par la suite.

   théorème: La fonction somme S d'une série entière est continue sur son ensemble de définition

   Ainsi, ici, on a S qui est continue en 1, et donc en particulier

   $$S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

On aboutit bien à une contradiction car $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ (limite NON finie)

$\boxed{\text{Conclusion : } \sum b_n \text{ n'est pas convergente}}$

remarque: on montre qu'il n'y a pas convergence non plus pour $x = -1$, ce qui permet d'affirmer que la fonction somme S N'est définie QUE sur l'intervalle ouvert $]-1, +1[$