2 Algèbre bilinaire

Produit scalaire

ALG 249
Montrer que $< , >$: $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}dt$ définit un produit scalaire sur $E = C^0([-1,+1],\mathbb{R})$

ALG 250
Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $< P,Q >= P(0).Q(0) + P(1).Q(1)$

1. Calculer $< X^2 - 2X + 1\,, 3X + 2 >$
2. Montrer que $< , >$ est une forme bilinéaire symétrique
3. Montrer que $< , >$ est positive
4. Calculer $< X^2 - X, X^2 - X >$.
   En déduire que $< , >$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ lorsque $n \geqslant 2$
5. Montrer que $< , >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.
6. Déterminer une bon de $\mathbb{R}_1[X]$

ALG 251
On note $E = \mathbb{R}[X]$ et $< P,Q >= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}$

1. Montrer que la série ci-dessus est bien toujours convergente
2. Montrer que $< , >$ est un produit scalaire sur E

ALG 252
On note E l'espace vectoriel des suites réelles 3-périodiques.
On pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} (u_k + k.u_{k+1})(v_k + k.v_{k+1}) \end{array}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel. Donner une base de E
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E
3. Déterminer une bon de E pour le produit scalaire φ

ALG 253
Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $< P,Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire
2. Montrer que la famille $(1, X, 3X^2 - 1)$ est une famille orthogonale.
3. Justifier que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\int_{-1}^{1} \left[a.(3t^2-1) + b.t + c\right]^2 dt = a^2.\int_{-1}^{1} (3t^2-1)^2 dt + b^2.\int_{-1}^{1} t^2.dt + c^2.\int_{-1}^{1} dt$$
4. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$

ALG 254
Sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose $< f,g >= f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Est-ce un produit scalaire sur E?

ALG 255
Soient n et p deux entiers strictement positifs, et $(a_1, \dots, a_p)$ p réels distincts.
On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P(a_k)Q(a_k)$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique positive
2. En considérant le polynôme $R(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - a_k)$,
   montrer que ϕ n'est pas un produit scalaire sur E lorsque $n \geqslant p$
3. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E lorsque $n \leqslant p - 1$

ALG 256
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
Pour tout $\vec{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\Phi(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + ax_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$.
Nous allons chercher une cns sur (a,b,c) pour que ϕ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

1. Justifier que Φ n'est pas défini pour $(a,b,c) = (1,1,1)$
2. Montrer que Φ est bilinéaire
3. Montrer que Φ est symétrique ssi $a = b$
   Dorénavant, on suppose $a = b$
4. Montrer que Φ est positive ssi $c \geqslant a^2$
   (on pourra penser à une mise sous forme canonique)
5. En déduire que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ ssi $a = b$ et $c > a^2$.
   Donner alors une bon de $\mathbb{R}^2$

ALG 257
Soit $(E, < , >)$ un espace préhilbertien.
Soient $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que
$$||\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3||^2 = ||\vec{x}_1||^2 + ||\vec{x}_2||^2 + ||\vec{x}_3||^2 + 2. < \vec{x}_1,\vec{x}_2 > +2. < \vec{x}_1,\vec{x}_3 > +2. < \vec{x}_2,\vec{x}_3 >$$
2. Justifier que d'une manière plus générale
$$||\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\vec{x}_i||^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} < \vec{x}_i,\vec{x}_j >$$

ALG 258 (dans un espace de fonctions, qui formalise les séries de Fourier)
Soit $E = C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f,g >= \int_{[0,2\pi]} fg$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $g_n : t \mapsto \sin(nt)$

1. Montrer la famille $\mathcal{F} = (f_p)_{p \geqslant 0}$ est une famille orthogonale
2. Montrer la famille $\mathcal{G} = (g_p)_{p \geqslant 1}$ est une famille orthogonale
3. $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est-elle une famille orthogonale?

ALG 259
A l'aide de l'ICS, déterminer un majorant de $|x + 2y + 3z|$ sous la condition $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ALG 260
On souhaite déterminer les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui vérifient le système $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n & = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 & = n \end{cases}$.
Pour cela, on va se placer dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $< , >$
On notera également $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (1, 1, \dots, 1)$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz aux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, résoudre la question posée!

ALG 261

Montrer que pour toute fonction f continue et strictement positive sur $[a,b]$, on a

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right).\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \geqslant (b-a)^2$$

Pour quelles fonctions f a-t-on l'égalité?

ALG 262

Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de $(E,<\,,\,>)$.

On va montrer que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux ssi $\forall\lambda\in\mathbb{R}, ||\vec{x}+\lambda\vec{y}|| \geqslant ||\vec{x}||$

1. Montrer que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux alors $\forall\lambda\in\mathbb{R}, ||\vec{x}+\lambda\vec{y}|| \geqslant ||\vec{x}||$
2. On suppose que $\forall\lambda\in\mathbb{R}, ||\vec{x}+\lambda\vec{y}|| \geqslant ||\vec{x}||$
   (a) Justifier que $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \lambda^2 <\vec{y},\vec{y}> +2\lambda<\vec{x},\vec{y}>\geqslant 0$
   (b) En déduire que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux

ALG 263 (un exemple juste destiné à revoir une formule!)

Soit $n\geqslant 1$ un entier fixé.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $<P,Q>=\sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$

Justifier que $<\,,\,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

ALG 264

Soit $(E,<\,,\,>)$ un e.p.r et $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs unitaires tels que:

$$\forall\vec{x}\in E, ||\vec{x}||^2=\sum_1^n <\vec{x},\vec{e_i}>^2$$

1. Montrer que $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ est une famille orthonormale.
2. On note $F=\mathrm{vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$.
   Déterminer $F^\perp$, et en déduire que $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormale de E

ALG 265

Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace euclidien de dimension n, et $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs telle que: $\forall\vec{x}\in E, ||\vec{x}||^2=\sum\limits_1^n <\vec{x},\vec{e_i}>^2$

1. On note $F=\mathrm{vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$. Déterminer $F^\perp$ et en déduire que $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ est une base de E.
2. Démontrer que : $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, $<\vec{x},\vec{y}>=\sum\limits_{i=1}^{n}<\vec{x},\vec{e_i}>.<\vec{y},\vec{e_i}>$ (on pourra développer $||\vec{x}+\vec{y}||^2$)

ALG 266

On considère $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $<P,Q>=P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1)$

1. On note $D=\mathrm{vect}(X-2)$. Déterminer $D^\perp$
2. Soit $F=\{P\in E\,|\,P(3)=0\}$.
   (a) F et D sont-ils deux sev orthogonaux?
   (b) Déterminer $F^\perp$.

ALG 267

Soient F_1 et F_2 deux sev. Montrer que:

1. $(F_1+F_2)^\perp=F_1^\perp\cap F_2^\perp$
2. $F_1^\perp+F_2^\perp\subset(F_1\cap F_2)^\perp$

ALG 268

Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\phi(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

On considère $F=\{f\in E|f(0)=0\}$

1. Soit $f\in F^\perp$
   (a) Montrer que $\int_0^1 t.f^2(t)dt=0$
   (b) En déduire que $f=0$
2. Que vaut $F^\perp$?
3. En déduire $(F^\perp)^\perp$

ALG 269

$(E,<\,,\,>)$ est un espace préhilbertien.

Soit $\vec{a}\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

On souhaite résoudre l'équation $<\vec{a},\vec{x}>=\lambda \quad (C)$

1. Traiter le cas où $\vec{a}=\vec{0}$
2. On considère désormais que $\vec{a}\neq\vec{0}$
   (a) Déterminer une solution particulière $\vec{x}_0$.
   (On pourra chercher $\vec{x}_0$ sur une droite judicieuse)
   (b) En déduire que $\vec{x}$ vérifie (C) ssi $\vec{x}$ est la somme de $\vec{x}_0$ et d'un autre vecteur appartenant à un espace que l'on précisera
   (c) Faire un dessin dans le cas où $E=\mathbb{R}^2$

ALG 270 (Gram-Schmidt)

1. On se place dans $E=\mathbb{R}^4$ muni de son psu.
   Déterminer une base orthonormée de $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x-y-z-t=0\}$
2. On se place dans $E=C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du ps $<f,g>=\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$.
   Orthonormaliser la famille $\mathcal{F}=(t\mapsto 1, t\mapsto |t|, t\mapsto t)$

ALG 271

Soit $E=C^0([-1,1],\mathbb{R})$. Pour f et g dans E, on pose $<f,g>=\int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

(On admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E)

On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.

On rappelle que $\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}=E$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sev orthogonaux.
   A-t-on montré que $\mathcal{P}^\perp=\mathcal{I}$? Sinon qu'a-t-on montré?
2. Soit $f\in\mathcal{P}^\perp$.
   D'après le rappel, on peut dire $\exists!\,(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I}, f=p+i$
   (a) Montrer que $p=0$. Quelle inclusion a-t-on prouvé?
   (b) Que peut-on conclure entre $\mathcal{P}^\perp$ et $\mathcal{I}$?

ALG 272
N désigne un entier compris entre 1 et 4.
On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique (i,j,k,l).

On pose pour tout $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in E$ et $y = (y_1,y_2,y_3,y_4) \in E$, $< x,y >= \sum_{i=1}^{N} i.x_i.y_i$

1. $< , >$ est-il un produit scalaire sur E lorsque $N = 3$?
   Dans la suite on suppose que $N = 4$
2. Justifier que $(E, < , >)$ est un espace euclidien
3. Montrer que le plan $F = \text{vect}((1,1,0,0),(1,0,1,0))$ et la droite $D = \text{vect}((-6,3,2,1))$ sont orthogonaux. A-t-on $F^\perp = D$ ou $F = D^\perp$?

ALG 273
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P,Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.
On admet la propriété $\mathcal{P}$ suivante:
il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ formée de polynômes orthogonaux deux à deux et tels que :

i) P_n est un polynôme de degré n
ii) Le coefficient dominant de P_n vaut 1

1. (a) A l'aide de coefficients inconnus, déterminer P_0, P_1 et P_2
   (b) On donne $P_3 = X^3 - \dfrac{3}{5}X$.
   Vérifier qu'il est bien orthogonal aux trois polynômes que vous avez trouvés.
2. Dans cette question on souhaite montrer que P_n est paire [impaire] lorsque n est pair[impair].
   Pour cela, on pose $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$
   (a) Pour tout $n \neq m$, calculer $< Q_n,Q_m >$
   (b) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n
   (c) Conclure
3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On souhaite montrer dans cette question que $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
   (a) Pour $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, justifier que $< P_{n+1},Q >= 0$ et que $< XP_n,Q >=< P_n,XQ >= 0$
   (b) Conclure
4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geqslant 1$ il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.
   Donner les valeurs de λ_1 et λ_2

ALG 274 (Matrice de Hilbert)
Soit $H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$
On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose pour $(X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $< X,Y >= X^T.H.Y$

1. Vérifier que $\forall i(,j) \in [\![1,n]\!]^2, h_{ij} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}dt$
2. Montrer que pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a $< X,X >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i.x_j.h_{ij} = \int_0^{+1} (\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1})^2 dt$
3. Montrer que $< , >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
4. En déduire que H est une matrice inversible

ALG 275
Pour $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(u,v) = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$
2. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire φ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ orthonormée pour ce produit scalaire

ALG 276 (dans un espace de suites)
On note $l_2(\mathbb{R})$ l'ensemble de suites (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge, càd

$$l_2(\mathbb{R}) = \{u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geqslant 0} u_n^2 \text{ CV } \}$$

Pour u et v éléments de $l_2(\mathbb{R})$, on pose $< u,v >= \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$

1. Montrer que la série $\sum u_n.v_n$ est bien convergente lorsque u et v sont éléments de $l_2(\mathbb{R})$
2. Montrer que $(l_2(\mathbb{R}), < , >)$ est un espace préhilbertien
3. En déduire que pour tout $(u,v) \in l_2(\mathbb{R})^2$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n.v_n\right)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k^2 v_{n-k}^2\right)$

ALG 277
Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ une bon de E
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} < u(e_i),e_i >= 0$
   En déduire qu'il existe $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$ tel que $< u(e_i),e_i >\geqslant 0$ et $< u(e_j),e_j >\leqslant 0$
2. En considérant le fonction $f : t \mapsto< u(te_i + (1-t)e_j,te_i + (1-t)e_j >$, montrer qu'il un vecteur unitaire w tel que $< u(w),w >= 0$
3. En déduire l'existence d'une bon $\mathcal{B}'$ telle que le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de u dans cette base soit nul.
4. Prouver qu'il existe une bon $\mathcal{B}''$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de u dans cette base soient tous nuls.

ALG 278
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (\vec{i} + \vec{k}, -2\vec{i} + 3\vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

ALG 279
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $B = A^T.A$
Pour tout $X,Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(X,Y) = X^T BY$
On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on note $B = (e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
2. Montrer $\mathcal{B}' = (A^{-1}e_1,\ldots,A^{-1}e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour φ
3. Quels sont les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$?

ALG 280

Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $(P,Q) \in E^2$ on pose $< P,Q >= \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

1. Justifier que l'intégrale est bien toujours convergente
2. Justifier que $< , >$ est un produit scalaire sur E
3. On note $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la famille $(1,X,\dots,X^n)$
   (a) Déterminer P_0, P_1 et P_2
   (b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, indiquer à quoi est égal $\mathrm{vect}(P_0,P_1,\dots,P_k)$. En déduire $\deg(P_k)$
   (c) Justifier que $< P_k,P_k{}' >= 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$
   (d) En déduire que $P_k(0)^2 = 1$

ALG 281

Pour A et B éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $< A,B >= \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}$.

On note F l'ensemble des matrices antisymétriques, et M la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Détermier une bon de F.
2. En déduire le projeté orthogonal de M sur F

ALG 282

On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (i,j,k,l)$ et de son produit scalaire usuel.

On note F le sev de $\mathbb{R}^4$ définie par les équations $\begin{cases} x+y+z+t & = 0 \\ x+2y+3z+4t & = 0 \end{cases}$

1. Montrer que F est un plan vectoriel, puis déterminer une bon de F
2. Déterminer $F^{\perp}$. (On donnera des équations, une base et sa dimension)
3. Ecrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F

ALG 283

Soit E un espace euclidien de dimension n et p un projecteur orthogonal de E de rang r. *(càd que p est la projection orthogonale sur un sev F de dimension r)*

On note $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une bon de E et $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$ la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$

1. Montrer que $\forall x \in E, ||p(x)||^2 = (p(x),x)$
2. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} ||p(e_i)||^2 = r$, et en déduire que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 = r$

ALG 284

On considère $\mathbb{R}^4$ muni du psu. On note $(\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{l})$ sa base canonique.

On considère $F = \mathrm{vect}(\vec{i}+\vec{j},\vec{k}-\vec{l})$ et $\vec{x} = (1,2,3,4) = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}+4\vec{l}$

1. Déterminer le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F ainsi que son symétrique orthogonal par rapport à F
2. Déterminer une bon de $F^{\perp}$

ALG 285

Pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on note $f(a,b,c) = \int_{[-1,1]} (\sin(t) - a - bt - ct^2)^2 dt$

1. Interpréter $f(a,b,c)$ en terme de distance
2. Justifier que le minimum de $f(a,b,c)$ est $\int_{-1}^{1} \sin^2(t)dt - 6(\sin 1 - \cos 1)^2$.
   Pour quelle(s) valeur(s) est-il obtenu?

ALG 286

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et F le plan d'équation $x - y + z$

Déterminer la matrice, dans la base canonique de E, de la projection orthogonale sur F.

(on pourra s'intéresser à la projection sur $F^{\perp}$)

ALG 287

Soit $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$.

On note:

- $G = \{g \in E \,, g'' = g\}$
- $H = \{h \in E \,, h(0) = h(1) = 0\}$
- $< f,g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)dt$

1. Justifier que (ch , sh) est une base de G
2. Vérifier que H est un sev de E
3. Vérifier que $< , >$ est un produit scalaire sur E
4. Montrer que $\forall f \in E, \forall g \in G, < f,g >= f(1)g'(1) - f(0)g'(0)$
5. Montrer que $H = G^{\perp}$
6. Soit $f \in E$.
   Déterminer le projeté orthogonal de f sur G

ALG 288

1. Montrer que $E = \{f \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R}) \,, f(0) = 0 \,, f \text{ bornée}\}$ est un espace vectoriel
2. Montrer que pour tout $(f,g) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}dt$ existe
3. Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}dt$ est un produit scalaire sue E
4. Montrer que $\forall (f,g) \in E^2, \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}dt = \int_0^{\infty} \frac{f'(t)g(t) + f(t)g'(t)}{t}dt$
5. On note $G = \mathrm{vect}(g_1,g_2)$ où $g_k : t \mapsto 1 - e^{-kt}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$
   Déterminer la projection orthogonale de $f \in E$ sur G

ALG 289

Soit a un paramètre réel. On considère le système (S) : $\begin{cases} x+y & = 4 \\ -x-y & = a \\ x-z & = 1 \end{cases}$

1. Montrer que le système (S) est compatible ssi $\begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$
2. On suppose que $a = 2$, on souhaite fournir une solution approchée du système.
   (a) Quel est le projeté orthogonal du vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur le plan $\mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$?
   (b) En déduire les solutions approchées du système. Combien en existe-t-il?

ALG 290
On considère l'espace euclidien $(E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),<,>)$ défini par $<A,B>=\mathrm{tr}(A^T.B)$
On note $\mathcal{A}_n$ [resp. $\mathcal{S}_n$] l'espace vectoriel des matrice antisymétriques [resp. symétriques] d'ordre n

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont orthogonaux
2. On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n\oplus\mathcal{A}_n$.
   Donner pour toute matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la décomposition associée.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $B\in E$ sur l'espace $\mathcal{S}_n$
   Application: cas où $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
4. Montrer que $d(B,\mathcal{S}_n)=\dfrac{1}{2}||B-B^T||$ pour tout $B\in E$

ALG 291 (inégalité de Bessel)
Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien et $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$ une famille orthonormale.
On note $F=\mathrm{vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$

1. Montrer que pour tout $\vec{x}\in E, ||p_F(\vec{x})||^2\leqslant||\vec{x}||^2$
2. En déduire que pour tout $\vec{x}\in E, \sum\limits_{i=1}^{p}<\vec{e}_i,\vec{x}>^2\leqslant||\vec{x}||^2$

ALG 292

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan P_1 d'équation $2x-y+z=0$.
2. Même question avec P_2 d'équation $y=0$
3. Etudier la composée de ces deux symétries orthogonales

ALG 293
Soit $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\lambda\neq0$. On définit l'application f par $f(\vec{x})=\vec{x}+\lambda<\vec{x},\vec{v}>\vec{v}$
Déterminer une CNS sur λ pour que $f\in O(E)$. Reconnaître alors l'application f.
(on pourra déterminer $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$)

ALG 294
Soit $(E,(|))$ un espace euclidien et $f:E\to E$ une application linéaire qui conserve l'orthogonalité.
C'est à dire que $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,(\vec{x}|\vec{y})=0\Rightarrow(f(\vec{x})|f(\vec{y}))=0$

1. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs unitaires, calculer $(\vec{u}+\vec{v}|\vec{u}-\vec{v})$
2. Montrer que pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs unitaires, on a $||f(\vec{u})||=||f(\vec{v})||$
3. En déduire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}^+,\forall\vec{x}\in E,||f(\vec{x})||=\alpha||\vec{x}||$
4. Montrer qu'il existe $g\in O(E)$ tel que $f=\alpha.g$

ALG 295
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu, on considère la réflexion échangeant $\vec{u}=(1,-2,3)$ et $\vec{v}=(-2,3,1)$.
Indiquer le plan par rapport auquel s'effectue la réflexion.

ALG 296 (très classique)
Soit $(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
Montrer que $|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}|\leqslant n$
indication: On considérera $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel, ainsi que* f *l'endomorphisme canoniquement associé à* A*. On pourra alors montrer que* $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}$ *est le produit scalaire entre* $\vec{e}_1+\cdots+\vec{e}_n$ *et un autre vecteur... puis appliquer une fameuse inégalité!*

ALG 297
Soit E un espace euclidien, $f\in O(E)$ et $g=id_E-f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,g$ et $\ker g$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E
2. Pour tout $q\geqslant1$ on note $S_q=\frac{1}{q}(id_E+f+f^2+\cdots+f^{q-1})$
   (a) Donner une expression très simple de $S_q(\vec{x}_1)$ pour $\vec{x}_1\in\ker(g)$
   (b) Donner une expression très simple de $S_q(\vec{x}_2)$ pour $\vec{x}_2\in im(g)$
   (c) Justifier avec soin que $\lim\limits_{q\to+\infty}S_q$ est une certaine projection dont on donnera les éléments

ALG 298

1. Montrer que, sur $\mathbb{R}_3[X]$, $<P,Q>=\int_{-1}^{+1}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire.
2. En déduire $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^{+1}(t^3-at^2-bt-c)^2dt$ *(on trouvera* $8/175$*)*

ALG 299

1. Montrer que, sur $\mathbb{R}_2[X]$, $<P,Q>=\int_{-1}^{+1}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire.
2. Déterminer le projeté orthogonal sur $F=\mathrm{vect}(1,X)$ de X^2
3. En déduire $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{+1}(t^2+at+b)^2dt$

ALG 300

1. Montrer que, sur $\mathbb{R}_3[X]$, $<P,Q>=\int_{-1}^{+1}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire.
2. Déterminer le projeté orthogonal sur $F=\mathrm{vect}(1,X,X^2)$ de X^3

ALG 301
Soit $n\geqslant2$ un entier et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
On identifie dans cet exercice les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices unicolonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Pour tout $(X,Y)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ on pose $\phi(X,Y)=X^TAY$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique
2. Dans cette question, on prend $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&\lambda\end{pmatrix}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$
   (a) Vérifier que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x+2y)^2+(\lambda-4)y^2$
   (b) En déduire que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ ssi $\lambda>4$
3. Dans cette question, on suppose que A est diagonalisable et on écrit $A=PDP^{-1}$
   (a) Dans le cas particulier où $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, sans calculer A, donner un vecteur non nul X tel que $AX=0$ et en déduire que ϕ n'est pas un ps
   (b) Dans le cas général, montrer que si A possède une valeur propre négative ou nulle alors ϕ n'est pas un ps.

ALG 302
Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien et $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une bon.
On considère un vecteur non nul $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+\cdots+a_n\vec{e}_n$.
On note D la droite dirigée par $\vec{a}$ et f la projection orthogonale sur D.

1. Calculer $f(\vec{e}_j)$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$
2. En déduire la matrice $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

   Comment pourrait-on simplement l'écrire à l'aide de la matrice unicolonne $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$?

ALG 303
Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace euclidien. et F un sev de E.
On note $\mathcal{B}$ [resp. $\mathcal{B}'$] une bon de F [resp. $F^{\perp}$].
Montrer que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une bon de E

ALG 304 (la seule valeur propre réelle possible d'une matrice antisymétrique est 0)
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre n.
On suppose que A possède une valeur propre réelle λ, et on note X un vecteur propre associé.
En calculant de deux manières différentes $X^T A^T A X$, montrer que $\lambda = 0$

ALG 305
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que $\ker(A^T.A) = \ker A$

1. Montrer l'inclusion évidente.
2. Soit $X \in \ker(A^T A)$. Déterminer $||AX||^2$ et conclure
3. En déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^T A)$

ALG 306
Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n$

ALG 307
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \alpha & -\beta \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & \beta \\ 0 & \gamma & 2\beta \end{pmatrix}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de α, β et γ cette matrice est-elle orthogonale?

ALG 308
Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n. On pose $B = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.
Montrer que B est une matrice orthogonale.

ALG 309
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu,
on considère $\vec{\omega}$ un vecteur unitaire et l'application $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x} + <\vec{\omega}, \vec{x}> \vec{\omega}$

1. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal
2. Ecrire la matrice de f dans une bond bien choisie, et en déduire la nature de f

ALG 310 (rotation=produit de deux réflexions)
On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une bond de E.
On note :

- $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$
- $\vec{n}_2 = \cos\alpha.\vec{e}_1 + \sin\alpha.\vec{e}_2$ où α est un réel fixé.
- P_1 [resp. P_2] le plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ [resp. $\vec{n}_2$]
- s_1 [resp. s_2] la réflexion par rapport au plan P_1 [resp. P_2]

1. Ecrire les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de s_1, s_2 et $s_2 \circ s_1$
2. Reconnaitre l'isométrie vectorielle $s_2 \circ s_1$

ALG 311
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, et on identifie. . . .
Le produit scalaire sera noté $(|)$ et on a donc $(X|Y) = X^T.Y)$
Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. montrer que les valeurs propres de $B = A^T A$ sont positives.
2. montrer que si la famille $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$, et si la famille $\{AX_1, \ldots, AX$
   est une famille orthogonale, alors chaque X_i est un vecteur propre de B

ALG 312
On considère $E = \mathcal{M}_n((\mathbb{R}))$ muni du ps $< A,B >= \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{ij} = \operatorname{tr}(A^T.B)$
On note $H = \{M = (m_{ij}) \in E \mid \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = 0\}$.
Déterminer $H^{\perp}$ *(on pourra considérer la matrice Attila. . .)*

ALG 313
On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P,Q >= \sum\limits_{i=-1}^{2} P(i).Q(i)$
Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(X^2, X, 1)$

ALG 314
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du psu. On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$ sa base canonique.
On considère $F = \operatorname{vect}(\vec{i} + \vec{j}, \vec{k} - \vec{l})$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F, puis de la symétrie orthogonale par rapport à F
2. Déterminer une bon de $F^{\perp}$

ALG 315 (endomorphismes antisymétriques)
Soit $(E,.)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, f(x).x = 0$
On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une bon de E, et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$

1. Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x).y = -x.f(y)$
   (on pourra considérer $f(x+y).(x+y)$*)*
2. Montrer que A est une matrice antisymétrique
3. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires orthogonaux
4. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f et que la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ est bijective
5. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$, on veut montrer qu'il existe $\omega \in E$ tel que $\forall x \in E, f(x) = \omega \wedge x$.
   On note $\mathcal{B} = (i,j,k)$ une bond de E
   et on considère $\omega = a.i + b.j + c.k$ ainsi que $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \omega \wedge x \end{array}$
   (a) Ecrire la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$
   (b) Justifier qu'il existe $\omega \in E$ tel que $\forall x \in E, f(x) = \omega \wedge x$.

ALG 316
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu et de sa base canonique, on considère une rotation f tq $\begin{cases} f(i - j + k) & = i - j + k \\ f(i) & = k \end{cases}$

1. Déterminer l'axe de la rotation. Donner un vecteur w qui dirige l'axe de rotation
2. On note $P = D^{\perp}$
   (a) Déterminer le projeté orthogonal de i et celui de k sur P
   (b) Déterminer une bond (u,v,w) telle que $i \in \operatorname{vect}(u,w)$
   (c) Sachant que $r(u) = \cos\theta.u + \sin\theta.v$, déterminer l'angle θ de cette rotation.

ALG 317 (endomorphismes symétriques)
Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x),y >=< x,f(y) >$

1. Montrer que $(\ker f)^\perp = \mathrm{Im}(f)$
2. On suppose que $E_1 \oplus E_2 = E$ et on note p la projection sur E_1 parallèlement à E_2
   (a) Montrer que si p est une projection orthogonale alors $\forall (x,y) \in E^2,\ < p(x),y >=< x,p(y) >$
   (b) Etudier la réciproque
3. On note A la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E.
   Justifier que A est une matrice symétrique
4. En déduire que f est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f

ALG 318
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigée par $\vec{i} - 2\vec{j}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$

ALG 319
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Que dire de f ?
2. Montrer qu'il existe des projections orthogonales p et q, et deux réels λ et μ tels que :

$$f = \lambda p + \mu q \qquad p \circ q = 0 \qquad p + q = id$$

ALG 320
Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n.
On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.
Avec la notations habituelles, on introduit les matrices P et D telles que $A = PDP^T$.
Pour toute matrice unicolonne X, on pose $Y = P^T.X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que $||Y|| = ||X||$
2. Montrer que $X^TAX = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$
3. En déduire que pour toute matrice unicolonne X on a $\lambda_1 ||X||^2 \leqslant X^TAX \leqslant \lambda_n ||X||^2$
4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_2$ et que $\lambda_{n-2} < \lambda_{n-1} = \lambda_n$.
   (a) Déterminer les X tels que $\lambda_1 ||X||^2 = X^TAX$
   (b) Déterminer les X tels que $\lambda_n ||X||^2 = X^TAX$

ALG 321
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère f la rotation d'axe $D = \mathrm{vect}\, u$ avec u unitaire et d'angle θ.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a

$$f(x) = (1 - \cos\theta).< x,u > .u + \cos(\theta).x + \sin(\theta).u \wedge x$$

ALG 322
Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$.
Montrer que f est diagonalisable ssi $f^2 = id_E$

ALG 323
Soit $\mathcal{B}$ une bon de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
Soit $\vec{n} \neq \vec{0}$ un vecteur de E:

- on note N sa matrice unicolonne associée dans la base $\mathcal{B}$
- on note $D = \mathrm{vect}\, \vec{n}$ la droite dirigée par $\vec{n}$
- on note $H = D^\perp$ (*H est donc un hyperplan de vecteur normal $\vec{n}$*)

Nous allons montrer que: $\boxed{H \text{ est stable par } f \text{ ssi } N \text{ est vecteur propre de } A^T}$

1. On suppose que N est vecteur propre de A^T
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), N^TAX = \lambda.N^TX$
   (b) Traduisez en terme de vecteurs et endomorphismes la propriété ci-dessus
   (c) En déduire l'implication $(\vec{x} \in H \Longrightarrow f(\vec{x}) \in H)$
2. On suppose que H est stable par f.
   (a) Expliquer pourquoi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A^TN = \lambda N + Z$ et $N^TZ = 0$
   (b) Calculer de deux manières différentes Z^TA^TN, et en déduire que $Z = 0$
   (c) Conclure
3. Application: déterminer tous les sev stables par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ALG 324
Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs structures euclidiennes usuelles.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et $b \in \mathbb{R}^p$
On note respectivement A et B leurs matrices dans les bases canoniques adéquates.
On suppose que $b \notin Im(f)$.
On souhaite déterminer les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $||f(x) - b||$ soit minimale.

1. Montrer que ce problème de minimisation possède au moins une solution x_0 qui est caractérisé par $f(x_0) - b \in (Im(f))^\perp$
2. Montrer que la condition ci-dessus équivaut à la condition $A^TAX_0 = A^TB$
3. Dans le cas où A^TA est inversible, donner une expression simple de X_0

ALG 325
On considère la matrice $G = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ -8 & 5 & 6 \\ 6 & -10 & 8 \end{pmatrix}$.
On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. La matrice G est-elle orthogonale?
2. On note $\vec{u}_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0,)$ $\quad \vec{u}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}(1,1,-4)$ et $\vec{u}_3 = \dfrac{1}{3}(2,2,1)$
   Vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{u}_3 \in \ker g$ et que dans cette base $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G'$
3. Montrer que g est la composée d'une projection orthogonale et d'une rotation.

ALG 326
Après avoir vérifié que les matrices sont orthogonales, déterminer la nature et les éléments géométriques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&-1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{pmatrix}\quad D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

$$E=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8&1&-4\\-4&4&-7\\1&8&4\end{pmatrix}\quad F=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\quad G=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&3&-\sqrt{6}\\3&-1&-\sqrt{6}\\\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{pmatrix}$$

$$H=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}\quad I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&2&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

ALG 327
Soit $(E,<\ ,\ >)$ un espace euclidien.
On considère s, la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathrm{vect}\,\vec{n})^\perp$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire donné. Une base orthonormale $\mathcal{B}$ étant fixée, on note N la matrice unicolonne des coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est $I-2NN^T$
2. application: On suppose que $\dim E=3$ et on note $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une bon de E.
   On considère le plan d'équation $x+y-2z=0$.
   Ecrire la matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de la réflexion par rapport au plan P

ALG 328
Justifier que la matrice $\begin{pmatrix}3+i&5&4\\5&1+i&-1\\4&-1&-2+i\end{pmatrix}$ est inversible.

ALG 329

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^n=1$ avec $n\in\mathbb{N}^*$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n=1$ avec $n\in\mathbb{N}^*$
3. Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{2024}=I_n$. Que dire de M^2 ?
4. Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{2025}=I_n$. Que dire de M ?

ALG 330
Soit $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}23&2&-4\\2&26&2\\-4&2&23\end{pmatrix}$. *(On trouve $\chi_A(X)=X^3-8X^2+21X-18=(X-2)(X-3)^2$.)*
Diagonaliser A en utilisant une matrice orthogonale de déterminant positif.
(Sera-ce plus simple de déterminer déjà E_3 ou E_2 ?)

ALG 331 (méthode des moindres carrés)
On considère n points du plan $A_i(x_i,y_i)$. On souhaite déterminer la droite D d'équation $y=ax+b$ qui minimise la somme des carrés des distances verticales entre un point et la droite,
c'est à dire on souhaite déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^n(y_i-ax_i-b)^2$$

On se place dans $E=\mathbb{R}^n$ muni du psu.
On note $Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ ainsi que $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et $U=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$
On note $F=\mathrm{vect}(X,U)$ On suppose que les x_i ne sont pas tous égaux (hypothèse (H))

1. Interpréter géométriquement l'hypothèse (H). Que vaut $\dim F$?
2. On note a_0X+b_0U le projeté orthogonal de Y sur F.
   (a) Montrer que $<Y-a_0X-b_0U,X>=<Y-a_0X-b_0U,U>=0$ $(*)$
   (b) Montrer que matriciellement $(*)$ s'écrit $\underbrace{\begin{pmatrix}\|X\|^2&<U,X>\\<U,X>&\|U\|^2\end{pmatrix}}_{=M}.\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<Y,X>\\<Y,U>\end{pmatrix}$
   (c) Calculer $\det(M)$ et justifier que, grâce à l'hypothèse (H), on peut affirmer que $\det(M)\neq 0$
   (d) En déduire que (a_0,b_0) vérifie le système $\begin{cases}a_0.\sum_{i=1}^n x_i^2+b_0.\sum_{i=1}^n x_i&=\sum_{i=1}^n x_iy_i\\a_0..\sum_{i=1}^n x_i+n.b_0&=\sum_{i=1}^n y_i\end{cases}$
   (e) Il est d'usage de noter en Statistique

$$\mu_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\qquad\mu_y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\qquad\mu_{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\quad\text{et}\quad\mu_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

   Montrer que $\boxed{a_0=\dfrac{\mu_{xy}-\mu_x.\mu_y}{\mu_{x^2}-\mu_x^2}\text{ et }b_0=\mu_y-a_0.\mu_x}$

FIN des exercices ALG !

QUELQUES CORRIGÉS

254 **Nous allons utiliser dans cet exercice le théorème suivant d'intégration:**
Soit f une *fonction continue et de signe constant le segment* $[a,b]$. Alors:

i) si f est positive alors $\int_a^b f \geqslant 0$

ii) si f est négative alors $\int_a^b f \leqslant 0$

iii) $\int_a^b f = 0$ ssi f est (identiquement) nulle sur $[a,b]$

- On note $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et on pose pour tout f et g de E: $< f,g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'g'$
- **Le crochet est linéaire à droite.**
  En effet, soient $(f,g_1,g_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a
  $$< f,\lambda g_1 + g_2 >= f(0).(\lambda g_1(0) + g_2(0)) + \int_0^1 f'(\lambda g_1 + g_2)' = \lambda f(0)g_1(0) + f(0)g_2(0) + \int_0^1 \lambda f'g_1' + f'g_2'$$
  Or par linéarité de l'intégrale on peut écrire
  $$\int_0^1 \lambda f'g_1' + f'g_2' = \lambda \int_0^1 f'g_1' + \int_0^1 f'g_2'$$
  On obtient donc
  $$< f,\lambda g_1 + g_2 >= \lambda f(0)g_1(0) + f(0)g_2(0) + \lambda \int_0^1 f'g_1' + \int_0^1 f'g_2' = \lambda(f(0)g_1(0) + \int_0^1 f'g_1') + f(0)g_2(0) + \int_0^1 f'g_2'$$
  Au final on a donc établi que
  $$< f,\lambda g_1 + g_2 >= \lambda < f,g_1 > + < f,g_2 >$$
- **Le crochet est symétrique.**
  En effet, soit $(f,g) \in E^2$. Comme la multiplication interne dans $\mathbb{R}$ est commutative on a
  $$< g,f >= g(0)f(0) + \int_0^1 g'f' = f(0)g(0) + \int_0^1 f'g' =< f,g >$$
  On a prouvé que le crochet est symétrique et linéaire à droite, il est donc aussi linéaire à gauche.
- **Le crochet est positif**
  En effet, soit $f \in E$.
  Comme f est une fonction à valeurs réelles, on a $f(0)^2 \geqslant 0$
  Comme f' est une fonction continue sur $[0,1]$, et à valeurs réelles, on peut dire que $(f')^2$ est une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs positives. Or l'intégrale d'une fonction positive est positive(cf.théorème ci-dessus) donc $\int_0^1 (f')^2 \geqslant 0$
  On a prouvé que $< f,f >$ était la somme de deux termes positifs, donc $< f,f >\geqslant 0$
- **Le crochet est défini.**
  Soit $f \in E$ tel que $< f,f >= 0$.
  On a donc
  $$f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2 = 0$$
  Une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul, on a donc
  $$f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 (f')^2 = 0$$

La fonction $(f')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, et $\int_0^1 (f'(t))^2 = 0$ donc d'après **le théorème de l'intégrale nulle**, on peut affirmer que $(f')^2$ est nulle sur $[0,1]$, c'est à dire que f' est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.
Ainsi f est une fonction constante sur $[0,1]$, et comme $f(0) = 0$, on a bien montré que f était la fonction constante nulle sur $[0,1]$, c'est à dire $f = 0$. cqfd

261 • Il s'agissait de penser à la quatrième question de l'exemple 9 corrigé en classe.

- On considère l'espace préhilbertien réel $(E, < , >)$ avec $\boxed{E = C^0([a,b],\mathbb{R})}$ et
  $$\boxed{\begin{array}{llll} < , >: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (g,h) & \longmapsto & < g,h >= \int_{[a,b]} gh \end{array}}$$
- Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$
  On considère les fonctions $g = \sqrt{f}$ et $h = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$.
  Ces fonctions sont bien définies sur $[a,b]$ et elles y sont continues, ce sont donc deux éléments de E.
  En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz aux fonctions g et h cela donne
  $$||g||.||h|| \geqslant | < g,h > |$$
  Comme les deux membres de cette inégalité sont **positifs**, elle équivaut à
  $$||g||^2.||f||^2 \geqslant | < g,h > |^2 =< g,h >^2$$
- Or $||g||^2 =< g,g >= \int_a^b g^2 = \int_a^b f$ et $||h||^2 =< h,h >= \int_a^b h^2 = \int_a^b \dfrac{1}{f}$
  et $< g,h >= \int_a^b gh = \int_a^b 1.dt = b - a$
- On trouve ainsi que $\boxed{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) \geqslant (b-a)^2}$
- Le cas d'égalité correspond aux fonctions g et h liées.
  Comme la fonction $h \neq 0$ ceci équivaut à dire qu'il existe un scalaire λ tel que $g = \lambda.h$,
  soit encore qu'il existe un scalaire λ tel que $\dfrac{g}{h} = \lambda$, c'est à dire $f = \lambda$.
  Conclusion: $\boxed{\text{il y a égalité ssi } f \text{ est une fonction constante}}$

262 Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs d'un espace préhilbertien.
Commençons par remarquer que si $\vec{y} = \vec{0}$ l'équivalence est trivialement vérifiée.
On supposera donc dans la suite que $\vec{y} \neq \vec{0}$

1. On suppose que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les vecteurs $\vec{x}$ et $\lambda\vec{y}$ qui sont orthogonaux, et d'après le théorème de Pythagore on peut affirmer que $||\vec{x} + \lambda\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\lambda\vec{y}||^2 \geqslant ||\vec{x}||^2$.
   Et donc on obtient bien que $\forall\lambda \in \mathbb{R}, ||\vec{x} + \lambda\vec{y}|| \geqslant ||\vec{x}||$

2. On suppose que $\forall\lambda \in \mathbb{R}, ||\vec{x} + \lambda\vec{y}|| \geqslant ||\vec{x}||$.
   Ce qui équivaut à dire, les deux membre étant positifs, que $||\vec{x} + \lambda\vec{y}||^2 \geqslant ||\vec{x}||^2$.
   on sait que
   $$||\vec{x} + \lambda\vec{y}||^2 =< \vec{x} + \lambda\vec{y},\vec{x} + \lambda\vec{y} >=< \vec{x},\vec{x} > +2\lambda < \vec{x},\vec{y} > +\lambda^2 < \vec{y},\vec{y} >$$

La condition équivaut donc à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 < \vec{y},\vec{y} > +2\lambda < \vec{x},\vec{y} > \geqslant 0$$

Comme $\vec{y} \neq \vec{0}$ on a $< \vec{y},\vec{y} > \neq 0$, et ainsi l'application $\lambda \mapsto \lambda^2 < \vec{y},\vec{y} > +2\lambda < \vec{x},\vec{y} >$ est **un polynôme du second degré qui est toujours positif, il s'agit donc d'un polynôme du second degré qui ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$: son discriminant est forcément inférieur ou égal à zéro**. Or $\Delta = 4 < \vec{x},\vec{y} >^2 \geqslant 0$. On a donc forcément $< \vec{x},\vec{y} >= 0$: les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont forcément orthogonaux!

265 1. • Soit $\vec{x} \in F^{\perp}$.
Comme chaque $\vec{e}_i$ est un élément de F, on a $< \vec{x},\vec{e}_i >= 0$.
Ainsi, on trouve que $||\vec{x}||^2 = \sum_{i=1}^{n} < \vec{x},\vec{e}_i >^2 = 0$. Et donc $\vec{x} = \vec{0}$
On a donc prouvé que $F^{\perp} \subset \{\vec{0}\}$

- l'inclusion réciproque est immédiate car on sait que $F^{\perp}$ est un sev.
  $\boxed{\text{Conclusion: } F^{\perp} = \{\vec{0}\}}$

- Comme E est un espace euclidien et que F est un sev de E on sait par théorème que $F \oplus F^{\perp} = E$. Comme $F^{\perp} = \{\vec{0}\}$, on peut en déduire que $F = E$.

- On a donc $E = \text{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
  La famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est ainsi une famille génératrice de E avec $card(\mathcal{F}) = n = \dim E$, on peut affirmer que cette famille est une base de E.
  $\boxed{\text{Conclusion: } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ est une base de } E}$

2. On va suivre l'indication donnée.
Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E quelconque.

- On sait d'une part que
$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2 < \vec{x},\vec{y} > \qquad (1)$$

- D'autre part, dans cet exercice, on a
$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 = \sum_{i=1}^{n} < \vec{x}+\vec{y},\vec{e}_i >^2$$

- Or
$$< \vec{x}+\vec{y},\vec{e}_i >^2 = (< \vec{x},\vec{e}_i > + < \vec{y},\vec{e}_i >)^2 = < \vec{x},\vec{e}_i >^2 + < \vec{y},\vec{e}_i >^2 + 2 < \vec{x},\vec{e}_i >< \vec{y},\vec{e}_i >$$
Ainsi
$$\sum_{i=1}^{n} < \vec{x}+\vec{y},\vec{e}_i >^2 = \sum_{i=1}^{n} < \vec{x},\vec{e}_i >^2 + \sum_{i=1}^{n} < \vec{y},\vec{e}_i >^2 + 2\sum_{i=1}^{n} < \vec{x},\vec{e}_i >< \vec{y},\vec{e}_i >$$
d'où
$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\sum_{i=1}^{n} < \vec{x},\vec{e}_i >< \vec{y},\vec{e}_i > \qquad (2)$$

- En faisant (1) -(2), on trouve que $\boxed{< \vec{x},\vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} < \vec{x},\vec{e}_i >< \vec{y},\vec{e}_i >}$

269 On va faire une discussion suivant $(\vec{a},\lambda) \in E \times \mathbb{R}$

- si $(\vec{a},\lambda) = (\vec{0},0)$, tout vecteur $\vec{x}$ de E est solution!
- si $\vec{a} = 0$ et $\lambda \neq 0$, aucun vecteur $\vec{x}$ de E n'est solution!
- si $\vec{a} \neq \vec{0}$.
  – On commence par déterminer un $\vec{x}$ qui marche. Il est clair que $\vec{x}_0 = \dfrac{\lambda}{||\vec{a}||^2}\vec{a}$ est solution.
  – On a les équivalences:
  $$(\vec{a},\vec{x}) = \lambda \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{x}) = (\vec{a},\vec{x}_0) \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{x}-\vec{x}_0) = 0 \Leftrightarrow \vec{x}-\vec{x}_0 \in \vec{a}^{\perp}$$
  – On a donc l'ensemble des solutions cherché qui est $\boxed{\{\vec{x}_0 + \vec{y} | \vec{y} \in \vec{a}^{\perp}\}}$
  – *on reconnait un espace affine de direction* $\vec{a}^{\perp} = (\text{vect}\,\vec{a})^{\perp}$
  – $\vec{a}^{\perp} = (\text{vect}\,\vec{a})^{\perp}$ est un hyperplan de E,

271 1. Vérification classique faite en classe

2. • Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont orthogonaux.
Soit $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$. On a, en effectuant le changement de variable $\theta = -t$ dans l'intégrale:
$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t) = \int_{1}^{-1} -f(-\theta)g(-\theta)d\theta = \int_{-1}^{1} f(-\theta)g(-\theta)d\theta$$
Comme f est paire et une fonction impaire cela donne
$$< f,g >= \int_{-1}^{1} -f(\theta)g(\theta)d\theta = -\int_{-1}^{1} f(\theta)g(\theta)d\theta = -< f,g >$$
Ce qui prouve que $< f,g >= 0$!
remarque importante:
on sait que par définition $\mathcal{P}^{\perp}$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de $\mathcal{P}$. Le calcul précédent montre que les vecteurs de $\mathcal{I}$ sont des vecteurs de $\mathcal{P}^{\perp}$, mais il ne prouve pas que ce sont les seuls vecteurs à avoir cette propriété.
A ce niveau de la démonstration on sait seulement que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^{\perp}$

• **Montrons maintenant que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dan** E

i) Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont orthogonaux on peut affirmer qu'ils sont en somme directe.
ii) Montrons que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$
(c'est à dire, montrons que tout élément $f \in E$ s'écrit $g + h$ avec $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$)
Pour cela on raisonne par analyse-synthèse.
Soit f une fonction de E:

– Analyse: on suppose que $f = g + h$ avec $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$
On a alors pour tout $t \in [-1,+1]$,
$f(t) = g(t) + h(t)$ et $f(-t) = g(-t) + h(-t) = g(t) - h(t)$
En faisant la demie-somme et la demie-différence cela donne
$$\forall t \in [-1,+1], \begin{cases} g(t) &= \dfrac{f(t)+f(-t)}{2} \\ h(t) &= \dfrac{f(t)-f(-t)}{2} \end{cases}$$

– Synthèse: on considère les fonctions g et h définies ci-dessus.
  – $g \in \mathcal{P}$ car $\forall t \in [-1,+1], g(-t) = \dfrac{f(-t)+f(-(-t))}{2} = \dfrac{f(-t)+f(t)}{2} = g(t)$

– $h \in \mathcal{I}$ car $\forall t \in [-1,+1], h(-t) = \dfrac{f(-t)-f(-(-t))}{2} = \dfrac{f(-t)-f(t)}{2} = -h(t)$

– $f = g+h$ car $\forall t \in [-1,+1], g(t)+h(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2} + \dfrac{f(t)-f(-t)}{2} = f(t)$

On a bien justifié qu'il existe $(g,h) \in \mathcal{P}\times\mathcal{I}, f = g+h$

- **Montrons l'inclusion** $\mathcal{P}^\perp \subset \mathcal{I}$
  Soit $f \in \mathcal{P}^\perp$
  Comme $\mathcal{P}^\perp \subset E$ et que $E = \mathcal{P}+\mathcal{I}$, on sait qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g+h$. Considérons alors le produit scalaire $< f,g >$!
  On a $< f,g >=< g+h,g >=< g,g > + < h,g >$. Or $< f,g >= 0$ car $g \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathcal{P}^\perp$, et $< g,h >= 0$ car $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$. Il nous reste donc $< g,g >= 0$, ce qui équivaut à dire que $g = 0$, et ainsi que $f = h$!. Ceci prouve que $f \in \mathcal{I}$

3. pour éviter des confusions, nous allons noter s (plutôt que g) l'application $s : f \mapsto \widehat{f}$
   (a) **première idée:**
   on va montrer que $s \circ s = id$ puis utiliser ce que l'on sait sur les endomorphismes involutifs!
   - On a $s \circ s = id$.
     En effet pour toute fonction f de E et tout $x \in [-1,+1]$ cela donne
     $$(s\circ s)(f)(x) = s(s(f))(x) = f(-(-x)) = f(x)$$
     De plus la linéarité de s ne faisant aucun doute, on a bien justifié que s est un endomorphisme involutif.
   - On sait alors par théorème que s est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(s-id)$ parallèlement à $\ker(s+id)$
     $\ker(s-id)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants, c'est à dire les fonctions f de E telles $\forall x \in [-1,+1], s(f)(x) = f(-x) = f(x)$. On reconnait l'ensemble $\mathcal{P}$
     De même, on justifie que $\ker(s+id) = \mathcal{I}$
   - On vient de prouver que s était la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$, on peut affirmer que s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$

   (b) **seconde idée:** on utilise la décomposition trouvée à la question 2
   Avec la décomposition de la question 2, en écrivant $f = g+h$,
   cela donne $\forall x \in [-1,1], \widehat{f}(x) = f(-x) = g(-x)+h(-x) = g(x)-h(x) = (g-h)(x)$
   Et ceci prouve que $\widehat{f} = g-h$
   Ainsi on a $\boxed{\begin{array}{rcl} s : E = \mathcal{P}\oplus\mathcal{P}^\perp & \longrightarrow & E \\ f = g+h & \longmapsto & g-h \end{array}}$
   On reconnait bien la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$

292 Nous allons utiliser la formule de la réflexion de la méthode 1 du polycopié.
Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'hyperplan H, on a pour tout

$$\boxed{\vec{x} \in E,\, S_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2 < \vec{x},\vec{n} > \vec{n}}$$

. En appliquant cette formule on trouve respectivement

1. $\vec{n} = \dfrac{2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}$ et $A_1 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\vec{n} = \vec{j}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Notons s_1 [s_2] la première [seconde] réflexion
   Notons $r = s_2 \circ s_1$
   - Déjà on sait que r est une rotation car c'est la composée de deux isométries vectorielles et que $\det(r) = \det(s_2).\det(s_1) = (-1)^2 = 1$
   - La matrice de r dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $A_2A_1 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

     On déroule alors la méthode standard et on trouve que $\boxed{r = s_2 \circ s_1 \text{ est la rotation d'axe } \vec{i}-2\vec{k}}$
     et d'angle θ tel que $\begin{cases} \cos\theta & = \dfrac{-2}{3} \\ \sin\theta & = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$
     Il s'agit d'un angle qui est dans l'intervalle $]\pi/2,\pi[$, il s'agit donc de $\boxed{\theta = \arccos(-2/3)}$
     (mais ce n'est pas égal à $\arcsin(\sqrt{5}/3)$ ni $\arctan(-\sqrt{5}/2)$!)
4. remarque: si on s'intéresse à $t = s_1 \circ s_2$ on peut bien sûr suivre le même procédé.
   Cependant il est intéressant de remarquer que $t = r^{-1}$
   En effet, comme s_i est une réflexion on a $s_i \circ s_i = id$ c'est à dire $s_i^{-1} = s_i$ pour $i = 1$ ou 2
   On a donc $t = s_1 \circ s_2 = s_1^{-1} \circ s_2^{-1} = (s_2 \circ s_1)^{-1} = r^{-1}$
   Ainsi $\boxed{t = s_1 \circ s_2 \text{ est la rotation d'axe } \mathrm{vect}(\vec{i}-2\vec{k}) \text{ et d'angle } -\arccos(-2/3)}$

294 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires.
En développant par bilinéarité, on a $(\vec{u}+\vec{v}|\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}|\vec{u}) - (\vec{v}|\vec{v}) = 1-1 = 0$

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires.
   Comme les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux, et que f conserve le produit scalaire, on peut affirmer que $(f(\vec{u}+\vec{v})|f(\vec{u}-\vec{v}) = 0$. Or f est une application linéaire, donc $(f(\vec{u})+f(\vec{v})|f(\vec{u})-(\vec{v}) = 0$.
   Par bilinéarité du produit scalaire, en développant, on trouve $(f(\vec{u})|f(\vec{u})) = (f(\vec{v})|f(\vec{v}))$, et donc en prenant la racine carrée: $||f\vec{u})|| = ||f(\vec{v})||$!
3. - Nous avons montré à la question précédente que *"les images des vecteurs unitaires avaient tous la même norme"*. Notons $\alpha \geqslant 0$, la norme commune à toutes les images des vecteurs unitaires.
   - Comme f est une application linéaire on a $f(\vec{0}) = \vec{0}$, et donc l'égalité $||f(\vec{x})|| = \alpha||\vec{x}||$ est bien vérifiée dans le cas où $\vec{x} = \vec{0}$
   - Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul.
     Posons $\vec{y} = \dfrac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$. Comme $\vec{y}$ est un vecteur unitaire, on a $||f(\vec{y})|| = \alpha$, c'est à dire que $||f(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}|| = \alpha$. Par linéarité de f, le scalaire $\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$ sort de f, et il sort ensuite de la norme en valeur absolue...mais comme une norme est toujours positive, on aboutit à $\frac{1}{||\vec{x}||}||f(\vec{x})|| = \alpha$.
     Ce qui donne bien $||f(\vec{x})|| = \alpha||\vec{x}||$
4. - si $\alpha = 0$, on a pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, $||f(\vec{x})|| = 0$ et donc $f(\vec{x}) = \vec{0}$! f est donc l'endomorphisme nul: il peut donc s'écrire $0.g$ où g est un endomorphisme orthogonal quelconque de E
   - si $\alpha \neq 0$. Considérons l'endomorphisme g défini par $g = \frac{1}{\alpha}.f$.
     En reportant dans 3, et en simplifiant par $\alpha \neq 0$, on arrive à $||g(\vec{x})|| = ||\vec{x}||$ pour tout vecteur $\vec{x}$ de E. Ceci prouve que g est un endomorphisme orthogonal!
     On a bien prouvé que $f = \alpha.g$ avec $g \in O(E)$: g est donc la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle! (c'est une similitude)

298 1. fait en classe

2. • On remarque que $<1,X>=\int_{-1}^{1} t.dt=0$.
La famille $(1,X)$ est donc une base orthogonale de $F=\text{vect}(1,X)$

•
$$||1||^2=\int_{-1} +11.dt=2$$
$$||X||^2=\int_{-1}^{1} t^2dt=\frac{2}{3}$$
$$<1,X^2>=\int_{-1}^{1} t^2dt=\frac{2}{3}$$
$$<X,X^2>=\int_{-1}^{1} t^3dt=0$$

• La formule du projeté orthogonal donne
$$p_F(X^2)=\frac{<1,X^2>}{||1||^2}.1+\frac{<X,X^2>}{||X||^2}X=\frac{3}{2}$$

3. • On sait que l'on va utiliser le théorème de distance à un sev de dimension finie.
(et vue la question précédente, on se doute que ce sera $d(X^2,F)$ avec $F=\text{vect}(1,X)$)

• On commence par remarquer que
$$m=\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(t^2+at+b)^2dt=\min_{(c,d)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(t^2-ct-d)^2dt$$
On a écrit ensuite la chose habituelle
$$\begin{aligned}m&=\min_{(c,d)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(t^2-ct-d)^2dt\\&=\min_{(c,d)\in\mathbb{R}^2}||X^2-cX-d||^2\\&=\min_{(c,d)\in\mathbb{R}^2}||X^2-(cX+d.1)||^2\\&=\min_{P\in\text{vect}(1,X)}||X^2-P||^2\\&=\min_{P\in F}||X^2-P||^2\\&=(d(X^2,F))^2\end{aligned}$$
On sait par théorème que $d(X^2,F)$ est atteinte pour un seul vecteur $P_0\in F$ et P_0 est le projeté orthogonal de X^2 sur F., càd $P_0=p_F(X)=\dfrac{3}{2}$.
Ainsi
$$m=(d(X^2,F))^2=(d(X^2,P_0))^2=||X^2-P_0||^2=||X^2-\frac{3}{2}||^2$$
avec
$$||X^2-\frac{3}{2}||=\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{3}{2})^2dt=\int_{-1}^{1}t^4-3t^2+\frac{9}{4}dt=\left[\frac{t^5}{5}-t^3+\frac{9}{4}t\right]_{-1}^{1}=\cdots=2.9$$

315 1. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments quelconques de E
On a par hypothèse $f(\vec{x}+\vec{y}).(\vec{x}+\vec{y})=0$
En utilisant la linéarité de f, puis la bilinéarité du ps, on arrive à $f(\vec{x}).\vec{x}+f(\vec{y}).\vec{x}+f(\vec{x}).\vec{y}+f(\vec{y}).\vec{y}=0$
Comme $f(\vec{x}).\vec{x}=f(\vec{y}).\vec{y})=0$, on peut bien affirmer que $f(\vec{x}).\vec{y}=-x.f(\vec{y})$

2. Pour tout $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E, on note X et Y les matrices unicolonnes associées dans la bon $\mathcal{B}$.
Comme $\mathcal{B}$ est une bon, on sait que la matrice du produit scalaire est I_n.
On a donc $f(\vec{x}).\vec{y}={}^t(AX)I_nY={}^tX{}^tAY$ et $\vec{x}.f(\vec{y})={}^tXI_n(AY)={}^tXAY$ (et donc $-\vec{x}.f(\vec{y})=-{}^tXAY={}^tX(-A)Y$)
On peut donc affirmer que pour toutes matrices unicolonnes X et Y on a ${}^tX{}^tAY={}^tX(-A)Y$.
D'après le lemme 1 du poly de cours sur les espaces euclidiens, on peut alors affirmer que ${}^tA=-A$.
On a bien prouvé que A était une matrice antisymétrique.
3. Soit $\vec{x}\in\ker f$ et $\vec{y}\in\text{Im}\, f$.
Comme $\vec{y}\in\text{Im}\, f$, il existe $\vec{t}\in E$, $f(\vec{t})=\vec{y}$.
On a donc $\vec{y}.\vec{x}=f(\vec{t}).\vec{x}=-\vec{t}.f(\vec{x})=-\vec{t}.\vec{0}=0$
4. • montrons que $\text{Im}\, f$ est stable par f.
Soit $\vec{x}\in\text{Im}\, f\subset E$
On a $f(\vec{x})\in\text{Im}\, f$ de manière évidente! cqfd! (rappel: on a toujours $\text{Im}\, f^2\subset\text{Im}\, f$)
• Considérons la restriction de f à $\text{Im}\, f$, c'est à dire $\boxed{\begin{array}{rcl}g:\text{Im}\, f&\longrightarrow&E\\\vec{x}&\longmapsto&f(\vec{x})\end{array}}$.
• Comme g est la restriction d'une application linéaire à un sev, g est une application linéaire.
• Comme de plus $\text{Im}\, f$ est stable par f, on a donc g qui est un endomorphisme de $\text{Im}\, f$. On peut écrire $\boxed{\begin{array}{rcl}g:\text{Im}\, f&\longrightarrow&\text{Im}\, f\\\vec{x}&\longmapsto&f(\vec{x})\end{array}}$.
• Il est évident que $\ker g=\ker f\cap\text{Im}\, f$. Or ces deux espaces sont en somme directe! On a donc $\ker g=\{\vec{0}\}$
• g est un endomorphisme d'un sev de dimension finie,
on sait alors que g bijective ssi $\ker g=\{\vec{0}\}$!
• On a bien montré que g était bijective!
5. On suppose $\dim E=3$. On note $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un bon de E.
• Soit $\vec{\omega}\in E$ fixé.
Nous allons écrire la matrice de l'endomorphisme $h:\vec{x}\mapsto\vec{\omega}\wedge\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.
Notons (a,b,c) les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans la base $\mathcal{B}$.
On a $\omega=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$. Et un calcul simple donne:
  – $h(\vec{i})=c\vec{j}-b\vec{k}$
  – $h(\vec{j})=-c\vec{i}+a\vec{k}$
  – $h(\vec{k})=b\vec{i}-a\vec{j}$

Ainsi la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$
• Notons M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. D'après la question 2, on sait que c'est une matrice antisymétrique. M est donc de la forme $\begin{pmatrix}0&p&q\\-p&0&r\\-q&-r&0\end{pmatrix}$ avec $(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$
Considérons le vecteur $\omega=-r\vec{i}+q\vec{j}-p\vec{k}$, et l'application h qui lui est associé.
Par ce choix judicieux, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}h=\text{Mat}_{\mathcal{B}}f$. On peut donc en déduire que $f=h$!

1. $u(x+y).(x+y)=0=u(x).x+u(x).y+u(y).x+u(y).y=u(x).y+u(y).x$
2. $\forall\vec{x}\in\ker u,\forall\vec{y}\in E,u(\vec{y}).\vec{x}=-\vec{y}.u(\vec{x})=-\vec{y}.\vec{0}=0$
3. $\text{Im}\, u^2\subset\text{Im}\, u$ comme toujours ! $\text{Im}\, u$ et $\ker u$ sont orthogonaux, donc ils sont en somme directe, et donc $\ker u_{|\,\text{Im}\, u}=\ker u\cap\text{Im}\, u=\{\vec{0}\}$