7 Séries entières

ANA 266
Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon R.
Dans chacun des cas suivants, indiquer ce que l'on en déduit sur R

1. La suite $(\frac{a_n}{2^n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 0
2. La suite $(\frac{a_n}{2^n})_{n\geqslant 0}$ ne possède pas de limite
3. La série $\sum a_n.(-3)^n$ est convergente
4. La série $\sum a_n.(2i)^n$ est divergente.
5. La série $\sum a_n.(-1)^n$ converge mais n'est pas absolument convergente.

ANA 267
A l'aide de la définition, déterminer le rayon et l'intervalle de convergence des séries entières suivantes

$$i)\ \sum \frac{z^n}{n.\ln n} \qquad ii)\ \sum \frac{n^2}{\ln^9 n} z^{3n} \qquad iii)\ \sum (3+(-1)^n)^n.z^n$$

ANA 268
Soient α et β deux nombres réels.

1. Montrer que les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha+\beta)}{n!} z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha+\beta)}{n!} z^n$ convergent pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   Qu'en déduit-on sur le rayon de ces séries entières?
2. Calculer $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha+\beta)}{n!} z^n$ et $T(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha+\beta)}{n!} z^n$ pour $z \in \mathbb{R}$

ANA 269 (reconnaître des SE de référence)
Déterminer le rayon et la fonction somme des séries entières suivantes sur l'intervalle ouvert de convergence

$$i)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n+1} z^n}{n!} \quad ii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(2n)!} \quad iii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} \quad iv)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n)!} \quad v)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$vi)\ \sum_{n\geqslant 0} 2^{n+3}.x^n \quad vii)\ \sum_{n\geqslant 1} 2^{2n-2}.x^{3n+1} \quad viii)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{4n} \quad ix)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n.x^{n+2}}{n+1} \quad x)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n-1}.x^{4n+1}}{n+3}$$

ANA 270
Soient α et β deux nombres réels. Calculer pour tout nombre complexe z tel que $|z|<1$ les sommes $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(n\alpha+\beta) z^n$ et $T(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin(n\alpha+\beta) z^n$

ANA 271
Déterminer le rayon et faire l'étude de la convergence en $\pm R$ pour les séries entières suivantes:

$$1. \sum \frac{x^n}{2^n.n^2} \quad 2. \sum (1+\frac{1}{n})^n x^n \quad 3. \sum n3^{-n}x^n \quad 4. \sum \frac{n^2+3n-2}{2n^4-3n+1} x^n \quad 5. \sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad 6. \sum \frac{\ln n}{n} x^n$$

ANA 272
En utilisant la règle de D'Alembert pour les séries numériques, déterminer le rayon des séries entières suivantes:

$$i)\ \sum_{n\geqslant 0} (n^2+3(-2)^n+1) z^{2n} \qquad ii)\ \sum_{n\geqslant 0} n! z^n \qquad iii)\ \sum_{n\geqslant 0} 2^n n z^{n!}$$

ANA 273
Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x|<R$ la somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2(n).x^n$

ANA 274
Soient a et b deux complexes non nuls.

1. Déterminer le rayon de $\sum a^n.z^n$ et de $\sum a^n.z^{3n}$
2. En déduire le rayon de $\sum (a^n+b^n).z^n$
3. On suppose que pour n assez grand, on a $2^n \leqslant c_n \leqslant 3^n$.
   Que dire de $Rayon(\sum c_n.z^n)$?

ANA 275

1. Déterminer le rayon et la somme des séries entières suivantes:

$$S_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{2p} \qquad S_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \qquad S_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{2p}$$

2. On s'intéresse à la série entière $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n+(-1)^n}$
   (a) Déterminer son rayon.
   (b) A l'aide des séries précédentes, déterminer $S(x)$

ANA 276

1. On considère $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln n.x^n$. Donner l'ensemble de définition de la fonction S?
2. On considére la suite (a_n) définie par $a_1=-1$ et $\forall n \geqslant 2, a_n = -\ln(1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$.
   On pose $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Donner l'ensemble de définition de T.
3. Déterminer une égalité liant S et T?

ANA 277 (classique)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   A l'aide de factorielles, exprimer $2\times 4\times\cdots\times(2n)$ et $1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)$
2. Vérifier que $\forall x \in]-1,+1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n} x^n$

ANA 278
On pose pour tout n entier $a_n = \tan\frac{n\pi}{5}$

1. Montrer que la suite $(a_n)_n$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(a_n)_n$ est bornée. *(on pourra considérer a_{n+5})*
3. Montrer que $a_1 = -a_4$ et $a_2 = -a_3$
4. On considère la série entière $\sum a_n x^n$.
   (a) Déterminer son rayon
   (b) Etudier la convergence pour $x=R$ et pour $x=-R$
   (c) Calculer $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ pour tout $x \in]-1,+1[$

ANA 279
Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln(1-t^3)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n.(3n+1)}$

ANA 280
Rayon et fonction somme de

$$i) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!} x^n \qquad ii) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+3n-4}{(n+1)!} x^n \qquad ii) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{(n+1)!} x^n$$

ANA 281
Exprimer les fonctions suivantes au voisinage de 0 comme des sommes de séries entières, et préciser l'intervalle de validité

$$f_1 : x \mapsto \ln(1+3x^2) \qquad f_2 : x \mapsto \ln(2+3x^2) \qquad f_3 : x \mapsto \cos^2 x \qquad f_4 : x \mapsto \cos^3 x$$

ANA 282 (produit de Cauchy)
On considère la suite (c_n) définie par $\forall n \geqslant 0, c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$
Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$

ANA 283
Déterminer le rayon des séries entières du type $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

ANA 284
Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{2n+1} .x^{2n+1}$

ANA 285
Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $f^{(n)}(0)$.

ANA 286
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \text{ch}\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $f^{(n)}(0)$.

ANA 287 (une justification de l'existence d'un DSE)
On note $f(x) = \text{ch}(x).\cos(x)$

1. Montrer que f est DSE. Quel est le rayon de sa série entière?
2. Déterminer le DSE de f en utilisant les complexes.

ANA 288

1. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$? Pourquoi?
2. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout réel x tel que $|x| < R$ la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$
(On pourra calculer d'abord le produit $(1+x)S(x)$)
3. Etudier la convergence de la série entière en $\pm R$

ANA 289 (une fonction C^∞ mais non DSE!)
Nous allons montrer que la fonction $f : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$
2. Montrer par récurrence sur n qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$.
(on pourra établir une formule de récurrence entre P_{n+1} et P_n)
3. En déduire que f est infiniment dérivable en 0 et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n
4. Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0

ANA 290 (équation différentielle)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $(E) :\ (1+x^2)y' + xy = 1$
2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S
Montrer que S vérifie (E) sur $]-R,+R[$ ssi $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} = -\dfrac{n}{n+1} a_{n-1}$
3. Démontrer que si f est DSE alors $\forall n \geqslant 0, a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$
4. Conclure que f est DSE.
5. f est-elle une fonction impaire?

ANA 291
Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n$

1. Déterminer le rayon de cette série entière.
2. Justifier que f vérifie sur $]-1,+1[$ l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$
3. En déduire une expression simple de f

ANA 292
Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 2, (n+1)a_{n+1} = na_n + \frac{1}{2}a_{n-2}$.
On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$ et on note $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.

1. Montrer que pour tout entier n, on a $a_n \in [0,1]$
2. Montrer la suite $(na_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante
3. Déterminer le rayon R
4. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par S.
Puis en déduire S.

ANA 293 (DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (démo de cours))
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout x réel on note $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, donner le DSE de f_α et son rayon.
Dans la suite on supposera que $\alpha \notin \mathbb{N}$
2. Déterminer la série de Taylor de f. Quel est le rayon de cette série entière?
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_α et montrer que sa série de Taylor vérifie la même équation différentielle. (on précisera sur quel intervalle)
4. Justifier que f_α est DSE et retrouver le résultat de cours

ANA 294

α et β étant deux réels, trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ avec :

1. $a_n = \dfrac{n^{\alpha n}}{n!}$
2. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$
3. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $a_n = \cos n$
5. $a_n = \arccos(1-\dfrac{1}{n^2})$
6. $a_n = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(\dfrac{n-1}{n})$
7. $a_n = e^{\sqrt{n}}$
8. $a_n = n^{n+1}$
9. $a_n = \arctan(n^\alpha)$
10. $\left(\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^n$
11. $\dfrac{n^2}{4^n+n}$
12. $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$
13. $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$
14. $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$
15. $\dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$
16. $\dfrac{\cos^2 n}{n}$

ANA 295

On suppose que les séries entières $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ ont le même rayon de convergence noté R. Montrez que R est aussi le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

ANA 296

($\theta \in \mathbb{R}$) Déterminer rayon, intervalle de convergence et fonction somme(sur l'intervalle ouvert de convergence) des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2x^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+1)(n+3)}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{ch}(n)x^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{sh}(n)x^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos(n\theta)x^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)x^n$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n+3}{2n+1}x^n$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1}.n.x^{2n+1}$
9. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+1}{n+1}x^n$
10. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{nx^n}{(2n+1)!}$
11. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+1)(2n+1))}$
12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-n-1}{(n+1)!}x^n$
13. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^3x^n$
14. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n}{n+1}x^{3n}$
15. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n(n+2)!}x^{2n}$
16. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$
17. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$
18. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\operatorname{ch} n}{n!}x^n$
19. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n^2+1)x^n$
20. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3.x^n}{(n+3)!}$
21. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1}$
22. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+n+1}{2^n}x^n$
23. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3+n+1}{n+1}x^n$
24. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos(\dfrac{2n\pi}{3})x^n$

ANA 297

On souhaite développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{dt}{1-xt+xt^2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-\infty,4[$, $f(x)$ est bien définie.
2. On note $J_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$. Calculer $J_{p,q}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$
3. On note $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}(t-t^2)^{n+1}}{1-xt+xt^2}dt$. Montrer que l'on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!}x^k + I_n$
4. Montrer que pour $|x| < 4$, on a $\lim I_n = 0$. Conclure.

ANA 298

On conisidère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$

1. Déterminer son rayon et sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
2. La série est-elle convergente pour $x = 1$ et $x = -1$?
   Dans ce cas, donner la valeur des sommes de ces séries

ANA 299

1. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ pour x dans l'intervalle ouvert de convergence.
2. Calculer , de deux manières différentes, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

   on rappelle le développement asymptotique $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} = \ln n + \gamma + o(1)$ *où* γ *désigne une constante réelle, la constante d'Euler.*

ANA 300

Développement en série entière de la fonction f définie par

1. $f(x) = e^{\arcsin x}$
2. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$
4. $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$
6. $f(x) = \cos^3 x$
7. $f(x) = \dfrac{1+3x^2}{(1-x)^3}$
8. $f(x) = (\arcsin x)^2$
9. $f(x) = \cos(x+1)$
10. $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$
11. $f(x) = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$
12. $f(x) = (\arctan(x))^2$
13. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$
14. $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$
15. $f(x) = \operatorname{sh}(x)\cos(x)$
16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{3-x^2}\right)$
17. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x^3}{1-x}\right)$
18. $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{x^2}{1+x}\right)$

ANA 301

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Développer en série entière la fonction $f : x \to \dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos(\theta)+x^2}$

ANA 302

On considère la SE $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_nx^{2n+1} = \sum\limits_0^\infty \dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

1. Vérifier que $\forall\ n\geq 1$, $(2n+1)a_n - 2na_{n-1} = 0$.
2. En déduire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f et une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.*(on trouvera* $(1-x^2)y' - xy = 1$*)*

ANA 303

Soit (a_n) la suite de réels définie par $a_0 = a_1 = 1$ et la relation $a_{n+1} = a_n + 2\dfrac{a_{n-1}}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$

1. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$
2. En déduire le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$
3. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ vérifie une équation différentielle du premier ordre à déterminer.
   (on trouvera $(1-x)S'(x) - (2x+1)S(x) = 0$*)*
4. En déduire la valeur de la somme de cette série entière.
5. A partir de l'expression de S ainsi trouvée, démontrer que $a_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{(-2)^{n-p}}{(n-p)!}.\dfrac{(p+2)(p+1)}{2}$

ANA 304

1. Déterminer les solutions de $y'' + xy' + y = 0$ qui sont développables en série entière.
2. Reconnaître parmi ces solutions la fonction $x \mapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$
3. Toutes les solutions de l'équation différentielle sont-elles développables en série entière?

ANA 305
On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$
On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et on note $S(x)$ sa fonction somme.
préliminaire: donner le DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ ainsi que son rayon.

1. Montrer que $0 \leqslant a_n \leqslant 3^n$ pour tout entier n.
2. En déduire que la série entière a un rayon non nul (que l'on appellera R). Peut-on donner un minorant de R?
3. Montrer que $\forall x \in]-R,+R[, S(x) = 2xS(x) + x^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$
4. Déterminer les trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \dfrac{a}{1-2X} + \dfrac{b}{1-X} + \dfrac{c}{(1-X)^2}$
5. En déduire l'expression explicite de a_n en fonction de n.

ANA 306
On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n.x^n$ avec $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt$

1. Etablir la relation $2(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n$
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$
3. Montrer que f est solution de $2(1-x)y' - y = 0$
4. En déduire $f(x)$ et u_n

ANA 307
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2}$

1. Montrer que f est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner $f'(x)$
2. Factoriser $1 - X^3$. En déduire que f est dse et donner son dse

ANA 308
Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)} a_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant a_n \leqslant 4$
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$
3. Calcule sa somme $S(x)$ en exprimant $S'(x)$ en fonction de x et de $S(x)$, puis en résolvant l'équation différentielle

ANA 309 (intégration terme à terme)
On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 0, u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n.\sin(\pi.t)dt$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente
2. Montrer l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n.u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi.t)}{1+t}dt$

294 **9**

- On étudie la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \arctan(n^\alpha)$ avec α paramètre réel.
- On peut tout aussi bien utiliser la définition du rayon que la règle de D'Alembert ici pour répondre à la question posée(je vous laisse faire l'un et l'autre en tenant compte des indications ci-dessous). Il faudra juste bien prendre soin à distinguer 3 cas différents dans l'étude.
  i) si $\alpha > 0$ on a $\lim a_n = \dfrac{\pi}{2}$. On trouve $R = 1$
  ii) si $\alpha = 0$ on a pour tout entier $a_n = \dfrac{\pi}{4}$, et on trouve $R = 1$
  iii) si $\alpha < 0$ on a $\lim a_n = 0$ (ce qui ne nous permet pas de déterminer le rayon, mais juste de dire que celui-ci est supérieur ou égal à un lorsque l'on utilise sa définition).
  Comme $\alpha < 0$ on a $\lim n^\alpha = 0$, or $\arctan x \underset{0}{\sim} x$, on a donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$.
  Et on trouve alors que $R = 1$

  Conclusion: $\boxed{\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ on trouve } R = 1}$

10

- On étudie la série entière $\sum a_n x z^n$ avec $a_n = \left(\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^n$
- Pour n assez grand on a

$$\ln a_n = n \ln\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right) = n \ln\left(\frac{1+\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{\beta}{n}}\right) = n\left(\ln(1+\frac{\alpha}{n}) - \ln(1+\frac{\beta}{n})\right)$$

Ce qui donne le DL suivant

$$\ln a_n = n\left(\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \alpha - \beta + o(1)$$

On trouve donc que $a_n = \exp(\alpha - \beta + o(1))$ et donc que $\boxed{\lim a_n = \exp(\alpha-\beta) > 0}$

- Nous allons déterminer le rayon à l'aide de sa définition

$$R = sup\{r \geqslant 0 | \text{la suite } (|a_n|r^n) \text{ est majorée }\}$$

1. pour $r \in [0,1[$ on a $\lim |a_n|r^n = 0$
2. pour $r = 1$ on a $\lim |a_n|r^n = \exp(\alpha - \beta)$
3. pour $r > 1$ on a $\lim |a_n|r^n = +\infty$

On a donc $\boxed{R = sup([0,1]) = 1}$

301 $\sum \sin((k+1)\theta).x^k$

302 $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ cette équa. diff. a pour sol $f(x) = \dfrac{\arcsin x + \lambda}{\sqrt{1-x^2}}$

303 1. La première question se démontre par récurrence à l'aide d'une récurrence forte.
Notons pour tout $k \geqslant 1, \mathcal{P}_k$ la proposition "$1 \leqslant a_k \leqslant k^2$"

- la propriété est vraie au rang 1 et au rang 2 car

- $a_1 = 1$ et $1 \leqslant a_1 \leqslant 1^2$
- $a_2 = 2$ et $1 \leqslant a_2 \leqslant 2^2$

– Supposons la propriété vraie **jusqu'à** un rang $n \geqslant 1$

(a) Comme $a_n \geqslant 1$ et $a_{n-1} \geqslant 1$
On a $a_{n+1} = a_n + 2\dfrac{a_{n-1}}{n+1} \geqslant 1 + \dfrac{2}{n+1} > 1$

(b) Comme $a_n \leqslant n^2$ et $a_{n-1} \leqslant (n-1)^2$
on a $a_{n+1} = a_n + 2\dfrac{a_{n-1}}{n+1} \leqslant n^2 + \dfrac{2(n-1)^2}{n+1} = \dfrac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1}$
Comme pour $n \geqslant 1$ on a $7n \geqslant 1$, on a aussi $3n+1 \geqslant -4n+2$, et on en déduit alors que

$$a_{n+1} \leqslant \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^3}{n+1} = (n+1)^2$$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ était vrai.

2. Notons $b_n = 1$ et $c_n = n^2$.
Ainsi que R_b et R_c les rayons des séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$
Il est facile de montrer que $R_b = R_c = 1$.
Sachant que pour tout entier n on a $|b_n| \leqslant |a_n| \leqslant |c_n|$ et en utilisant le théorème 8 (1) du cours, on peut en déduire que $\boxed{R = 1}$

3. Soit $x \in]-1,+1[$ fixé.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a $(n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n + 2a_{n-1}$ et donc $(n+1)a_{n+1}x^n = (n+1)a_n x^n + 2a_{n-1}x^n$
Par sommation, nous allons avoir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n x^n + 2a_{n-1}x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}$$

Chacune des sommes est facile à identifier, on a $S'(x) - a_0 = xS'(x) + (S(x) - a_0) + 2xS(x)$
Et compte tenu de $a_0 = a_1 = 0$, cela nous donne bien l'égalité $\boxed{(1-x)S'(x) - (2x+1)S(x) = 0}$

4. Sur l'intervalle $]-1,+1[$ l'équation précédente équivaut à $S'(x) - \dfrac{2x+1}{1-x}S(x) = 0$
On a $\int \dfrac{2x+1}{1-x}dx = \int \dfrac{2(x-1)+3}{1-x}dx = \int -2 + \dfrac{3}{1-x}dx = -2x - 3\ln(1-x) + cste$
La solution générale sur $]-1,+1[$ est donc $x \mapsto K.\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$
Et comme $S(0) = a_0 = 1$, on peut affirmer que $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, S(x) = \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}}$

5. – On sait que $e^{-2x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2x)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n!}x^n$ pour tout x réel.
En utilisant le théorème de dérivation terme à terme deux fois à partir de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, on montre que $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$ (rayon = 1)
– On a donc $\forall x \in]-1,+1[, S(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n!}x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n\right)$
La série entière $\sum a_n x^n$ est donc le produit de Cauchy des deux séries ci-dessus.
D'après la formule du produit de Cauchy on peut affirmer que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, a_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{(-2)^{n-p}}{(n-p)!}.\frac{(p+2)(p+1)}{2}}$$

304 1. – On utilise la méthode et la rédaction classique. C'est à dire que l'on procède par analyse-synthèse en supposant qu'une SE de rayon R non nul vérifie (E)
On trouve alors que si la série $\sum a_n x^n$ a un rayon non nul et vérifie l'équa. diff, on a $\forall n \geqslant 0, (n+2)a_{n+2} + a_n = 0$.
Puis en distinguant les cas pair et impair (car la relation de récurrence "va de deux en deux"), on arrive à $\forall p \geqslant 0, a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{2^p.p!}a_0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p.2^p.p!}{(2p+1)!}a_1$
La série $\sum a_n x^n$ s'écrit alors comme la somme $a_0.\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2^p.p!}x^{2p} + a_1.\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p.2^p.p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$
En utilisant la règle de D'Alembert, on trouve que:
la SE $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2^p.p!}x^{2p}$ a pour rayon $R_1 = \infty$ et la SE $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p.2^p.p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ a pour rayon $R_1 = \infty$
On peut donc affirmer que le rayon de la SE $\sum a_n x^n$ est $R = \infty$, ce qui valide les calculs précédents sur $]-\infty,+\infty[$
– Conclusion: les solutions DSE de l'équation différentielle sont les fonctions qui s'écrivent $A.\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2^p.p!}x^{2p} + B.\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p.2^p.p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Elles ont un rayon infini.

2. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}, T(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2^p.p!}x^{2p}$. On a $T(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2/2)^p}{p!} = \exp(-x^2/2)$

3. – Notons pour tout $x \in \mathbb{R}, U(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p.2^p.p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$
– Notons $\mathcal{S}$ $[\mathcal{S}']$ l'ensemble des solutions [DSE] de l'équa diff (E) sur $\mathbb{R}$.
– On a évidemment $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$
– $\mathcal{S}$ est un sev de dimension 2 de l'ev $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car l'équation différentielle (E) est une EDLNH du second ordre, à coefficients continues sur $\mathbb{R}$
– On a prouvé que $\mathcal{S}' = \text{vect}(T,U)$.
Or (T,U) est une famille libre, donc $\mathcal{S}'$ est un espace vectoriel de dimension deux!
– on peut donc affirmer que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$: toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont DSE!
– pour justifier que (T,U) est une famille libre, on peut, par exemple, remarquer que T est une fonction paire (autre que la fonction nulle) et U est une fonction impaire(autre que la fonction nulle): donc T et U ne sont pas colinéaires!

305 1. on trouve $(a,b,c) = (1,0,-1)$
2. $a_n = 2^n - (n+1)$