PT* 25/26 - DM 5 - à rendre le vendredi 12 décembre (au maximum)

Exercice 1 : de l'algèbre avec des équations différentielles

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1;+\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}(3x^2+2x-2)y''=3(x^2+x+1) \qquad (E)$$

On note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}(3x^2+2x-2)y''=0 \qquad (E_H)$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1;+\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (E_H) sur $]1;+\infty[$.

Partie I

1. Démontrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $3x^2+2x-2 \neq 0$.
2. Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1;+\infty[$.
3. Donner, sans démonstration, la dimension de S_H.
4. Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x \in]1;+\infty[$,
$$f_1(x)=\frac{1}{x}$$
est solution de (E_H) sur $]1;+\infty[$.

Partie II

On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 6\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.

5. La matrice A est-elle inversible ?
6. Déterminer le noyau de A.
7. Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x=y+2z$.
8. Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :
$$S_1 : AX=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S_2 : AX=3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$
9. Résoudre le système $S_2 : AX=3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P)=(3X+1)P+(2-X)P'-\frac{X}{2}(3X^2+2X-2)P''.$$

10. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$.

11. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
12. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
13. En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation

$$\varphi(P) = 3(X^2 + X + 1).$$

Partie IV

14. Déterminer S_H puis S

Exercice 2

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer, sous forme factorisée, $\chi_A(X)$ et $\chi_B(X)$.
2. Etudier la diagonalisabilité de A et B.

   On donne $E_{-2}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_2(A) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | \, x - y - z = 0\}$

   et $E_1(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_2(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$
3. On souhaite montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = T$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

   On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de P.
   (a) Montrer que l'on ne peut avoir $(a,b,c) = (1,2,1)$.
   (b) Montrer que l'on ne peut avoir $(a,b,c) = (2,1,1)$. (On pourra s'intéresser au $\text{rg}(B - I_3)$)
   (c) On suppose maintenant que $(a,b,c) = (1,1,2)$
   En raisonnant sur les colonnes C_1, C_2 et C_3 déterminer une matrice P qui répond au problème posé.