PT* 2025-26
DS 3 du 1 décembre 2025
durée 4h

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- Ce devoir est composé d'un exercice et de deux problèmes.

- Les résultats sont à $\boxed{\text{encadrés}}$ à la règle.

EXERCICE

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, autre que l'endomorphisme nul, tel que $f^3 + f = 0$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3$
2. (a) Montrer que si λ est valeur propre de f alors $\lambda^3 + \lambda = 0$.
   (b) Déterminer si f est diagonalisable.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f^2 + id)$
   (b) Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PROBLEME 1

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}$, on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a-2c & a-2c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2c-b & 2c \end{pmatrix}$

On note $E = \{M(a,b,c) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

Partie 1 : A propos d'une matrice particulière

Dans cette partie, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et on note $P(X) = X^2 - 5X + 4$

1. Montrer que $A \in E$
2. Montrer que $P(A) = 0_3$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Après avoir rappelé l'énoncé du théorème de la division euclidienne, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P
4. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (on donnera les neuf coefficients de cette matrice)

Partie 2 : Des premiers résultats concernant la matrice $M(a,b,c)$

Dans cette partie, (a,b,c) est un triplet de réel fixé.

1. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante(CNS) portant sur a, b et c pour que la matrice $M(a,b,c)$ soit inversible.
   (on ne demande pas le calcul de l'inverse)

   (b) Parmi les propositions ci-dessous, indiquer celle(s) équivalente(s) à la CNS trouvée ci-dessus

   i) $a.b.c \neq 0$ *ii)* $a+b+c \neq 0$ *iii)* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

   iv) $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ *v)* $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$

2. On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $M(a,b,c).C_1$. Qu'en déduit-on sur le vecteur C_1?

   (b) Calculer $M(a,b,c).C_2$ et $M(a,b,c).C_3$. Faire les conclusions qui s'imposent.

   (c) Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $M(a,b,c) = P.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}.P^{-1}$

$\boxed{\text{Partie 3: Etude de la structure de } E}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension
2. En utilisant la question 2c) de la partie 2, montrer que E est stable pour le produit matriciel (càd que $\forall (M_1,M_2) \in E^2, M_1.M_2 \in E$)
   Le produit matriciel est-il commutatif sur E?
3. Montrer que E est stable par passage à l'inverse(càd que si $M(a,b,c) \in E$ est une matrice inversible alors son inverse est encore dans E)
   (on pourra utiliser la partie 2, Q2c)

$\boxed{\text{Partie 4: Etude d'un endomorphisme de } E}$

Dans cette partie on considère l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & E \\ & M(a,b,c) & \longmapsto & M(a,-a,a+b+c) \end{array}}$

1. L'application f est-elle injective? surjective? bijective? Justifier!
2. Montrer que f est une projection et déterminer ses éléments géométriques

3. Déterminer $(id_E + f)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
   L'égalité trouvée est-elle encore vraie pour $n \in \mathbb{Z}$?

PROBLEME 2

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n

- On note id l'endomorphisme identité de E
- On convient que $f^0 = id$ et que $f^1 = f$, et pour tout $k \geqslant 2$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$
- Soit f un endomorphisme de E.
  On dit que f est cyclique lorsqu'il existe un vecteur $\vec{a}$ de E tel que $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ soit une base de E
  Par exemple, si $n=2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ de E tel que $(\vec{a},f(\vec{a}))$ soit une base de E.
  De même, si $n=3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ de E tel que $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}))$ soit une base de E.

I. **Etude d'exemples**

A. Dans cette section,
   on note $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{llll} \alpha: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (4x-6y,x-y) \end{array}}$.

   1) Ecrire la matrice de α dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note A cette matrice.
   2) On choisit $\vec{a} = (2,3)$
      Calculer $\alpha(\vec{a})$ et montrer que α est cyclique.

3) Ecrire la matrice A' de α dans la base $(\vec{a},\alpha(\vec{a}))$
4) Montrer que le réel 2 est une valeur propre de α
5) Déterminer un vecteur $\vec{b}$ non nul de $\mathbb{R}^2$ tel que $(\vec{b},\alpha(\vec{b}))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$

B. Dans cette section,
on note $E = \mathbb{R}^3$ et considére β l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice B ci-dessous, c'est à dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de β
2) Déterminer les éléments propres de β
3) Après avoir rappelé avec soin le théorème utilisé, justifier que β est diagonalisable puis donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β est du type $D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où p et q sont des réels que l'on précisera
4) Déterminer deux réels (λ,μ) tels que $\beta^2 = \lambda.\beta + \mu.id_E$
5) En déduire que β n'est pas cyclique

C. Dans cette section, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.
3) En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors

$$\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.$$

4) Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

II. Des résultats plus théoriques

On considère E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.
On suppose que f est cyclique, et on note $\vec{a}$ un vecteur pour lequel $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est une base de E.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f) = n-1$ ou n
2) Justifier que la famille $\mathcal{F} = (f^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une famille libre.
3) On suppose dans cette question que $f^n(\vec{a}) = \vec{0}$
   a) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?
   b) Montrer que $f^n = 0$
   c) Montrer que 0 est la seule valeur propre de f.
   d) f est-il diagonalisable? Justifier

$\boxed{\text{CORRECTION DU PROBLEME 1}}$

$\boxed{\text{Partie 1}}$

1. On constate que $A = M(1,1,2)$ donc $A \in E$
2. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

   Donc

   $P(A) = A^2 - 5.A + 4.I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 5.\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$
3. - **Rappel du théorème de la division euclidienne:**
     Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
     Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que $A = B.Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$

   - Par application de ce théorème, on sait qu'il existe un unique $(Q_n,a_n,b_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^2$ tel que $X^n = P(X).Q(x) + \underbrace{a_n.X + b_n}_{=R_n(X)}$

   - Comme 1 et 4 sont les racines de P, on a $\begin{cases} 1^n = 0.Q_n(1) + a_n + b_n \\ 4^n = 0.Q_n(4) + 4.a_n + b_n \end{cases}$

     La résolution de ce système donne $\begin{cases} a_n & = \dfrac{4^n - 1}{3} \\ b_n & = \dfrac{4 - 4^n}{3} \end{cases}$

     $\boxed{\text{Conclusion: } R_n(X) = \dfrac{4^n - 1}{3}.X + \dfrac{4 - 4^n}{3}}$
4. On a $A^n = P(A).Q_n(A) + R_n(A) = a_n.A + b_n.I_3 = \begin{pmatrix} a_n + b_n & -3a_n & -3a_n \\ 0 & a_n + b_n & 0 \\ 0 & 3a_n & 4a_n + b_n \end{pmatrix}$

   ce qui donne $\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 4^n & 1 - 4^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{Partie 2}}$

1. (a) On sait qu'une matrice est inversible ssi son déterminant est non nul, or ici

   $$\det(M(a,b,c)) = \begin{vmatrix} a & a - 2c & a - 2c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2c - b & 2c \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2c - b & 2c \end{vmatrix} = 2.a.b.c = 0$$

   Conclusion $\boxed{M(a,b,c) \text{ inversible ssi } a.b.c \neq 0}$

   (b) $\boxed{M(a,b,c) \text{ inversible ssi i) ssi iv)}}$
2. (a) $M(a,b,c).C_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a.C_1$

   Comme $C_1 \neq 0$, on en déduit que $\boxed{C_1 \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à la vp } a}$

(b) $M(a,b,c).C_2 = \begin{pmatrix} -2c \\ 0 \\ 2c \end{pmatrix} = 2c.C_2$

Comme $C_2 \neq 0$, on en déduit que $\boxed{C_2 \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à la vp } 2c}$

$M(a,b,c).C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} = b.C_3$

Comme $C_3 \neq 0$, on en déduit que $\boxed{C_3 \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à la vp } b}$

3. • La famille (C_1,C_3,C_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

• (C_1,C_2,C_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

On sait alors qu'en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

on aura P qui sera inversible et $P^{-1}.M(a,b,c).P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}$.

Ce qui équivaut bien à $M(a,b,c) = P.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}.P^{-1}$

$\boxed{\text{Partie 3}}$

1. • E est clairement inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

• La méthode la plus simple est d'écrire

$$\begin{aligned} E &= \{ \begin{pmatrix} a & a-2c & a-2c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2c-b & 2c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \{ a.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_1} + b.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_2} + c.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=A_3} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \text{vect}(A_1,A_2,A_3) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que E est un espace vectoriel, de famille génératrice (A_1,A_2,A_3)

• Montrons que (A_1,A_2,A_3) est une famille libre.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.A_1 + b.A_2 + c.A_3 = 0$

On a donc $\begin{pmatrix} a & a-2c & a-2c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2c-b & 2c \end{pmatrix} = O_3$

ce qui donne directement $a = b = c = 0$

• Conclusion $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel de base } (A_1,A_2,A_3) \text{ donc } \dim E = 3}$

2. Soit $(M_1,M_2) \in E^3$.
Il existe $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que $M_1 = M(a_1,b_1,c_1)$ et $M_2 = M(a_2,b_2,c_2)$

On a d'après Q2c)

$$\begin{aligned}
M_1.M_2 &= \left(P.\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 \end{pmatrix}.P^{-1}\right).\left(P.\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 \end{pmatrix}.P^{-1}\right) \\
&= P.\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 \end{pmatrix}.(\underbrace{P^{-1}.P}_{=I_3}).\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 \end{pmatrix}.P^{-1} \\
&= P.(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 \end{pmatrix}).P^{-1} \\
&= P.\begin{pmatrix} a_1.a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1.b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4.c_1.c_2 \end{pmatrix}.P^{-1} \\
&= M(a_1.a_2,b_1.b_2,2.c_1.c_2)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $M_1.M_2 \in E$

On constate que **sur E le produit matriciel est commutatif** car

$M(a_1,b_1,c_1).M(a_2,b_2,c_2) = M(a_1.a_2,b_1.b_2,2.c_1.c_2) = M(a_2.a_1,b_2.b_1,2.c_2.c_1) = M(a_2,b_2,c_2).M(a_1,b_1,c_1)$

(on a utilisé le fait que **dans $\mathbb{R}$ la multiplication est commutative**,
et donc $a_1.a_2 = a_2.a_1, \quad b_1.b_2 = b_2.b_1, \quad c_1.c_2 = c_2.c_1$)

3. Soit $M(a,b,c) \in E$ une matrice inversible.
On sait donc que a, b et c sont trois réels non nuls
On remarque d'après la formule précédente que

$$M(a,b,c).M(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{4c}) = M(\frac{a}{a},\frac{b}{b},2.c.\frac{2c}{4c}) = M(1,1,\frac{1}{2}) = I_3$$

Ceci prouve que $M(a,b,c)$ est inversible à gauche, donc inversible(mais ça on le savait déjà!), et que $\boxed{\text{son inverse est } M(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{4c}) \in E}$

$\boxed{\text{Partie 4}}$

1. • Comme E est un ev de dimension finie, on sait que l'on a les équivalences

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff \ker(f) = \{0\} \iff \ldots$$

• Considérons $M(0,1,-1)$ (qui n'est pas la matrice nulle.
On a $f(M(0,1,-1)) = M(0,-0,0+1+(-1)) = M(0,0,0) = O_3$
Ceci prouve que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul
et donc que $\boxed{f \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective!}}$

2. Nous allons montrer que $f \circ f = f$.
Soit $M(a,b,c) \in E$
On a

$(f \circ f)(M(a,b,c)) = f(f(M(a,b,c)) = f(M(a,-a,a+b+c)) = M(a,-a,a+(-a)+a+b+c) = M(a,-a,a+b+c)$

On a bien montré que $\forall M_1 \in E, (f \circ f)(M_1) = f(M_1)$
Conclusion: $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$

• D'après le cours, on sait alors que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$, et que f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$

- On a $M(a,b,c) = O_3 \iff (a = 0 \text{ et } a+b+c = 0) \iff (a = 0 \text{ et } c = -b)$ donc

$$\ker(f) = \{M(0,b,-b) \,|, b \in \mathbb{R}\} = \{b.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \,|\, b \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix})$$

-

$$\begin{aligned} im(f) &= \{M(a,-a,a+b+c) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a.M(1,-1,1) + (b+c).M(0,0,1) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{vect}(M(1,-1,1), M(0,1,1)\} \\ &= \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

3. Comme id et f commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton

$$(id+f)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} .id^{n-1} \circ f^p = \binom{n}{0} .id + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} .f^p$$

Or pour $p \geqslant 1$ on a $f^p = f$ d'une part et $\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} = -1 + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = -1 + (1+1)^n = 2^n - 1$
Ainsi $(id+f)^n = id + (2^n - 1).f$
Pour vérifier si la relation est encore vraie pour $n < 0$,
il suffit de vérifier si $(id + (2^n - 1).f) \circ (id + (2^{-n} - 1).f) = id$
Lorsque l'on développe, on trouve que c'est bien le cas!

CORRECTION DU PROBLEME 2

I. A. 1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\alpha(\vec{a}) = (-10,-1)$

Il suffit de vérifier que $(\vec{a},\alpha(\vec{a}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ ce qui est bien le cas car $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$

3) $\alpha^2(\vec{a}) = \alpha((-10,-1)) = (-34,-9)$

On a les équivalences

$$\alpha^2(\vec{a}) = x\vec{a} + y\alpha(\vec{a}) \iff (-34,-9) = x(2,3) + y(-10,-1) \iff \begin{cases} 2x - 10y & = -34 \\ 3x - y & = -9 \end{cases}$$

La résolution donne $\boxed{x = -2 \text{ et } y = 3}$

4) $A' = \text{Mat}_{(\vec{a},\alpha(\vec{a}))}(\alpha) = \text{Mat}_{(\vec{a},\alpha(\vec{a}))}(\alpha(\vec{a}),\alpha^2(\vec{a})) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d'après la question ci-dessus

5) $\chi_\alpha(X) = \det(Xid_E - f) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-4 & 6 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$

$\boxed{\text{Le spectre de } \alpha \text{ est } \{1,2\}}$, donc 2 est bien une valeur propre de α

6) Soit $\vec{b}$ un vecteur propre de α associé la la valeur propre 2.
On a donc $\vec{b} \neq \vec{0}$ et $(\vec{b},\alpha(\vec{b})) = (\vec{b},2\vec{b})$ qui est une famille liée, donc n'est pas une base de E!
Un calcul classique de recherche de sep donne $E_2(\alpha) = \text{vect}((3,1))$, donc $\boxed{\vec{b} = (3,1)}$ répond à la question posée

B. 1) $\chi_\beta(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 0 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-4 & 6 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1)$

2) Il suffit de dire que $\det\beta = \det(B) = 4 \neq 0$
En effet $\chi_\beta(0) = \det(0.id - \beta) = \det(-\beta) = (-1)^3\det(\beta) = -\det(\beta)$
D'où $\det(\beta) = -\chi_\beta(0) = -(-4) = 4$
remarque: on pouvait bien sûr aussi directement calculer $\det B$

3)
- Les racines de χ_β étant les valeurs propres de β, on a $sp(\beta) = \{1,2\}$,
plus précisément 2 est valeur propre double et 1 est valeur propre simple
- Déterminons $E_2(\beta)$

  On résout $\beta((x,y,z)) = 2(x,y,z)$ qui équivaut au système $\begin{cases} 0 & = 0 \\ 2y - 6z & = 0 \\ y - 3z & 0 \end{cases}$

  D'où $E_2(\beta) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 3z\} = \{(x,3z,z) | (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((1,0,0),(0,3,1))$
  Comme les deux vecteurs ci-dessus ne sont pas colinéaires,
  on peut affirmer que $\dim E_2(\beta) = 2$
- Par théorème, comme 1 est valeur propre simple, on peut affirmer que $\dim E_1(\beta) = 1$
- Par un calcul classique, on trouve $E_1(\beta) = \text{vect}((0,2,1))$

4)
- On commence par rappeler le théorème comme demandé.

  théorème : condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité
  Soit f un endomorphisme de E. On note $sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ son spectre.
  Alors, il y a équivalence entre :

  i.) *f est diagonalisable*
  ii.) *le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute vp λ de f,* $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
  iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$
  iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$

- Ici, comme $\dim E_2(\beta) + \dim E_1(\beta) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on peut affirmer que β est diagonalisable
- En concaténant une base de $E_2(\beta)$ et une base de $E_1(\beta)$ on obtiendra une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β sera $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $\boxed{((1,0,0),(0,3,1),(0,2,1)) \text{ est un exemple de telle base}}$

5) On a

$$(D - 2I_3).(D - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

On vient de prouver que

$$(D - 2I_3).(D - I_3) = D^2 - 3D + 2I_3 = 0$$

on peut donc affirmer que $\beta^2 = 3\beta - 2id_E$

6) Soit $\vec{a}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
La famille $(\vec{a},\beta(\vec{a}),\beta^2(\vec{a}))$ est toujours une famille liée! En effet, $\beta^2\vec{(a)} - 3\beta(\vec{a}) + 2\vec{a} = \vec{0}$ d'après la question ci-dessus.

Il n'existe donc pas de vecteur $\vec{a} \in E$ tel que soit une base de $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\beta \text{ n'est pas cyclique!}}$

C. 1) i) Montrons que Δ est une application linéaire.
Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Notons $R = \lambda.P + Q$

$$\begin{aligned}\Delta(R) &= R(X+1) - R(X)\\ &= (\lambda.P + Q)(X+1) - (\lambda.P+Q)(X)\\ &= \lambda.P(X+1) + Q(X+1) - \lambda.P(X) - Q(X)\\ &= \lambda.(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X)\\ &= \lambda.\Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

ii) Montrons que $\operatorname{Im}\Delta \subset \mathbb{R}_n[X]$
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
On sait alors que $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On en déduit que $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ (car $\mathbb{R}_n[X]$ est un sev)

2) • $\Delta(X^0) = (X+1)^0 - X^0 = 1 - 1 = 0$
• Soit $k \in [\![1,n]\!]$.
Avec le binôme de Newton, cela donne

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i.1^{k-i} - X^K = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

Sous cette forme on remarque que $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$ lorsque $k \in [\![1,n]\!]$.

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant.
Notons alors $d = \deg(P) \geqslant 1$.
Il existe $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.X^k$ avec $a_d \neq 0$
Par linéarité de Δ cela donne

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k.\Delta(X^k) = \sum_{k=1}^{d} a_k.\Delta(X^k) \qquad \text{car } \Delta(X^0) = 0$$

Comme on a vu à la question précédente que $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$ lorsque $k \in [\![1,n]\!]$, et que $a_d \neq 0$, on en déduit que

$$\deg(\Delta(P)) = \deg(\Delta(X^d)) = d - 1 = \deg(P) - 1$$

4) Prenons pour P n'importe quel polynôme de degré n.(Par exemple $P = X^n$ pour fixer les idées).
D'après ce qui précède, on peut dire que $\mathcal{F} = (P,\Delta(P),\Delta^2(P),\ldots,\Delta^{n-1}(P))$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, et c'est donc une famille libre!
Et comme $card(\mathcal{F}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est cyclique.}}$

II. 1) On sait par théorème que l'image d'une base par f est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, en particulier, ici, avec la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ on peut dire que

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a})),f^n(\vec{a}))$$

On sait que $(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est une famille libre car c'est un sous-famille de la famille libre $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$,
Comme le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace, on en déduit ainsi que

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}\, f) \geqslant card(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a})) = n-1$$

D'autre part, comme $\text{Im}\, f \subset E$, on a toujours $\text{rg}(f) \leqslant \dim E = n$
$\boxed{\text{Conclusion: on a bien } \text{rg}(f) = n \text{ ou } n-1}$

rem: Il était aussi possible de raisonner avec matriciellement: on écrit la matrice de f dans la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$.
Cela donne

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & c_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & c_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & c_n \end{pmatrix} \text{ avec } (c_1,\ldots,c_n) \in \mathbb{C}^n$$

Il est clair que les $n-1$ premières colonnes forment une famille libre, donc le rang de cette matrice vaut $n-1$ ou n.
Et comme le rang d'un endomorphisme est égal au rang de n'importe quelle matrice qui lui est associé ! Cqfd!

2) Soient $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_0.id_0 + \lambda_1.f + \cdots + \lambda_{n-1}.f^{n-1} = 0$.
En calculant l'image du vecteur $\vec{a}$ cela donne

$$\lambda_0.\vec{a} + \lambda_1.f(\vec{a}) + \cdots + \lambda_{n-1}.f^(\vec{a}) = 0$$

Or on sait que $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est une base de $\mathbb{R}$, càd une famile libre!
Ce qui permet d'affirmer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.
On a bien montré que $\boxed{\mathcal{F} = (f^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \text{ est libre}}$

3) a) Comme $f^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$ (car fait partie d'une base), et que $f(f^{n-1}(\vec{a})) = \vec{0}$, on sait déjà que $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, et donc $\dim\ker(f) \geqslant 1$.
Le théorème du rang appliqué à f donne $\text{rg}(f) + \dim\ker(f) = n$
Mais comme on sait aussi que $\dim\ker(f) \geqslant 1$ et $\text{rg}(f) \geqslant n-1$,
on en déduit que forcément $\dim\ker(f) = 1$ et $\text{rg}(f) = n-1$

Maintenant que l'on sait que $\ker(f)$ est une droite vectorielle et que $f^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$ appartient à ce noyau, on peut écrire que $\boxed{\ker(f) = \text{vect}(f^{n-1}(\vec{a}))}$
L'image de la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ par f est une famille génératrice de $\text{Im}\, f$, ainsi $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}),f^n(\vec{a}))$ mais comme $f^n(\vec{a}) = \vec{0}$,
on peut écrire $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$

Or cette famille génératrice possède $n-1$ éléments et $\dim \operatorname{Im} f = n-1$!
On en déduit qu' $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Im} f \text{ est } (f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}))}$

Les deux sev ne sont pas en somme directe car $f^{n-1}(\vec{a}) \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ et $f^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$

b) f^n est l'endomorphisme nul ssi f^n envoie tous les éléments d'une base de E sur $\vec{0}$.
Considérons la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n) = (\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}))$

On a pour tout $i \in [\![1,n]\!], \vec{e}_i = f^{i-1}(\vec{a})$ et donc

$$f^n(\vec{e}_i) = f^n(f^{i-1}(\vec{a})) = f^{n+i-1}(\vec{a}) = f^{i-1}(f^n(\vec{a})) = f^{i-1}(\vec{0}) = \vec{0}$$

ceci prouve que $f^n = 0$

c) si $f^n(\vec{a}) = \vec{0}$ la matrice de f dans la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) Un calcul simple donne $\chi_f(X) = X^n$. Ainsi f possède une unique vp 0 et $m(0) = n$
Le sous-espace propre associé à 0 n'est rien d'autre que $\ker(f)$, et l'on a déjà vu que $\dim \ker f = 1 \neq n$.

On peut affirmer, grâce au théorème cité plus haut, que f n'est pas diagonalisable!

rem: à noter que comme $f^n = 0$, il est facile de montrer que la seule valeur propre possible est 0 aussi

CORRECTION DE L'EXERCICE

1. Nous allons montrer que $\begin{cases} \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f) = \{0\} \\ \dim \operatorname{Im}(f) + \dim \ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 \end{cases}$

   i) On sait déjà que $\{0\} \subset \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, car l'intersection de 2 sev est encore un sev donc contient le vecteur nul

   ii) Montrons l'inclusion réciproque.
   Soit $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f)$.
   On a donc $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
   En composant par f cela donne $f(x) = f^2(y)$, et donc $f^2(y) = 0$
   En composant de nouveau par f, on obtient $f^3(y) = 0$.
   Or $f^3 = -f$, et donc $-f(y) = 0$, càd $x = 0$.
   On a bien montré que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0\}$,
   et donc avec l'inclusion précédente que $\boxed{\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}}$

   iii) Le théorème du rang appliqué à f donne directement $\dim \operatorname{Im}(f) + \dim \ker(f) = \dim \mathbb{R}^3$

2. (a) Soit λ une vp de f.
   Soit x un vecteur propre de f associé à $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On sait que $x \neq 0$ et que $f(x) = \lambda x$
   On a alors aussi $f^3(x) = \lambda^3 x$.
   Comme $f^3 + f = 0$, on a $f^3(x) + f(x) = 0$ càd $\lambda^3 x + \lambda x = 0$.
   Ainsi $(\lambda^3 + \lambda)x = 0$

Comme $x \neq 0$, on a $\lambda^3 + \lambda = 0$.
Comme $\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$, la seule racine réelle de l'équation $\lambda^3 + \lambda = 0$ est donc $\lambda = 0$.
A ce stade, on a montré que $\boxed{\text{la seule valeur propre possible de } f \text{ est } \lambda = 0}$

(b) Comme $f \neq 0$, on a $\mathrm{rg}(f) \geqslant 1$, et donc par application du théorème du rang, $\dim \ker f \leqslant 2$.
Or d'après le théorème de la CNS de diagonalisabilité, comme 0 est la seule valeur propre possible, on sait que l'on a l'équivalence

$$f \text{ diagonalisable ssi } \dim E_0(f) = 3$$

.
Or on a $E_0(f) = \ker(f)$ et l'on vient de voir que $\dim E_0(f) \neq 3$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ N'est PAS diagonalisable}}$

3. (a) Nous allons montrer par double inclusion que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f^2 + id)$
   - Soit $x \in \mathrm{Im}\, f$.
     il existe donc $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
     On a donc

     $$(f^2 + id)(x) = (f^2 + id)(f(y)) = (f^3 + f)(y) = 0 \qquad \textit{car } f^3 + f = 0$$

     ce qui prouve que $x \in \ker(f^2 + id)$.
     On a montré que $\boxed{\mathrm{Im}\, f \subset \ker(f^2 + id)}$
   - soit $x \in \ker(f^2 + id)$.
     On a donc $(f^2 + id)(x) = 0$ càd $f^2(x) + x = 0$.
     On peut donc écrire

     $$x = -f^2(x) = f(-f(x))$$

     et cette écriture prouve que $x \in \mathrm{Im}\, f$.
     On a montré que $\boxed{\ker(f^2 + id) \subset \mathrm{Im}\, f}$

   (b) On suppose que $f \neq 0$.
   Commentaire : cette question est plutôt longue si l'on veut la traiter de manière rigoureuse!
   - On prend déjà note grâce aux questions 1 et 3 que $\boxed{\ker(f) \oplus \ker(f^2 + id) = \mathbb{R}^3}$
   - Comme $f \neq 0$, on a $\ker(f) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$.
     (ceci nous permet de justifier qu'il existe un vecteur NON nul dans ce sev)
   - Soit e_2 un vecteur non nul de $\ker(f^2 + id)$.
     Nous allons montrer que $(e_2, f(e_2))$ est une famille libre.
     Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.e_2 + b.f(e_2) = 0\,(1)$
     En composant par f cela donne $a.f(e_2) + bf^2(e_2) = 0$
     et comme $e_2 \in \ker(f^2 + id)$, on a $f^2(e_2) = -e_2$
     Ainsi

     $$a.f(e_2) - b.e_2 = 0\,(2)$$

     En faisant la combinaison linéaire $a(1) - b(2)$ cela donne

     $$(a^2 + b^2)e_2 = 0$$

     Or $e_2 \neq 0$ donc $a^2 + b^2 = 0$, et **comme a et b sont deux réels** ceci implique forcément que $a = b = 0$!
     (la somme de 2 carrées de nombres réels est nulle ssi chaque terme est nulle.
     Comme $\mathcal{F} = (e_2, f(e_2))$ est une famille libre de $\ker(f^2 + id)$,
     on en déduit que $\boxed{\dim \ker(f^2 + id) \geqslant 2}$

- Montrons que $\ker(f) \neq \{0\}$, càd montrons que 0 est effectivement valeur propre de f.
Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités.
On a donc $\chi_f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$.
Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on sait que χ_f est un polynôme à coefficients réels et donc que ses racines sont réelles ou bien complexes conjuguées 2 à 2.
Ceci prouve que χ_f possède au moins une racine réelle! (deg $\chi_f = 3$ est un nombre impair!)
Or on a vu que la seule valeur propre réelle possible était zéro:
$\boxed{\text{conclusion 0 est effectivement valeur propre et donc } \ker(f) \neq \{0\}}$

- On sait donc à ce stade que
  i. $\dim \ker(f) \geqslant 1$
  ii. $\dim \ker(f^2 + id) \geqslant 2$
  iii. $\dim \ker(f) + \dim \ker(f^2 + id) = 3$

  On en déduit que $\boxed{\dim \ker(f) = 1 \text{ et } \dim \ker(f^2 + id) = 2}$! (ouf!)
- Notons $\mathcal{F}_1 = (e_1)$ une base de $\ker(f)$
- La famille $\mathcal{F} = (e_2, f(e_2))$ précédente est une base de $\ker(f^2 + id)$ car c'est une famille libre dont le cardinal est égal à $2 = \dim \ker(f^2 + id)$
- Comme $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + id) = \mathbb{R}^3$, on sait que la concaténation de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}$ donnera une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, f(e_2))$ de $\mathbb{R}^3$.
Et bien dans cette base la matrice de f est celle demandée! (re-ouf!)