PT* 25/26 - DM 7 - à rendre le vendredi 23 janvier (au maximum)

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k).$$

On considère également les polynômes

$$L_p(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{3} \frac{X-k}{p-k} \quad \text{pour } p \in \{0,1,2,3\}.$$

1. (a) Vérifier que
$$L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3).$$
   (b) Écrire de même $L_1(X)$, $L_2(X)$ et $L_3(X)$.
   (c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p,k) \in [\![0,3]\!]^2$.
2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.
   (b) Vérifier que (L_0,L_1,L_2,L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q les coordonnées de Q dans la base (L_0,L_1,L_2,L_3).
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère désormais six réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite D d'équation $y = ax + b$.

Pour tout $p \in [\![0,3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p,y_p), N_p le point de D dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_pN_p]$.

On pose alors

$$\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2.$$

L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a,b)$ est minimale.

4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.
5. Vérifier que
$$\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2.$$
6. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3. On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0,3]\!]$.
   (b) Démontrer que
$$\delta(a,b) = \|Q-H\|^2 \quad \text{où } H(X) = aX + b.$$
   (c) En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0. On précisera le lien entre Q et H_0.

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P,Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.
On admet la propriété $\mathcal{P}$ suivante:
il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ formée de polynômes orthogonaux deux à deux et tels que :

i) P_n est un polynôme de degré n

ii) Le coefficient dominant de P_n vaut 1

1. (a) A l'aide de coefficients inconnus, déterminer P_0, P_1 et P_2
   (b) On donne $P_3 = X^3 - \dfrac{3}{5}X$.
   Vérifier qu'il est bien orthogonal aux trois polynômes que vous avez trouvés.
2. Dans cette question on souhaite montrer que P_n est paire [impaire] lorsque n est pair[impair].
   Pour cela, on pose $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$
   (a) Pour tout $n \neq m$, calculer $< Q_n,Q_m >$
   (b) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n
   (c) Conclure
3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On souhaite montrer dans cette question que $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
   (a) Pour $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, justifier que $< P_{n+1},Q >= 0$ et que $< XP_n,Q >=< P_n,XQ >= 0$
   (b) Conclure
4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geqslant 1$ il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel
   que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.
   Donner les valeurs de λ_1 et λ_2