PT* 2025-26

DS 3 (encore!)

durée 2h

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- Ce devoir est composé d'un exercice et de deux problèmes.

- Les résultats sont à $\boxed{\text{encadrer}}$ à la règle.

Exercice 1

On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

2. (a) Justifier qu'il existe un réel a tel que -1 et 1 soient valeurs propres de A.

   On supposera dorénavant que a prend cette valeur.

   (b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

3. Calculer A^2.

4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

5. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On rappelle que, par convention, si f désigne un endomorphisme de E alors $f^0 = id_E$

Partie 1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - f - 2.id_E = 0$

1. Montrer par analyse-synthèse que $\ker(f + id_E) \oplus \ker(f - 2id_E) = E$
2. Montrer que f est bijective

Partie 2

- On note $E = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$
- On considère $\boxed{\begin{array}{cccc} f : & E & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ a+c & a+b \end{pmatrix} \end{array}}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser une base et la dimension de E

2. Montrer que f est un endomorphisme de E

3. (a) Montrer que $f^2 - f - 2.id_E = 0$
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\ker(f + id_E)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\ker(f - 2id_E)$.
   (c) Justifier que la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ donne une base de E.
   Ecrire la matrice de f dans cette base.

4. On note dans la suite $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   On considère également les deux sous-espaces vectoriels $F_1 = \text{vect}(M_1)$ et $F_2 = \text{vect}(M_2, M_3)$
   (a) Justifier que $F_1 \oplus F_2 = E$
   (b) On note p la projection sur F_1 parallèlement à F_2
   et q la projection sur F_2 parallèlement à F_1
      i. Préciser à quoi est égal $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$.
      ii. Déterminer l'expression de $p(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix})$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
      iii. De la manière de votre choix, justifier l'existence de $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda.p + \mu.q$.
      Déterminer les valeurs de λ et μ
      iv. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ déterminer f^n en fonction de λ, μ, p ,q et n,
      puis en fonction de λ, μ, f, id_E et n

Exercice 1

1.
   - En développant par rapport à la dernière ligne, on a directement

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 0 & 3 \\ -3 & X-1 & 3 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1).\begin{vmatrix} X-4 & 0 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-4)$$

   Ainsi $\boxed{sp(B) = \{1,4\} \text{ avec } m(1) = 2 \text{ et } m(4) = 1}$

   - Comme 4 est valeur propre simple, on a $\boxed{\dim E_4(B) = 1}$ sans calcul.
   - Pour déterminer $\dim E_1(B)$ on peut déterminer $E_1(B)$ ou bien plus simplement, appliquer le théorème du rang à $B - 1.I_3$.

$$\dim E_1(B) = 3 - \mathrm{rg}(B - I_3) = 3 - \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 3 - 1 = 2$$

2. (a) Je propose deux solutions

   i) On calcule brutalement avec la règle de Sarrus $\chi_A(X)$ et l'on trouve

$$\chi_A(X) = X^3 - 2X^2 - (2+a)X + 2(a+2)$$

   On a alors le système

$$\begin{cases} \chi_A(1) & = 0 \\ \chi_A(-1) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+1 & = 0 \\ 3a+3 & = 0 \end{cases} \iff a = -1$$

   ii)
   - On a les équivalences

$$1 \in sp(A) \iff \det(1.I_3 - A) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \iff \cdots \iff a+1 = 0$$

   - On a les équivalences

$$-1 \in sp(A) \iff \det(-1.I_3 - A) = 0 \iff \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \iff \cdots \iff 3(a+1) = 0$$

   Dans les deux cas, on trouve bien $\boxed{\text{a=-1}}$

   (b) Inutile de calculer le polynôme caractéristique ici!
   On sait déjà que 1 et -1 sont des valeurs propres de A.
   On sait aussi que **la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égal à** $\mathrm{tr}(A)$!
   On en déduit que 2 est la dernière valeur propre!
   Ainsi $\boxed{sp(A) = \{-1,1,2\}}$.
   Comme A possède 3 valeurs propres distinctes, d'après **la condition suffisante de diagonalisabilité**, on peut dire que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

3. Le calcul donne $\boxed{A^2 = B}$

4. Une recherche classique de sep donne

$$E_{-1}(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad , \quad E_1(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad , \quad E_2(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad ,$$

   et donc on a par exemple la diagonalisation $A = P.D.P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. D'après Q3 et Q4,

$$B = A^2 = (P.D.P^{-1})^2 = P.D^2.P^{-1}$$

   Comme D^2 est une matrice diagonale, on a mis en évidence que B était semblable à une matrice diagonalisable, càd $\boxed{B \text{ diagonalisable}}$

Exercice 2

Partie 1

1. Par la méthode classique, on trouve bien que

$$\forall x \in E, \exists!(x_1,x_2) \in \ker(f + id_E) \times \ker(f - 2Id_E), x = x_1 + x_2$$

   On trouve en particulier $\boxed{x_1 = \frac{1}{3}(2x - f(x)) \text{ et } x_2 = \frac{1}{3}(f(x) + x)}$

2. On sait que $f^2 - f - 2.Id_E = 0$ soit encore $f^2 - f = 2.id_E$.
   Notons $g = \frac{1}{2}(f - id_E)$.
   On a
   - $f \circ g = f \circ \left(\frac{1}{2}(f - id_E)\right) = \frac{1}{2}(f \circ (f - id_E)) = \frac{1}{2}(f^2 - f) = \frac{1}{2}.2.id_E = id_E$
   - $g \circ f = \left(\frac{1}{2}(f - id_E)\right) \circ f = \frac{1}{2}((f - id_E) \circ f) = \frac{1}{2}(f^2 - f) = \frac{1}{2}.2.id_E = id_E$

   Ceci permet d'affirmer que $\boxed{f \text{ est bijective et que } f^{-1} = \frac{1}{2}(f - id_E)}$

Partie 2

1. On a

$$\begin{aligned} E &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Notons $E_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad E_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

On vient de prouver que $\boxed{(E_1,E_2,E_3) \text{ est une famille génératrice de } E}$.

Nous allons maintenant prouver que c'est une famille libre.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 = 0$

Ceci signifie que l'on a $\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} = 0$

Or une matrice est la matrice nulle ssi tous ses coefficients sont nuls, ce qui permet de dire que $a = b = c = 0$

Conclusion $\boxed{E \text{ est un sev de dimension 3 dont une base est } (E_1,E_2,E_3)}$

2. Comme par définition, on a $f : E \longrightarrow E$.
Montrer que f est un endomorphisme de E revient à montrer que f est une application linéaire.
Soit $M_1 = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\b_1 & c_1\end{pmatrix} \in E, M_2 = \begin{pmatrix}a_2 & b_2\\b_2 & c_2\end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Notons $M_3 = \lambda.M_1 + M_2 = \begin{pmatrix}a_3 & b_3\\b_3 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda.a_1 + a_2 & \lambda.b_1 + b_2\\\lambda.b_1 + b_2 & \lambda.c_1 + c_2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
f(\lambda.M_1 + M_2) = f(M_3) &= \begin{pmatrix}b_3 + c_3 & a_3 + c_3\\a_3 + c_3 & a_3 + b_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\lambda.b_1 + b_2 + \lambda.c_1 + c_2 & \lambda.a_1 + a_2 + \lambda.c_1 + c_2\\\lambda.a_1 + a_2 + \lambda.c_1 + c_2 & \lambda.a_1 + a_2 + \lambda.b_1 + b_2\end{pmatrix}\\
&= \lambda.\begin{pmatrix}b_1 + c_1 & a_1 + c_1\\a_1 + c_1 & a_1 + b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2 + c_2 & a_2 + c_2\\a_2 + c_2 & a_2 + b_2\end{pmatrix}\\
&= \lambda.f(M_1) + f(M_2)
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}$ un élément de E

- On a $f(\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b + c & a + c\\a + c & a + b\end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned}
f^2(\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}) &= f(\begin{pmatrix}b + c & a + c\\a + c & a + b\end{pmatrix})\\
&= \begin{pmatrix}(a+c) + (a+b) & (b+c) + (a+b)\\(b+c) + (a+b) & (b+c) + (a+c)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2a + b + c & a + 2b + c\\a + 2b + c & a + b + 2c\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}b + c & a + c\\a + c & a + b\end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}\\
&= f(\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}) + 2.\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}\\
&= (f + 2.id_E)(\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix})
\end{aligned}$$

On a montré que pour tout élément $x \in E$ on a $f^2(x) = (f + 2id_E)(x)$.
Ce qui permet d'affirmer que $f^2 = f + 2id_E$, soit encore $\boxed{f^2 - f - 2id_E = 0}$

(b) - Déterminons $\ker(f + id_E)$.
Soit $\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} \in E$.
On a les équivalences suivantes

$$\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} \in \ker(f + id_E) \iff f(\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}) + \begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}a + b + c & a + b + c\\a + b + c & a + b + c\end{pmatrix} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\ker(f + id_E) &= \{\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | a + b + c = 0\} = \{\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | c = -a - b\}\\
&= \{\begin{pmatrix}a & b\\b & -a - b\end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a.\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \text{vect}(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix})
\end{aligned}$$

Ainsi $(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix})$ est une famille génératrice de $\ker(f + id_E)$.
Comme de plus ces deux matrices ne sont pas proportionnelles, on peut affirmer que c'est une famille libre.
Conclusion: $\boxed{\mathcal{B}_1 = (\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}) \text{ est une base de } \ker(f + id_E)}$

- Un raisonnement similaire prouve que
$\boxed{\ker(f - 2.id_E) \text{ est une droite vectorielle dont une base est } \mathcal{B}_2 = (\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix})}$

(c) Comme $f^2 - f - 2.id_E = 0$, on peut d'après la partie 1, question 1, affirmer que $\ker(f + id_E) \oplus \ker(f - 2id_E) = E$.
On sait alors par théorème que la concaténation d'une base de $\ker(f + id_E)$ et d'une base de $\ker(f - 2id_E)$ donne une base de E.
Comme $f(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad f(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ et $f(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}) = 2.\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$,
on en déduit que dans la base $(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix})$
la matrice de f est $\boxed{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$

4. (a) Le moyen le plus rapide ici était tout simplement de reconnaitre que $F_1 = \ker(f - 2.id_E)$ et que $F_2 = \ker(f + id_E)$! Puis d'appliquer Partie 1, Q1

(b) i. $\boxed{p + q = id_E \text{ et } p \circ q = q \circ p = 0}$

ii. On sait que $\forall x \in E, \exists!\,(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$
Et l'on a vu à la question 1 de la partie 1 que $x_1 = \dfrac{1}{3}(2x - f(x))$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}(f(x) + x)$
On a donc ici pour une matrice $M \in E, p(M) = \dfrac{1}{3}(f(M) + M)$ ce qui donne

$$\boxed{p(\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}) = \frac{a + b + c}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \frac{a + b + c}{3}.M_1}$$

remarque: si l'on n'avait pas traité la question 1 de la partie 1:

- *Comme $F_1 \oplus F_2 = E$, on sait que*

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E, \exists!\,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3, M = \underbrace{\lambda_1.M_1}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda_2.M_2 + \lambda_3.M_3}_{\in F_2}$$

Il s'agit donc de déterminer λ_1 tout simplement en considérant le système

$$\begin{cases} a & = \lambda_1 + \lambda_3 \\ b & = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ c & = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$$

qui donne directement $\lambda_1 = \dfrac{a+b+c}{3}$ et $p(M) = \dfrac{a+b+c}{3}.M_1$

iii. Notons $\mathcal{C} = (M_1,M_2,M_3)$
Ecrivons les matrices de f, p et q dans la base $\mathcal{C}$.
Elles sont toutes diagonales, et très simples à écrire!

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = 2.\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) - \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(2p - q)$,
on en déduit que $\boxed{f = 2.p - q}$

iv. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme p et q commutent, on va pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton

$$f^n = (\lambda.p + \mu.q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .\lambda^k.\mu^{n-k}.p^k \circ q^{n-k}$$

- pour $k = 0$, on a $p^k \circ q^{n-k} = id \circ q^n = id \circ q = q$ car q est un projecteur
- pour $k = n$, on a $p^k \circ q^{n-k} = p^n \circ id = p \circ id = p$ car p est un projecteur
- pour $k \geqslant 1$ ou $n - k \geqslant 1$ on a $p^k \circ q^{n-k} = p \circ q = 0$

On obtient donc $f^n = \lambda^n.p + \mu^n.q$

On remarque que cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

Conclusion: $\boxed{\forall n \geqslant 0, f^n = \lambda^n.p + \mu^n.q = 2^n.p + (-1)^n.q}$

On sait que $\begin{cases} f & = 2p - q \\ id & = p + q \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} p & = \frac{1}{3}(id_E + f) \\ q & = \frac{1}{3}(2id_E - f) \end{cases}$
Ce qui donne au final en remplaçant

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, f^n = \frac{2^n}{3}(id_E + f) + \frac{(-1)^n}{3}(2id_E - f) = \frac{2^n + 2.(-1)^n}{3}.id_E + \frac{2^n - (-1)^n}{3}.f}$$