6 Intégrales généralisées

ANA 232
a, b et c sont trois réels. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2} dt$

ANA 233
Déterminer la nature de intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t\ln t} \quad I_2 = \int_1^3 \frac{dt}{3-t} \quad I_3 = \int_3^4 \frac{dt}{\sqrt{t-3}} \quad I_4 = \int_{e^2}^{\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \tan(t)dt \quad I_6 = \int_0^1 \arctan(\sqrt{1-t})dt \quad I_7 = \int_0^{\infty} e^{-t}\sin(t)dt$$

ANA 234
Prouver la convergence des intégrales ci-dessous, et déterminer leur valeur.

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{9dt}{t^2(t^2+1)(t+3)} = 3 - \frac{13}{20}\ln 2 - \frac{27}{40}\pi \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt = 1$$

$$C = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t}\right) dt = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \qquad D = \int_{-\infty}^0 te^t \sin t dt = \frac{1}{2}$$

$$E = \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt = -\ln 2 \qquad F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{5\operatorname{ch} t + 3\operatorname{sh} t + 4} = \frac{1}{2}$$

ANA 235
convergence et valeur de :

$$A = \int_0^{\infty} \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{3\pi}{4} \qquad B = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{3\tan t + 2} = \frac{\pi + 3\ln(3/2)}{13} \qquad C = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$D = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} = -2\ln 2 \qquad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}dt = \int_0^{\infty} \frac{2t^2dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad F = \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt = \frac{\pi}{2}$$

$$G = \int_0^{\infty} \ln(1+\frac{a^2}{t^2})dt = a\pi \qquad H = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0 (u = 1/t) \qquad I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ANA 236
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} t^n.e^{-t}dt$.

On souhaite prouver la convergence de I_n et donner sa valeur.

1. Montrer que I_0 converge et donner sa valeur.
2. Montrer par récurrence que I_n converge et que $I_n = n!$

ANA 237
Soit $0 < a < \pi$.

On s'intéresse à l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 2t\cos a + 1}$

1. préambule: justifier que $\forall x \neq 0$, $\arctan\dfrac{1}{x} + \arctan x = sg(x).\dfrac{\pi}{2}$
2. Montrer que I_a converge et vaut $\dfrac{1}{\sin a}\left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan\dfrac{\cos a}{\sin a}\right)$
3. Justifier que $I_a = \dfrac{\pi - a}{\sin a}$

ANA 238
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que la fonction $t \mapsto e^{zt}.e^{-|t|}$ appartienne à $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$

ANA 239
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On note pour tout x réel positif $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)$ et pour tout entier n, $S_n = \displaystyle\int_0^n f(t)dt$

1. Quel est le sens de variation de la fonction F? de la suite (S_n)?
2. Montrer l'équivalence

   la suite (S_n) converge ssi la fonction F possède une limite finie en $+\infty$

3. Ce résultat reste-t-il vrai si on retire l'hypothèse "f positive" ?
4. On suppose f seulement continue sur $[0, +\infty[$.
   Montrer les implications vraies et donner un contre-exemple pour les fausses!
   (a) (F fonction bornée $\Rightarrow$ (S_n) est une suite bornée) (c). $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe
   (b) ((S_n) est une suite bornée$\Rightarrow$ F fonction bornée) (d). $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ existe

ANA 240
En utilisant la règle des équivalents, déterminer la nature de intégrales suivantes (α paramètre réel):

$$I_1 = \int_1^{\infty} \sin^2(\frac{1}{t})dt \quad I_2 = \int_1^{\infty} \sqrt{t^2+4t+1} - \sqrt{t^2+4t-1}dt \quad I_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\arcsin(\tan t)} \quad I_4 = \int_1^4 \frac{dt}{(\ln t)^{\alpha}}$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{e^t - e - e.\ln t}{(t-1)^{\alpha}}dt \quad I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\pi - 4t}}{2\cos t - \sqrt{2}}dt \quad I_7 = \int_1^3 \frac{t^2+3}{(3-t)^{\alpha}}dt$$

ANA 241
Pour tout $t > 0$ on note $f(t) = \ln(\operatorname{th}(t))$

1. Montrer que $f \underset{+\infty}{\sim} -2.e^{-2t}$ et $f \underset{0^+}{\sim} \ln t$
2. En déduire la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$.

   Préciser alors la nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$

ANA 242
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2e^{-t}} \qquad B = \int_0^{\infty} \ln\frac{1+t^2}{1+t^3}dt \qquad C = \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$$

$$D = \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}dt \qquad E = \int_0^1 \frac{dt}{\arccos t} \qquad F = \int_0^{\infty} \left(2 + (t+3)\ln\frac{t+2}{t+4}\right) dt$$

$$G = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2 \operatorname{ch} t} \qquad H = \int_{e^2}^{\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)} \qquad I = \int_0^1 \sin\frac{1}{t}.e^{-1/t}.t^{-n}dt (n \in \mathbb{N})$$

ANA 243

Soit $f \in C^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ tel que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$

   Montrer que $\lim J_n = 0$
2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$

ANA 244

Nous allons montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.

Pour tout $x \geqslant \pi$, on note $F(x) = \displaystyle\int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t} dt$

1. Simplifier pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$
2. (a) Montrer que pour tout entier k on a $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = 2$

   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 2, F(n\pi) \geqslant \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$

ANA 245

α et β désignant des paramètres réels, étudier la convergence des intégrales :

$A = \int_0^\infty \dfrac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}$	$B = \int_0^\infty \dfrac{\ln \arctan t}{t^\alpha}$	$C = \int_0^\infty t^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{t}})dt$
$D = \int_0^1 \dfrac{\lvert\ln t\rvert^\beta}{(1-t)^\alpha}dt$	$E = \int_0^\infty \dfrac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$	$F = \int_0^1 \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}dt$
$G = \int_1^\infty \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}dt$	$H = \int_1^\infty (\sqrt{1+t^2}-t)^\alpha dt$	$I = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$

ANA 246

1. déterminer la nature des intégrales suivantes :

   $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$; $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$; $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln(1+t)}}$; $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\ln(1+t)}$
2. déterminer les limites suivantes:

   $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{\ln(1+t)}}$
3. On considère la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - \dfrac{1}{t}$.

   Montrer que g est intégrable sur $[1,+\infty[$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$
4. On considère la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t)} - \dfrac{1}{t}$.

   Montrer que $\int_0^1 h(t)dt$ est une intégrale convergente, puis en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t)}$

ANA 247 (intégrales de Bertrand (HP))

1. Déterminer la nature de

   $$I_0 = \int_2^\infty \frac{\ln^{2020}(t)}{t^2}dt \quad I_1 = \int_2^\infty \frac{dt}{t^3.\ln t} \quad I_2 = \int_2^\infty \frac{dt}{t.\ln t} \quad I_3 = \int_2^\infty \frac{dt}{t.\ln^2 t} \quad I_4 = \int_2^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}.\ln^5 t}$$
2. α et β étant deux réels fixés. Nous allons établir que

   $$\boxed{\text{L'intégrale } I_{\alpha,\beta} = \int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \text{ converge} \iff \begin{cases} \alpha > 1 & \text{et } \beta \text{ quelconque} \\ \text{ou} & \\ \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \end{cases}}$$

   i) *Etudier le cas où $\alpha = 1$*

   ii) *Montrer si $\alpha < 1$ alors $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.(on pourra mq pour t assez grand $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{t}$*

   iii) *Montrer si $\alpha > 1$ alors $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.*

ANA 248

1. Justifier que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2} dt$ (on pourra réaliser une intégration par parties)
2. A l'aide d'un changement de variables $t = 2\theta$, montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

ANA 249

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(t^2) + \lambda.\sin t}{t\sqrt{t}}dt$

ANA 250

On considère $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles, au voisinage de 0, on a $f(t) = o(\dfrac{1}{t^\alpha})$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$
3. Soit $\lambda < 1$.

   Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\lambda}dt$ est convergente

ANA 251 (vocabulaire)

Justifier que

1. la fonction $f : t \mapsto \ln t.e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
2. la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\cos(t^2)}{t^2}$ est dans $L^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$
3. la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

ANA 252

Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$,

1. la fonction $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^\alpha}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?
2. l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha}dt$ est-elle convergente?

ANA 253
On s'intéresse à l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^2)dt$

1. A l'aide d'un changement de variable judicieux, montrer I et $J=\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta$ sont de même nature
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que J et $K=\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}}d\theta$ sont de même nature
3. En déduire la nature de I

ANA 254
On note $f:t\mapsto \dfrac{\sin t}{t^4}$ et $g:t\mapsto \dfrac{\sin t}{t}$

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^\infty f$, de $\displaystyle\int_0^1 f$ puis de $\displaystyle\int_0^\infty f$
2. (a) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 g$
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^\infty g$ converge
   (c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$

ANA 255
Soit $\alpha>0$ et β un réel non nul.
Nous allons montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{it\beta}}{t^\alpha}dt$ est une intégrale convergente.

1. Déterminer les valeurs de (α,β) pour lesquelles la fonction $t\mapsto \dfrac{e^{it\beta}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
2. Pour tout $x\geqslant 1$, on pose $F_\alpha(x)=\int_1^x \dfrac{e^{it\beta}}{t^\alpha}dt$
   (a) Montrer que $F_\alpha(x)=\dfrac{\alpha}{i\beta}F_{\alpha+1}(x)+\dfrac{1}{i\beta}.\dfrac{e^{i\beta x}}{x^\alpha}-\dfrac{e^{i\beta}}{i\beta}$
   (b) Conclure
3. En déduire que $\boxed{\forall\alpha>0,\forall\beta\neq 0 \text{ les intégrales } \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha}dt \text{ et } \int_1^\infty \frac{\cos(\beta t)}{t^\alpha}dt}$ sont convergentes.

ANA 256
Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2}dt$

1. justifier l'existence de $f(x)$
2. montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et donner f'
3. déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$
4. On s'intéresse au comportement de f au voisinage de 0^+
   (a) Montrer que $\forall t\in[0,\pi/2], \sin(t)\geqslant \dfrac{2t}{\pi}$, puis en déduire que $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$
   (b) Montrer que la fonction $x\mapsto \int_x^1 \dfrac{\sin t}{t^2}dt-\ln x$ possède une limite finie lorsque $x\to 0^+$
   (c) En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+
5. montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

ANA 257
Soit $x>0$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin t}{t^4}dt$ converge. (On note $h(x)$ sa valeur)
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$
3. Montrer que $h(x)=o(\dfrac{1}{x^2})$ lorsque $x\to+\infty$

ANA 258 (intégrale de Fresnel)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{i.t^2}dt$ converge sans être absolument convergente
2. En déduire que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t^2)dt$ et $\displaystyle\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ convergent

ANA 259
Soit $\lambda>0$ et la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\lambda n+1}$ pour tout $n\geqslant 0$

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?
2. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{\lambda n}dt$
3. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty u_n=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}$

ANA 260
Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0,+\infty[$
Soit h un réel strictement positif
On considère la fonction $g:t\mapsto f(t.h)$ et on note $S(h)=\displaystyle\sum_{k=1}^\infty g(k)=\sum_{k=1}^\infty f(k.h)$

1. Montrer que la fonction g est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$
2. En déduire que la série de terme général $g(k)$ est bien convergente,
   et rappeler un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty g(k)$ à l'aide de 2 intégrales.
3. En déduire à l'aide d'un changement de variable judicieux que $\displaystyle\int_h^\infty f(t)dt\leqslant h.S(h)\leqslant \int_0^\infty f(t)dt$
4. Que dire de $\lim\limits_{h\to 0^+} h.S(h)$?

ANA 261

1. Soit $a>0$ et $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue ayant une limite finie l en $+\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t+a)-f(t)dt=\int_x^{a+x} f(t)dt-\int_0^a f(t)dt$
   (b) i. Justifier que $\forall\epsilon>0,\exists M>0,\forall t\geqslant M,|f(t)-l|\leqslant \dfrac{\epsilon}{a}$
       ii. En déduire que $\forall\epsilon>0,\exists M>0,\forall x\geqslant M,|\displaystyle\int_x^{a+x} f(t)dt-al|\leqslant\epsilon$
   (c) En déduire que, pour tout $a\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^\infty (f(t+a)-f(t))dt$ converge (vers $a.l-\displaystyle\int_0^a f(t)dt$)
2. (a) Calcul de $\int_0^1 \arctan t dt$
   (b) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^\infty \arctan(t+1)-\arctan t dt$

ANA 262 (fonction de carré intégrable)
Montrer que $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \mid \int_0^{\infty} e^{-t} f(t)^2 dt \text{ converge}\}$ est un sev de $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$

ANA 263

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ converge.
2. Soit $f : \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$. Etudier le sens de variation de f
3. Soit $0 < a < b$ deux réels. On note $F_{a,b}(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
   (a) En utilisant un encadrement judicieux, montrer que $\lim_{x\to 0^+} F_{a,b}(x) = \ln \frac{b}{a}$
   (b) Etudier la parité de $F_{a,b}$
   (c) Montrer que $\lim_{x\to 0} F_{a,b}(x) = \ln \frac{b}{a}$
   (d) Pour $\epsilon > 0$, on note $I(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$. Montrer que $I(\epsilon) = kF_{1,3}(\epsilon)$ où k est une constante que l'on déterminera.
   (e) En déduire la valeur de I

ANA 264
On considère $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-5t} - e^{-7t}}{t} dt$ et $I_{a,b} = \int_a^b \frac{e^{-5t} - e^{-7t}}{t} dt$ avec $0 < a < b$

1. Montrer que I est une intégrale convergente
2. Montrer que $I_{a,b} = \int_{5a}^{7a} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{5b}^{7b} \frac{e^{-u}}{u} du$
3. Montrer que $\lim_{b\to\infty} \int_{5b}^{7b} \frac{e^{-u}}{u} du = 0$
4. Montrer qu'il existe une fonction g bornée au voisinage de 0 telle que $\forall a > 0$,
$$\int_{5a}^{7a} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln \frac{7}{5} + \int_{5a}^{7a} g(u) du$$
5. En déduire la valeur de I

ANA 265
Nous allons montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} \sin(\sin(t)) dt$ est divergente.

1. Justifier que $\int_0^{2\pi} \sin(\sin(t)) dt = 0$
2. Justifier que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} \sin(\sin(t)) dt = 0$
3. Justifier que $\int_0^{\pi} \sin(\sin(t)) dt > 0$
4. On suppose que l'intégrale $\int_0^{\infty} \sin(\sin(t)) dt$ est convergente.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \int_0^x \sin(\sin(t)) dt$
   (a) Que vaut $F(2n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
   (b) Que vaut $F((2n+1)\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
   (c) Conclure

234 — 234 B

– Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\ln t}{t^2} \end{array}}$
La fonction f est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et possède donc une infinité de primitives sur cet intervalle. L'intégrale $\int_1^{\infty} f$ est généralisée en $+\infty$
– Nous allons déterminer une primitive de f en réalisant une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$, cela donne: $\int \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{\ln t}{t} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + cste$
– Pour tout $x \geqslant 1$ on a donc $F(x) = \int_1^x f = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$
Il est clair que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. On a montré que $\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \text{ converge et vaut } 1}$

234 D

– La fonction $f : t \mapsto t.e^t.\sin(t)$ est continue sur $]-\infty,0]$, elle possède donc une primitive sur cet intervalle et l'intégrale D est généralisée uniquement en $-\infty$
– Pour tout $x \leqslant 0$ on note $F(x) = \int_x^0 f$.
– Nous allons déterminer une primitive de f en utilisant la méthode de complexification.
On a $f(t) = \operatorname{Im}(t.e^t.e^{it}) = \operatorname{Im}(t.e^{(1+i)t})$.
On va déterminer $\int t.e^{(1+i)t} dt$ en réalisant une intégration par parties.
$$\int t.e^{(1+i)t} dt = t.\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} - \frac{1}{1+i} \int e^{(1+i)t} dt = t.\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2} e^{(1+i)t} + cste$$
– pour déterminer la partie imaginaire nous aurons besoin de $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ et $\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$
– on a:
$\operatorname{Im}(t.\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}) = \operatorname{Im}(\frac{1-i}{2}.t.e^t.e^{it}) = \frac{t.e^t}{2}(\sin(t) - \cos(t))$ et $\operatorname{Im}(\frac{1}{(1+i)^2} e^{(1+i)t}) = \operatorname{Im}(\frac{-i}{2}.e^t.e^{it}) = -\frac{e^t.\text{co}}{2}$
– ainsi $F(x) = \frac{1}{2}(1 + x.e^x.\cos(x) - e^x.\cos(x) - x.e^x.\sin(x))$
– Reste à faire tendre x vers $-\infty$.
  – $\lim_{x\to-\infty} e^x.\cos x = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0)
  – d'après le théorème des croissance comparées on a $\lim_{x\to-\infty} x.e^x = 0$, on peut donc affirmer que $\lim_{x\to-\infty} x.e^x.\cos(x) = \lim_{x\to-\infty} x.e^x.\sin(x) = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers $+\infty$.
– Ainsi $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{1}{2}$. Comme cette limite est finie, on en déduit que
$$\boxed{D \text{ est une intégrale convergente et que } D = \frac{1}{2}}$$

234 F

– On note $f : t \mapsto \frac{1}{5\operatorname{ch}(t) + 3\operatorname{sh}(t) + 4} = \frac{1}{4e^t + 4 + e^{-t}} = \frac{e^t}{(2e^t+1)^2}$
Comme la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas. L'intégrale I est généralisée en $+\infty$ et $-\infty$

– Déterminons une primitive de f sur $\mathbb{R}$!

$$F(t) = \int f(t)dt = \int \frac{e^t}{(2e^t+1)^2}dt = \int \frac{du}{(2u+1)^2} = \frac{-1}{2(2u+1)} + cste = \frac{-1}{2(2e^t+1)} + cste$$

(on a posé le changement de variable $u = e^t$, et donc $du = e^t dt$)

– L'intégrale $I_1 = \int_0^\infty f$ converge et vaut $\frac{1}{6}$

En effet, $F(x) = \int_0^x f = \left[\frac{-1}{2(2e^t+1)}\right]_0^x = \frac{-1}{2(2e^x+1)} + \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{1}{6}$ quand $x \longrightarrow +\infty$

– L'intégrale $I_2 = \int_{-\infty}^0 f$ converge et vaut $\frac{1}{3}$

En effet, $F(x) = \int_x^0 f = \left[\frac{-1}{2(2e^t+1)}\right]_x^0 = \frac{1}{2(2e^x+1)} - \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ quand $x \longrightarrow +\infty$

– On peut donc affirmer que $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ converge et vaut } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}}$

$\boxed{235}$ 235 A

– La fonction $f : t \mapsto \dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, comme quotient de fonctions continues sur $[0, +\infty[$, le dénominateur de s'annulant pas.

– On a pour tout t, $\dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2} = \dfrac{t^2+1+t^2}{(t^2+1)^2} = \dfrac{1}{t^2+1} + \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2}$

– On intègre $t \mapsto \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2} = t.\dfrac{t}{(t^2+1)^2}$ à l'aide d'une intégration par parties en posant $u(t) = t$ (et donc $u'(t) = 1$) et $v(t) = \dfrac{-1}{2(t^2+1)}$ (et donc $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$),

et cela donne $\int \dfrac{t.t}{(t^2+1)^2}dt = -\dfrac{t}{2(t^2+1)} + \int \dfrac{dt}{2(t^2+1)} = -\dfrac{t}{2(t^2+1)} + \dfrac{\arctan t}{2} + cste$

– On a ainsi pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^x f = \left[\dfrac{-t}{2(t^2+1)} + \dfrac{3}{2}\arctan t\right]_0^x = \dfrac{-x}{2(x^2+1)} + \dfrac{3}{2}\arctan x$

On trouve donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0 + \dfrac{3}{2}.\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$ cqfd!

235 E

– La fonction $t \mapsto \sqrt{\tan t}$ est continue sur l'intervalle $[0,\pi/2[$ donc l'intégrale E est une intégrale généralisée en $\pi/2$

– Nous allons effectuer un changement de variable ($u = \sqrt{\tan t}$)... proprement!

La fonction $t \mapsto \sqrt{\tan t}$ est de classe C^1 sur $]0,\pi/2[$, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0,\pi/2[$ sur $]0, +\infty[$.

On peut donc affirmer que E et l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{2u^2}{1+u^4}du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Il est clair que cette dernière intégrale, qui est généralisée en $+\infty$, est convergente car $\dfrac{2u^2}{1+u^4} \sim \dfrac{2}{u^2}$

– La décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1} \qquad \text{avec} \qquad (a,b,c,d) = (-\sqrt{2}/4,1/2,\sqrt{2}/4,1/2)$$

– Une primitive est $t \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\dfrac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}t+1) + \arctan(\sqrt{2}t-1)\right)$

– On trouve alors bien la valeur demandée au final par passage à la limite

– La décompostion de la forme indiquée vient du fait que:

Les racines du polynôme X^4+1 sont $\exp(\pm i\pi/4)$ et $\exp(\pm 3i\pi/4)$, on a donc la factorisation

$$X^4+1 = (X-\exp(i\pi/4))(X-\exp(-i\pi/4))(X-\exp(3i\pi/4))(X-\exp(-3i\pi/4))$$

Or $(X-\exp(i\pi/4))(X-\exp(-i\pi/4)) = X^2 - 2\cos(\pi/4) + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$,
et $(X-\exp(3i\pi/4))(X-\exp(-3i\pi/4)) = X^2 + \sqrt{2}X + 1$

$\boxed{242}$ 242 C

Nature de $C = \int_0^1 \dfrac{dt}{1-\sqrt{t}}$

– Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1-\sqrt{t}} \end{array}}$

– La fonction f est continue sur l'intervalle $[0,1[$ donc:
  – f possède des primitives sur cet intervalle
  – l'intégrale C est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

– On commence par déterminer un équivalent de f en 1^-: deux possibilités s'offrent à nous:

1. On pose $t = 1+h$, et on utilise le DL $\sqrt{1+u} =_0 1 + \dfrac{u}{2} + o_0(u)$

   $1-\sqrt{t} = 1-\sqrt{1+h} = 1-(1+\dfrac{h}{2}+o(h)) = -\dfrac{h}{2}+o(h) \underset{r\to 0^-}{\sim} -\dfrac{h}{2} = \dfrac{1-t}{2}$ et donc $\dfrac{1}{1-\sqrt{t}} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{2}{1-t}$

2. On utilise la quantité conjuguée:

   On a $\dfrac{1}{1-\sqrt{t}} = \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-t} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{2}{1-t}$ car $\lim\limits_{t\to 1^-} 1+\sqrt{t} = 2$

– Notons $\boxed{g : t \mapsto \dfrac{2}{1-t}}$

i) g est continue sur $[0,1[$
ii) $f(t) \underset{1^-}{\sim} g(t)$
iii) $g(t)$ est de signe stable au voisinage de 1^-

D'après *la règle des équivalents*,
on peut affirmer que $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_0^1 g(t)dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^1 g(t)dt$ est une intégrale divergente car

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^x g(t)dt = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{2dt}{1-t} = \lim_{x\to 1^-}[-2\ln|1-t|]_0^x \lim_{x\to 1^-} -2\ln|1-x| = +\infty$$

– Conclusion: $\boxed{C = \int_0^1 \dfrac{dt}{1-\sqrt{t}} \text{ est une intégrale divergente}}$

242 D

Nature de $D = \int_1^\infty \dfrac{e^{\sin t}}{t}dt$

– Notons $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{e^{\sin t}}{t} \end{array}}$

– La fonction f est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$ donc:
  – f possède des primitives sur cet intervalle
  – l'intégrale D est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

– Notons $\boxed{\begin{array}{rccc} g: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{e^{-1}}{t} \end{array}}$

La fonction g est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \geqslant 1, 0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$.

D'après le *théorème de comparaison des fonctions positives* (théorème 5), comme $\int_1^{\infty} g(t)dt$ est une intégrale de Riemann de référence divergente, on peut affirmer que

$$\boxed{\int_1^{\infty} f(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \text{ est une intégrale divergente}}$$

242 F Nature de $F = \int_0^{\infty} \left(2 + (t+3)\ln\dfrac{t+2}{t+4}\right) dt$

– Notons $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 2+(t+3)\ln\dfrac{t+2}{t+4} \end{array}}$

– La fonction f est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ donc:
  – f possède des primitives sur cet intervalle
  – l'intégrale F est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

– Déterminons un équivalent de f en $+\infty$ en utilisant $\ln(1+u) =_0 u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 + (t+3)\ln\frac{t+2}{t+4} \\ &= 2 + (t+3)\ln\frac{1+2/t}{1+4/t} \\ &= 2 + (t+3)\left[\ln(1+\frac{2}{t}) - \ln(1+\frac{4}{t})\right] \\ &= 2 + (t+3)\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{t}\right)^3 + o(\left(\frac{2}{t}\right)^3) - \left[\frac{4}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{t}\right)^3 + o(\left(\frac{4}{t}\right)^3)\right]\right) \\ &= 2 + (t+3)\left[-\frac{2}{t} + \frac{6}{t^2} - \frac{56}{3t^3} + o(\left(\frac{1}{t}\right)^3)\right] \end{aligned}$$

En développant on constate que vraiment beaucoup de termes disparaissent ce qui justifie le DL à l'ordre 3 dès le départ! En effet on trouve

$$f(t) = -\frac{2}{3t^2} + o(\left(\frac{1}{t}\right)^2) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{3t^2}$$

– Notons $\boxed{g: t \mapsto -\dfrac{2}{3t^2}}$ **ATTENTION! La fonction g N'est PAS continue sur $[0,+\infty[$!**

…mais ce n'est pas si grave que cela!
car, grâce à la rédaction initiale où nous avons expliqué que l'intégrale F était généralisée uniquement en sa borne supérieure, il nous suffit de montrer que l'intégrale $\int_{\boxed{1}}^{\infty} f(t)dt$ converge.

La règle des équivalents(je ne détaille pas la rédaction ici) permet de conclure que

$$\int_{\boxed{1}}^{\infty} f(t)dt \text{ et } \int_{\boxed{1}}^{\infty} g(t)dt \text{ sont de même nature,}$$

et comme $\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} -\dfrac{2}{3t^2} dt$ est une intégrale de référence convergente,

on peut affirmer que $\int_{\boxed{1}}^{\infty} f(t)dt$ converge et donc que $F = \int_{\boxed{0}}^{\infty} f(t)dt$ converge aussi.

244 1. Soit $n \geqslant 2$.
Avec la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \int_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = F(n\pi)$$

2. (a) On distingue deux cas suivant la parité de k
   i) cas où k est impair.
   On a

$$\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi],\ \sin t \geqslant 0$$

   et donc

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin t\, dt &= [-\cos t]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= \cos((k-1)\pi) - \cos(k\pi) \\ &= (-1)^{k-1} - (-1)^k \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

   ii) cas où k est pair.
   On a

$$\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi],\ -\sin t \geqslant 0$$

   et donc

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} -\sin t\, dt &= [\cos t]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= -\cos((k-1)\pi) + \cos(k\pi) \\ &= -(-1)^{k-1} + (-1)^k \\ &= -(-1) + 1 = 2 \end{aligned}$$

   (b) Soit $n \geqslant 2$.
   On profite de deux questions précédentes

i. Soit $k \in [\![2,n]\!]$.
Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[(k-1)\pi,k\pi]$, on a

$$\forall t \in [(k-1)\pi,k\pi], \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k\pi}$$

en multipliant par $|\sin t| \geqslant 0$, cela donne

$$\forall t \in [(k-1)\pi,k\pi], \frac{|\sin t|}{t} \geqslant \frac{|\sin t|}{k\pi}$$

Puis la croissance de l'intégrale et la question Q2(a) donnent

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geqslant \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt = \frac{2}{k\pi}$$

ii. En sommant les inégalités ci-dessus, et en utilisant Q1, on trouve directement l'inégalité demandée

$$F(n\pi) \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

3. i) Notons pour tout $n \geqslant 2, S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$.
On sait que
– S_n est la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n}$
– La série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n}$ est divergente

On peut donc affirmer que la suite (S_n) est divergente.

(rem: à ce stade, ceci signifie que (S_n) possède une limite infinie OU ne possède pas de limite)

Pour pouvoir affirmer que $\lim S_n = +\infty$ il faut ensuite bien préciser que "le terme général de la série étant positif, on sait que la suite des sommes partielles est croissante, et donc si la suite diverge c'est forcément en tendant vers $+\infty$"

Ainsi $\boxed{\lim S_n = +\infty}$

ii) On sait d'après Q2b) que $\forall n \geqslant 2, F(n\pi) \geqslant S_n$.
Comme $\lim S_n = +\infty$, on a forcément $\lim F(n\pi) = +\infty$

iii) *Commençons par résumer la situation*
– *Montrer que* $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ *est une* ***intégrale*** *divergente revient à montrer que la* ***fonction*** *F ne possède pas de limite finie en $+\infty$*
– *On vient de montrer que la* ***suite*** *$(F(n\pi))$ tendait vers $+\infty$*

On peut par exemple procéder par l'absurde.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ **est convergente.**
Ceci signifie que la fonction F possède une limite finie en $+\infty$, càd qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{+\infty} F = l$.
Comme $\lim_{n \to \infty} n\pi = +\infty$, on aurait alors par composition de limites $\lim_{n \to +\infty} F(n\pi) = l$.

Contradiction

Conclusion: $\boxed{\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \text{ diverge}}$

4. *Il s'agit de bien faire la différence entre cette question et la question précédente.*

En Q3, on a montré que la fonction F ne possède pas de limite finie en $+\infty$, càd que F posssède une limite infinie ou F ne possède pas de limite.

Comme la fonction $f : t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$, on sait d'après le théorème fondamental de l'analyse que F est C^1 sur cet intervalle, et que $\forall x \geqslant \pi, F'(x) = \dfrac{|\sin x|}{x} \geqslant 0$.

Ainsi la fonction F est croissante sur $[2, +\infty[$.

Le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que F possède une limite l en $+\infty$.
A la question précédente, on a montré que forcément $l = +\infty$.

245 **245 G**

Nature de $G = \int_1^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\arctan t}{t^\alpha} \end{array}}$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ donc:
  - f possède des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale G est généralisée en sa borne supérieure uniquement.
- Comme $\lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$, on a $\boxed{f(t) \sim \frac{\pi/2}{t^\alpha}}$

  Notons $g : t \mapsto \frac{\pi/2}{t^\alpha}$

  i) g est continue sur $[1, +\infty[$
  ii) $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$
  iii) $g(t)$ est de signe stable au voisinage de $+\infty$

  D'après *la règle des équivalents*,
  on peut affirmer que $\int_1^\infty f(t)dt$ et $\int_1^\infty g(t)dt$ sont de même nature.

  Or $\int_1^\infty g(t)dt$ est une intégrale de Riemann de référence qui converge ssi $\alpha > 1$

  Conclusion : $\boxed{\text{l'intégrale } G = \int_1^\infty \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt \text{ ssi } \alpha > 1}$

245 H Nature de $H = \int_1^\infty (\sqrt{1+t^2} - t)^\alpha dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- Comme précédemment, l'intégrale H est généralisée en sa borne supérieure uniquement
- On procède comme précédemment avec cette fois $f(t) = \sqrt{1+t^2} - t)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^\alpha t^\alpha} = g(t)$

  On trouvera que $\boxed{\text{l'intégrale } H \text{ converge ssi } \alpha > 1}$

- Pour déterminer l'équivalent de $f(t)$ deux possibilités s'offrent à nous:

  1. $\sqrt{1+t^2} - t = \frac{(1+t^2) - t^2}{\sqrt{1+t^2} + t} = \frac{1}{t(\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} + 1)}$ *(quantité conjuguée!)*

     Comme $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} + 1} = \frac{1}{2}$ on en déduit que $\sqrt{1+t^2} - t \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2t}$ et ainsi $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(2t)^\alpha}$

  2. $\sqrt{1+t^2} = t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} =_\infty t(1 + \frac{1}{2t^2} + o_\infty(\frac{1}{t^2})$ *car on sait que* $\sqrt{1+u} =_0 1 + \frac{u}{2} + o_0(u)$

     donc $\sqrt{1+t^2} - t = \frac{1}{2t^2} + o_\infty(\frac{1}{t^2}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2t}$ et ainsi $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(2t)^\alpha}$

263 1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$

   - On a $\lim_0 \frac{\sin^3 t}{t^2} = 0$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ est faussement généralisé, et donc convergente
   - On a pour tout $t \geqslant 1, 0 \leqslant \left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Et comme $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ converge, on peut affirmer que $\int_0^\infty \left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right| dt$ c'est à dire que $\int_1^\infty \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente.
   - On a prouvé que les intégrales $\int_0^1 \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ et $\int_1^\infty \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ convergent : c'est la définition de "l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ converge"

2. La fonction f est C^∞ sur $]0,\pi/2]$, et l'on a $f'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{g(t)}{t^2}$. $f'(t)$ est donc du signe de $g(t)$. On étudie maintenant g ! La fonction $g(t)$ est C^∞ sur $[0,\pi/2]$ et l'on a $g'(t) = -t\sin t < 0$ sur $]0,\pi/2[$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0,\pi/2]$, et comme $g(0) = 0$, on en déduit que sur $]0,\pi/2[$, on a $g(t) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,\pi/2]$.
3. Soit $b > a > 0$ et $x > 0$ suffisamment petit tel que $[ax,bx] \subset]0,\pi/2]$. Sur l'intervalle $[ax,bx]$ la fonction f est donc décroissante, et l'on peut donc écrire que pour
   tout $t \in [ax,bx], f(bx) \leqslant f(t) \leqslant f(ax)$, et donc comme $t > 0$, on a aussi $\frac{f(bx)}{t} \leqslant \frac{\sin t}{t^2} \leqslant \frac{f(ax)}{t}$.
   En intégrant alors par rapport à t sur le segment $[ax,bx]$,
   on obtient : $f(bx)\ln\frac{b}{a} \leqslant F_{a,b}(x) \leqslant f(ax)\ln\frac{b}{a}$. On sait que $\lim_{0^+} f = 1$, on peut donc en déduire à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim_{x \to 0^+} F_{a,b}(x) = \ln\frac{b}{a}$
4. On effectue le changemen de variable $u = -t$, et on prouve ainsi que $F_{a,b}$ est une fonction paire.
5. Comme la fonction $F_{a,b}$ est paire et qu'elle possède une limite en 0^+, alors $F_{a,b}$ possède aussi une limite en 0^- et l'on a $\lim_{0^-} F_{a,b} = \lim_{0^+} F_{a,b} = \ln\frac{b}{a}$.
   Comme $F_{a,b}$ possède une limite à droite et une limite à gauche en 0 et que ces limites sont égales, on peut affirmer que $F_{a,b}$ possède une limite en 0 et que $\lim_0 F_{a,b} = \ln\frac{b}{a}$
6. On linéarise par les méthodes classiques et l'on trouve que $\sin^3 t = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin t$. D'où $\int_\epsilon^\infty \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = -\frac{1}{4}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin 3t}{t^2} dt + \frac{3}{4}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt$.
   Ensuite dans l'intégrale $\int_\epsilon^\infty \frac{\sin 3t}{t^2} dt$ on effectue le changement de variable C^1 bijectif $\theta = 3t$, ce qui nous donne $3\int_{3\epsilon}^\infty \frac{\sin\theta}{\theta^2} d\theta$.
   D'où $\int_\epsilon^\infty \frac{\sin 3t}{t^2} dt = -\frac{3}{4}\int_{3\epsilon}^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt + \frac{3}{4}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{3}{4}\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{3}{4} F_{1,3}(\epsilon)$
7. On a $I = \lim_{\epsilon \to 0^+} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4} F_{1,3}(\epsilon) = \frac{3}{4}\ln 3$