PT* 25/26 - DM 5 - à rendre le vendredi 12 décembre (au maximum)

Exercice 1 : de l'algèbre avec des équations différentielles

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1;+\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}(3x^2+2x-2)y''=3(x^2+x+1) \qquad (E)$$

On note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}(3x^2+2x-2)y''=0 \qquad (E_H)$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1;+\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (E_H) sur $]1;+\infty[$.

Partie I

1. Démontrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $3x^2+2x-2 \neq 0$.
2. Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1;+\infty[$.
3. Donner, sans démonstration, la dimension de S_H.
4. Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x \in]1;+\infty[$,
$$f_1(x)=\frac{1}{x}$$
est solution de (E_H) sur $]1;+\infty[$.

Partie II

On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&6\\0&3&-3\end{pmatrix}.$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.

5. La matrice A est-elle inversible ?
6. Déterminer le noyau de A.
7. Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x=y+2z$.
8. Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :
$$S_1 : AX=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S_2 : AX=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
9. Résoudre le système $S_2 : AX=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P)=(3X+1)P+(2-X)P'-\frac{X}{2}(3X^2+2X-2)P''.$$

10. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$.

11. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
12. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
13. En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation

$$\varphi(P) = 3(X^2 + X + 1).$$

Partie IV

14. Déterminer S_H puis S

Exercice 2

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer, sous forme factorisée, $\chi_A(X)$ et $\chi_B(X)$.
2. Etudier la diagonalisabilité de A et B.

   On donne $E_{-2}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_2(A) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | \, x - y - z = 0\}$

   et $E_1(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_2(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$
3. On souhaite montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = T$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

   On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de P.
   (a) Montrer que l'on ne peut avoir $(a,b,c) = (1,2,1)$.
   (b) Montrer que l'on ne peut avoir $(a,b,c) = (2,1,1)$. (On pourra s'intéresser au $\text{rg}(B - I_3)$)
   (c) On suppose maintenant que $(a,b,c) = (1,1,2)$
   En raisonnant sur les colonnes C_1, C_2 et C_3 déterminer une matrice P qui répond au problème posé.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-6 & 4 & 4 \\ -4 & X+2 & 4 \\ -4 & 4 & X+2 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 4 & 4 \\ X-2 & X+2 & 4 \\ 0 & 4 & X+2 \end{vmatrix} && \textit{linéarité / première colonne} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & X+2 & 4 \\ 0 & 4 & X+2 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 4 & X+2 \end{vmatrix} && \textit{développement / 1ère colonne} \\
&= (X-2)(X-2)(X+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ -1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ X-2 & 1 & X-1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} && \textit{déterminant triangulaire} \\
&= (X-2)(X-1)(X-1)
\end{aligned}$$

On trouve $\boxed{\chi_A(X) = (X+2)(X-2)^2 \text{ et } \chi_B(X) = (X-1)^2(X-2)}$

2. (a) Etude de A
   - $sp(A) = \{-2,2\}$ avec $m(-2) = 1$ et $m(2) = 2$
   - D'après ce qui est donné $\dim E_{-2}(A) = 1$ et $\dim E_2(A) = 2$
     Comme $\dim E_{-2}(A) + \dim E_2(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,
     donc d'après la cns de diagonalisabilité, on a $\boxed{A \text{ diagonalisable}}$

   (b) Etude de B
   - $sp(B) = \{1,2\}$ avec $m(2) = 1$ et $m(1) = 2$
   - D'après ce qui est donné $\dim E_2(B) = 1$ et $\dim E_1(B) = 1$
     Comme $\dim E_2(B) + \dim E_1(B) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$,
     donc d'après la cns de diagonalisabilité, on a $\boxed{B \text{ N'est PAS diagonalisable}}$

3. (a) Supposons que $P^{-1}.B.P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Cela signifie en particulier que $B.C_1 = 1.C_1$ et $B.C_3 = 1.C_3$.
   Comme $C_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (car P est inversible), C_1 et C_3 sont des vecteurs propres de B associés à la valeur propre 1.
   Or $\dim E_1(B) = 1$ donc C_1 et C_3 sont colinéaires, **ce qui est en contradiction avec P inversible!**

(b) Supposons que $P^{-1}.B.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

. On a

- $\text{rg}(B - I_3) = 3 - \dim\ker(B - I_3) = 3 - \dim E_1(B) = 3 - 1 = 2$
- $\text{rg}(T - I_3) = \text{rg}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$
- $P^{-1}.(B - I_3).P = P^{-1}.B.P - P^{-1}.I_3.P = T - I_3$.
  Ce dernier point prouve que $B - I_3$ et $T - I_3$ sont semblables.

Comme deux matrices semblables ont nécessairement même rang, on aboutit donc à une contradiction avec les deux premiers points.

(c)
- Il s'agit de déterminer une matrice inversible P dont les vecteurs colonnes soient des vecteurs propres de A et vérifient $\begin{cases} B.C_1 & = 1.C_1 \\ B.C_2 & = C_1 + C_2 \\ B.C_3 & = 2.C_3 \end{cases}$.
- On pose donc $\boxed{C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(B) \cap E_{-2}(A)}$ et $\boxed{C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_2(B) \cap E_2(A)}$
- Pour déterminer C_2, on utilise des coefficients inconnus $C_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
  - $B.C_2 = C_1 + C_2 \iff (B - I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{cases} y & = x - 1 \\ z & = x + 1 \end{cases}$
  - C_2 doit aussi nécessairement être vecteur propre de A associé à la valeur propre 2; donc $x - y - z = 0$
  - $\begin{cases} y & = x - 1 \\ z & = x + 1 \\ x - y - z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = -1 \\ z & = 1 \end{cases}$, on pose $\boxed{C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$
- Reste à vérifier que P est une matrice inversible!

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \text{(}\textit{c'est bien vérifié!}\text{)}$$

Exercice 1

1.
- On pouvait étudier la fonction $f : x \in]1, +\infty[\mapsto 3x^2 + 2x - 2$ et faire le TV
- On pouvait aussi simplement calculer le discriminant $\Delta = 28$, et constater que les deux racines ne sont pas dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
  En effet
  - $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{28}}{6} < 0$
  - $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{28}}{6} < \dfrac{-2 + \sqrt{36}}{6} = \dfrac{2}{3} < 1$
- Ici, il est plus rapide de constater que $\forall x > 1, x^2 > 1$, et donc que

$$\forall x > 1, 3x^2 + 2x - 2 > 3.1 + 2.1 - 2 = 3 > 0$$

rapp: Les candidats ont su exploiter correctement les différentes méthodes possibles pour traiter cette question. Pour ceux ayant utilisé le discriminant (et non le déterminant), en plus d'erreurs de calcul relativement fréquentes $(4 - 4 \times (-2) = 26$ *ou* 30, $\sqrt{28} = 2\sqrt{6}$, *...), il y a ceux qui ont démontré soigneusement que*

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3} < 1$$

et ceux qui se sont contentés de l'affirmer.

2. Notons $a : x \mapsto 3x + 1$, $b : x \mapsto 2 - x$ et $c : x \mapsto -\frac{x}{2}(3x^2 + 2x - 2)$.
Par définition, on a
$$S_H = \{y \in \mathcal{F}(]1, +\infty[, \mid a.y + b.y' + c.y'' = 0\}$$

- $S_H \subset D_2$
  En effet, si y est une fonction qui vérifie une équation du second ordre, elle doit nécessairement être deux fois dérivable.
- S_H est non vide.
  En effet, la fonction constante nulle, à l'évidence, vérifie l'équation différentielle homogène (E_H)
- S_H est stable par combinaison linéaire.
  En effet, soit $(y,z) \in S_H^2, \lambda \in \mathbb{R}$
  Notons $u = \lambda.y + z$

$$\begin{aligned}
a.u + b.u' + c.u'' &= a.(\lambda.y + z) + b.(\lambda.y + z)' + c.(\lambda.y + z)'' \\
&= a.(\lambda.y + z) + b.(\lambda.y' + z') + c.(\lambda.y'' + z'') \qquad \textit{par linéarité de la dérivation} \\
&= \lambda.(\underbrace{y + b.y' + c.y''}_{=0\, car\, y \in S_H}) + \underbrace{a.z + b.z' + c.z''}_{=0\, car\, z \in S_H} \\
&= \lambda.0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

  ce qui prouve que $u = \lambda.y + z \in S_H$

rapp: Cette question est ratée. Il s'agissait de démontrer un résultat du cours. La caractérisation des sous-espaces vectoriels n'est pas connue de la plupart des candidats. Le théorème de superposition (des solutions) n'avait pas sa place ici, tout comme l'équation caractéristique.

3. - Attention! Ici il était mieux de ne pas seulement dire que "*c'était une équation différentielle linéaire homogène du second ordre*" (car il y a un coefficient devant y'' !).
   - première rédaction possible:
     Sur $]1, +\infty[$, $\frac{x}{2}.(3x^2 + 2x - 2)$ ne s'annule pas, on sait donc que cette équation différentielle linéaire homogène du second ordre possède un ensemble de solution qui est un espace vectoriel de dimension 2.
   - seconde rédaction possible:
     Sur $]1, +\infty[$, $\frac{x}{2}.(3x^2 + 2x - 2)$ ne s'annule pas, on peut donc qui dire l'équation (E_H) **équivaut à**
$$y'' - \frac{2.(2-x)}{x.(3x^2 + 2x - 2)}y' - \frac{2(3x+1)}{x.(3x^2 + 2x - 2} = 0$$
     et l'on sait alors que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

rapp: Toutes les valeurs entre 0 *et* $+\infty$ *ont été proposées. Parfois, même en faisant preuve de bonne volonté, il est impossible pour les correcteurs de savoir si la réponse est* 1 *ou* 2 *(les deux chiffres sont superposés, ou la réponse est trop droite pour un* 2 *et pas assez pour un* 1*). Les candidats sont invités à respecter la consigne « sans démonstration », cela leur évitera d'écrire des justifications totalement fausses... Finalement, il n'y a que* 45% *de réponses correctes pour cette question de cours.*

4. La fonction f_1 est C^∞ sur $]1,+\infty[$, et pour tout $x>1$ on a

$$\begin{aligned}(3x+1).f_1(x)+(2-x).f_1'(x)-\frac{x}{2}.(3x^2+2x-2).f_1''(x) &= (3x+1).\frac{1}{x}+(2-x).\frac{-1}{x^2}-\frac{x}{2}.(3x^2+2x-2).\frac{2}{x^3}\\ &= \dots\\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f_1 \text{ est solution de } (E_H) \text{ sur }]1,+\infty[}$

rapp: Il serait souhaitable que :

- *le calcul commence par*

$$(3x+1)f_1(x)+(2-x)f_1'(x)-\frac{x}{2}(3x^2+2x-2)\,f_1''(x)=\cdots$$

- *les candidats utilisent « $\forall x>1$ » au(x) moment(s) opportun(s),*
- *les candidats écrivent « f_1 est solution de (E_H) sur $]1;+\infty[$ » et non « $f_1(x)$ est solution de (E_H) ».*

Par ailleurs, l'usage d'équivalent ($\Leftrightarrow$) n'est pas la méthode la plus adaptée pour ce type de questions dans la mesure où l'on n'essaie pas de résoudre une équation.

5. $\det A=0$ donc $\boxed{A \text{ N'est PAS inversible}}$

rapp: Les candidats ont (presque) tous trouvé une méthode qui leur convient parmi les nombreuses possibles. À noter que tous les candidats ayant trouvé que la matrice est inversible ont également trouvé que son noyau n'était pas réduit à $\{0\}$ sans que cela les fasse réagir.

Quelques points à améliorer sur la forme :

- *Entre deux déterminants, il y a le signe « $\Rightarrow$ » et lorsque l'on échelonne une matrice, le signe entre les différentes matrices est « $\sim$ » .*
- *Pour les candidats qui échelonnent la matrice, il est inutile d'échelonner la matrice augmentée $(A \mid I)$; les calculs ne sont pas toujours finis et la raison de la non-inversibilité de A n'est pas toujours mise en évidence.*

C'est une bonne idée d'annoncer la méthode que l'on veut utiliser mais le faire avec la propriété (juste) « une matrice est inversible si son déterminant est non nul » n'était pas adapté ici.

6. $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker A \iff A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+2y &=0\\3x+6z &=0\\3y-3z &=0\end{cases}\iff\begin{cases}x &=-2y\\z &=y\end{cases}$

$$\boxed{\ker A=\mathrm{vect}(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix})}$$

rapp: Les systèmes doivent être résolus par équivalence (entre deux systèmes, pas entre un espace vectoriel et un système). Quant aux candidats qui utilisent les opérations sur les colonnes, ils doivent justifier correctement la dimension du noyau ($C_1=C_2+C_3$ ne justifie pas que le rang de la matrice vaut 2).

7. - On sait que l'ensemble image d'une matrice est engendré par ses vecteurs colonnes

$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix})$$

On a vu que la matrice A n'était pas inversible et donc que ses vecteurs colonnes sont liés. On peut garder les deux premiers puisqu'ils ne sont pas colinéaires

$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix})$$

Il s'agit bien d'un plan.

- On peut par exemple utiliser le déterminant pour écrire l'équation du plan

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 9x - 3y - 6z = 0 \Longleftrightarrow 3x = y + 2z$$

- On peut aussi "passer par un système"

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A &\Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x &= \lambda + 2\mu \\ y &= 3\lambda \\ z &= 3\mu \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \lambda &= y/3 \\ \mu &= z/3 \\ x &= y/3 + 2z/3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow 3x = y + 2z
\end{aligned}$$

rapp: De nombreuses confusions avec les invariants. Ceux qui ont choisi la vision géométrique s'en sont mieux sortis que ceux qui ont choisi la vision algébrique. Dans ce second cas, ce n'était en général pas convaincant et mal rédigé (et il n'est pas certain que sans la réponse qui figurait dans l'énoncé, l'équation aurait été trouvée).

8. i) Comme $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin Im(A)$ (car $3.3 \neq -1 + 2.2$), $\boxed{S_1 \text{ ne possède pas de solution}}$

   ii) Comme $3. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Im(A)$ (car $3.3 \neq 3 + 2.3$), S_2 possède **au moins** une solution,

   et comme de plus la matrice A **n'est pas inversible**,

   on peut dire alors que $\boxed{S_2 \text{ possède une infinité de solutions}}$

rapp: Peu traitée et ceux qui la traitent fournissent rarement une justification... S_1 est un peu mieux justifié que S_2.

9. La résolution donne $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ 1 + z \\ z \end{pmatrix} ,\mid z \in \mathbb{R} \right\}}$

rapp: De nombreuses erreurs dans la résolution de ce système. L'expression « résoudre » demande de trouver toutes les solutions et pas seulement une seule.
Par ailleurs, pour « résoudre » un système, il ne suffit pas de le transformer en un système équivalent, il faut également décrire les solutions ou l'ensemble des solutions. Autrement dit : lorsque les calculs sont finis, il convient d'écrire une conclusion... d'autant qu'il est constaté que celles qui sont écrites sont régulièrement inexactes.

10. $\boxed{\varphi(1) = 3X + 1 \qquad \varphi(X) = 3X^2 + 2 \qquad \varphi(X^2) = -3X^2 + 6X}$

rapp: Les correcteurs ne terminent pas les calculs à la place des candidats... La question 12 a permis aux candidats de rectifier quelques erreurs de développement.

11. - La vérification de la linéarité est simple; elle est due à la linéarité de la dérivation
    - On sait que

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$$

Or d'après Q10, ces trois vecteurs sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\boxed{\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_2[X]}$

rapp: La définition est mal connue. De plus, si démontrer que $\varphi(0) = 0$ est inutile (mais correct), les phrases « $0 \in \varphi$ » ou « $\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$ » n'ont pas de sens. Par ailleurs, trop de candidats se contentent d'affirmer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ sans justification, ce qui n'était pas si évident ici, sans compter que les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ ne sont pas tous de degré 2. Les candidats utilisent trop peu la question 10 pour cela (et cela doit être fait après la linéarité).

12. Avec Q10, on a directement $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = A}$

    Question qui n'a pas posé de problème particulier.

13. **Dans cette question il s'agit de bien faire la différence entre le polynôme P et le triplet de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$!**
    En particulier $\ker A$ ***et*** $\ker\varphi$ ***ce n'est pas la même chose!!***
    On va bien sûr utiliser $Q6$ et $Q9$!.
    Soit $P = a.X^2 + b.X + c \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} \varphi(P) = 0 &\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P)) = 0 \\ &\iff A.\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0 \\ &\underbrace{\iff}_{Q6} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \operatorname{vect}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\ker\varphi = \{\lambda.(X^2 + X - 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}(X^2 + X - 2)}$

$$\begin{aligned} \varphi(P) = 3(X^2 + X + 1) &\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(3(X^2 + X + 1)) \\ &\iff A.\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{une solution est } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{une solution de } \varphi(P) = 3.(X^2 + X + 1) \text{ est } P = X + 1}$

*rapp: Les éléments du noyau de A ont trop rarement été transformés en polynômes pour donner les éléments du noyau de φ et lorsque cela a été fait, le « Vect » a souvent disparu. La solution demandée de $\varphi(P) = 3(1 + X + X^2)$ est davantage donnée sous forme de polynôme. À noter que l'on demandait **UNE** solution, pas toutes les solutions.*

14.
    - Notons $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $f_2 : x \mapsto x^2 + x - 2$.
      Ces deux fonctions sont clairement non proportionnelles et appartiennent à S_H.
      Comme $\operatorname{Im} S_H = 2$ on a donc

      $$S_H = \operatorname{vect}(f_1, f_2) = \operatorname{vect}(x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto x^2 + x - 2)$$

      rem: ne surtout pas écrire $\operatorname{vect}(\dfrac{1}{x}, x^2 + x - 2)$

    - Notons $f_p : x \mapsto x + 1$
      On a prouvé que f_p est une solution particulière de (E) donc

      $$S_H = \{f_p + A.f_1 + B.f_2 \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = f_p + \operatorname{vect}(f_1,f_2)$$

rapp: Cette question synthèse a été très peu traitée. S et S_H sont des ensembles, pas des fonctions. L'indépendance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto -2+x+x^2$ est oubliée et on note des incohérences avec la question 3.